

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

УДК 519.85

*С.И. Ляшко, С.И. Яремчук, Н.И. Ляшко, А.А. Шупиков, Е.С. Бондарь*

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ФИКСИРОВАННЫЕ МЕСТА

**Ключевые слова:** оптимизация, линейный оператор, функция цели

### Введение

Задачи поиска оптимального размещения источников физического поля состоят в нахождении такого их размещения, при котором заданный критерий качества достигает своего экстремума. Это могут быть источники загрязнения, звука, тепла и др.

В качестве примера можно рассмотреть радиационную печь [1], в которой для обрабатываемой детали нужно получить равномерное распределение температуры. Тепловыделяющие элементы находятся на стенках рабочей зоны печи. Технологически они размещены в виде матрицы. Для решения такой задачи можно применить активные или пассивные методы охлаждения или же рационально разместить тепловыделяющие элементы. Последний метод особенно актуален в условиях, когда ограничены возможности использования активных методов охлаждения и заданы жесткие требования на массогабаритные характеристики. В этом случае отвод тепла осуществляется преимущественно через элементы конструкции, поэтому рациональное размещение источников тепла является одним из определяющих механизмов для улучшения теплового режима. С помощью изменения тепловыделения источников тепла формируется желательное температурное поле. С точки зрения оптимизации такую задачу можно классифицировать как задачу размещения источников разной интенсивности на заданные посадочные места.

В медицине для трансдермального проникновения лекарственных веществ в организм человека применяется система микроигл, которая обеспечивает контролируемое и безболезненное высвобождение действующего вещества за продолжительное время [2]. Меняя координаты и интенсивность источников, можно достичь желательного распределения лекарства в эпидермисе [3, 4]. При исследовании математических моделей транспортировки лекарственных веществ в раковых опухолях подобные задачи изучались в работах [5–8].

Различные задачи оптимизации размещения источников в мелиорации, медицине, экономике, охране окружающей среды изучались в работах [9–17].

К таким задачам также относится задача определения источника цунами по его показателям вдоль побережья [18]. Ключевым моментом численного моделирования цунами является конструирование источника, который генерирует

критическую волну цунами для определенного пункта наблюдения. Тогда обратной к ней будет задача, состоящая в восстановлении пространственно-временной области источника цунами по характеристикам зарегистрированных волн (заданной функции) в пунктах наблюдения. Для этого типа задач необходимо найти такое размещение источников, при котором максимальное отклонение физического поля от заданной функции будет наименьшим.

В строительстве имеет место задача моделирования неблагоприятного размещения нагрузок при расчете строительных сооружений согласно требованиям, изложенным в [19]. Это задача поиска такого размещения переменных длительных нагрузок, при которых минимальный из продольных изгибающих моментов, появляющихся в сжатых колоннах строительного сооружения, будет максимальным.

Большая часть приведенных задач оптимизации принадлежит группе минимаксных, которым уделялось недостаточно внимания. К такой группе принадлежит задача, которая рассматривается в данной работе и может быть сформулирована следующим образом.

Есть некоторая область с фиксированными на ней посадочными местами для источников физического поля и точками измерения его значений. Каждый источник должен назначаться только на одно место, и каждое место должно быть занято одним источником. На посадочные места нужно назначить источники таким образом, чтобы максимальное из значений физического поля в точках измерения было наименьшим (максимальное из отклонений значений сгенерированного источниками физического поля в точках измерения от значений исходного поля в этих точках было наименьшим). Для сформулированной минимаксной задачи в 1970-х годах была предложена следующая математическая модель [20].

В евклидовом пространстве  $R^n$ ,  $n = 2, 3$ , есть область  $\Omega$ ; взаимно ориентированные источники физического поля  $D_i \subset \Omega$ ,  $i \in [1 : N]$ ; посадочные места  $m_j \in \Omega$ ,  $j \in [1 : M]$ , и точки измерения значений физического поля  $y^k \in \Omega$ ,  $k \in [1 : K]$ . Физическое поле  $u(y, Z)$ , которое индуцируется источниками и окружающей средой, описывается следующей краевой задачей:

$$Lu = \psi(y, Z),$$

$$B_j u = \varphi_j, j \in [1 : J],$$

где  $L$  — заданный линейный дифференциальный оператор,  $B_j$ ,  $j \in [1 : J]$  — заданные линейные операторы, которые определяют краевые условия,  $y$  — текущая точка области  $\Omega$ ,  $\varphi_j$ ,  $j \in [1 : J]$  — заданные функции,

$$\psi(y, Z) = \begin{cases} A_i(y - Z^i), & y \in D_i, \quad i \in [1 : N], \\ 0, & y \notin \bigcup_{i=1}^N D_i, \end{cases}$$

вектор  $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^N)$  определяет размещение всех источников,  $Z^i$  определяет размещение источника  $D_i$  в области  $\Omega$  и совпадает с координатами его полюса (фиксированной точкой  $p^i \in D_i$ ,  $i \in [1 : N]$ );  $A_i(y - Z^i)$  — интенсивность источника  $D_i$ .

Отметим, что обоснование корректности подобных задач довольно эффективно проводится с применением аппарата оснащенных пространств Гильберта и априорных оценок в негативных нормах [3, 4, 9, 17, 21–24].

Функция цели

$$\Phi(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z) \rightarrow \min.$$

Авторами этой модели также был построен алгоритм, который называется гибридным, так как является комбинацией трех методов [20]. Это объяснялось тем, что предложенная математическая модель не имеет признаков, по которым можно было бы выбрать соответствующий метод оптимизации. Применение комбинации нескольких методов позволяет в процессе решения задачи накапливать информацию относительно ее свойств, а это дает возможность перестраивать (менять) параметры методов.

На первом этапе методом случайного поиска [25] (или каким-то другим из алгоритмов Монте–Карло) заданное количество раз моделируется случайный процесс. В результате находятся размещения, из которых путем сравнения соответствующих значений функции цели выбирается наилучшее, которое становится начальным приближением для следующего этапа.

На втором этапе используется метод последовательной статистической оптимизации [26], предоставляющий возможность найти множество меньшей меры, которое является перспективным для поиска экстремума.

На третьем этапе на множестве, найденном на втором этапе, выполняется поиск экстремума с использованием метода вектора спада [27].

При численной реализации указанного гибридного алгоритма процесс выполнения каждого из этапов повторяется несколько раз для коррекции полученного решения. Это делается выбором нового начального приближения, изменения способа метризации комбинаторного пространства, изменения закона выбора радиусов окрестностей и т.п. Причем на каждой итерации каждого из этапов решается соответствующая краевая задача математической физики.

Недостатки метода:

- очень большое время работы программной реализации;
- отсутствие оценки точности решения.

Это обусловило актуальность построения математических моделей и методов, которые позволили бы решать такие задачи с большей размерностью за приемлемое время и получать результат с заданной точностью. В работе [28] построена математическая модель поставленной задачи, которая является минимаксной задачей линейного программирования с булевыми переменными и предложен метод ее решения под названием «Р-алгоритм».

## 1. Математическая модель

Управляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad (1)$$

$i \in [1: N], j \in [1: N]$ .

Ограничения, которые задают множество допустимых решений задачи:

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \quad i \in [1: N], \quad \sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad j \in [1: N]. \quad (2)$$

Функция цели:

$$f(x) = \max_{k \in K} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^k x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $u_{ij}^k$  — вклад  $i$ -го источника, который находится на  $j$ -м посадочном месте, в значение физического поля — в точке  $y^k$ ,  $i \in [1: N]$ ,  $j \in [1: N]$ ,  $k \in [1: K]$ .

*Примечание.* В работе предусмотрена возможность приведения задачи к виду (1)–(3) для случая, когда количество источников и посадочных мест не совпадают [29].

Метод «Р-алгоритм» построен с использованием метода потенциалов решения транспортной задачи.

Для этого:

- условие (1) заменяется на

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in [1: N], \quad j \in [1: N]; \quad (4)$$

- для каждой точки измерения  $y^k$ ,  $k \in [1: K]$ , строится таблица транспортной задачи с соответствующими значениями  $u_{ij}^k$ , которые находятся до начала работы «Р-алгоритма» путем решения соответствующих краевых задач для каждой пары значений  $i, j$ ,  $i \in [1: N]$ ,  $j \in [1: N]$ ;

- рассматривается  $K$  транспортных задач с одинаковыми опорными планами и разными  $u_{ij}^k$  и, соответственно, разными значениями функций цели

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^k x_{ij}.$$

Так как при решении транспортной задачи с целочисленными начальными условиями («запасами» поставщиков и «нуждами» потребителей) объемы перевозок ( $x_{ij}$ ) целочисленные, то при выполнении ограничений (4) выполняется и условие (1). Таким образом, замена условия (1) в модели (1)–(3) на условие (4) не изменяет множество допустимых решений задачи (1)–(3).

Сформулированы условия, при выполнении которых полученное решение является точным, а также указаны границы, в которых находится точное решение, если эти условия не выполнены (т.е. не гарантируется получение точного решения).

Время работы программной реализации метода существенно зависит от:

- количества контрольных точек, так как на каждом шаге алгоритма для каждой из  $K$  таблиц транспортной задачи находятся соответствующие потенциалы, оценки и значения функции цели;
- метода построения цикла, так как рекурсия занимает много времени при использовании, а цикл строится на каждом шаге алгоритма.

Поэтому актуальна потребность построения других методов для решения данной задачи.

## 2. Построение новой математической модели и модификации метода Ленд и Дойг

**2.1. Построение новой математической модели.** С использованием идеи Зойтендейка [30] задача (1)–(3) сводится к классической задаче дискретного программирования, которая может быть решена классическими методами оптимизации.

Для этого выполняются следующие действия.

К системе ограничений (2) добавляются неравенства

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^k x_{ij} \leq s, \quad k \in [1: K].$$

За функцию цели принимается  $F(x, s) = s$ .

Таким образом, получена частично целочисленная задача линейного программирования (ЗЛП) с булевыми переменными:

$$F(x, s) = s \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^k x_{ij} \leq s, \quad k \in [1: K], \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \quad i \in [1: N], \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad j \in [1: N], \quad (8)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{ïðå } i \in [1: N], j \in [1: N]. \quad (9)$$

Задача (5)–(9) может быть решена, например, методом Ленд и Дойг [31], который является методом ветвей и границ.

С использованием особенностей модели (5)–(9) построена модификация метода Ленд и Дойг, которая значительно ускоряет процесс решения по сравнению с классическим методом Ленд и Дойг.

**2.2. Модификация метода Ленд и Дойг. Обоснование** (на примере ветвления начального множества  $X^0$ ). В методе Ленд и Дойг для нахождения оценки множества допустимых решений (МДР) целочисленной или частично целочисленной ЗЛП  $(C, X^0)$  отбрасываются условия целочисленности и решается полученная ослабленная задача  $(C, \tilde{X}^0)$ . Процесс прекращается, если оказалось, что  $\tilde{X}^0 = \emptyset$  или получено решение, которое удовлетворяет условиям целочисленности. Если же решение  $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$  оказалось не целочисленным (координата  $x_k^0$  — не целая), то соответствующее значение функции цели задачи является оценкой МДР исходной задачи, а множество  $X^0$  разветвляется на подмножества  $X_1^1$  и  $X_2^1$  ( $X_1^1 \cup X_2^1 = X^0$ ,  $X_1^1 \cap X_2^1 = \emptyset$ ) путем добавления к ограничениям, которые задают множество  $X^0$ , ограничений  $x_k \leq [x_k^0]$  для получения  $X_1^1$  и  $x_k \geq [x_k^0] + 1$  для получения  $X_2^1$ .

Для нахождения оценок полученных подмножеств решаются соответствующие ослабленные задачи  $(C, \tilde{X}_1^1)$  и  $(C, \tilde{X}_2^1)$ . При этом для преобразования каждого из добавленных неравенств в уравнение вводится новая переменная, т.е. размерность каждой из полученных задач увеличивается на одну переменную и на одно ограничение (по сравнению с родительской  $(C, X^0)$ ). Такое увеличение размерности имеет место при каждом дальнейшем ветвлении.

Процедура отбрасывания условий целочисленности (9) выполняется путем замены их на условия неотрицательности  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i \in [1: N]$ ,  $j \in [1: N]$ .

Из условий (7)–(8) и условий неотрицательности вытекает, что  $x_{ij} \leq 1$ ,  $i \in [1: N]$ ,  $j \in [1: N]$ , т.е. имеем

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i \in [1: N], \quad j \in [1: N]. \quad (10)$$

Таким образом, если переменная  $x_{i_m j_m}$  инициирует ветвление, то неравенства, добавляющиеся к ограничениям, задающим родительское множество  $X_r^m$  для получения подмножеств  $X_r^{m+1}$  и  $X_{r+1}^{m+1}$ , будут иметь вид  $x_{i_m j_m} \leq [x_{i_m j_m}^m]$  и  $x_{i_m j_m} \geq [x_{i_m j_m}^m] + 1$  соответственно.

На основании условий (10) они превращаются в  $x_{i_m j_m} = 0$  и  $x_{i_m j_m} = 1$ .

Отсюда вытекает следующее:

- задача  $(C, X_r^{m+1})$ , полученная подстановкой условия  $x_{i_m j_m} = 0$  в систему ограничений, определяющих множество  $X_r^m$ , не увеличивается на одно ограничение и уменьшается на одну переменную;
- задача  $(C, X_{r+1}^{m+1})$ , полученная подстановкой условия  $x_{i_m j_m} = 1$  в систему ограничений, определяющих множество  $X_r^m$ , уменьшается на два ограничения:

$$x_{i_m 1} + x_{i_m 2} + \dots + x_{i_m j_m} + \dots + x_{i_m N} = 1, \quad x_{1 j_m} + x_{2 j_m} + \dots + x_{i_m j_m} + \dots + x_{N j_m} = 1$$

и на  $2N - 1$  переменную. Это связано с тем, что  $x_{i_m j_m} = 1$ , а тогда все другие переменные в этих уравнениях равняются нулю и уравнения превращаются в тождества. На ветвях дерева ветвлений, которые ведут в соответствующие вершины, запоминаются значения всех фиксированных переменных. Таким образом, размерность множеств, полученных в результате ветвления, зависит от размерности «родительского» множества.

### 2.3. Алгоритм модификации метода Ленд и Дойг (см. 1–8).

1. В задаче (5)–(9) условия (9) заменяются на условия  $x_{ij} \geq 0, \quad i \in [1: N], \quad j \in [1: N]$ , и решается полученная ослабленная задача  $(C, \tilde{X}^0)$ . Если ее решение удовлетворяет условиям целочисленности (9), то процесс прекращается, так как получено решение исходной задачи (5)–(9)  $((C, X^0))$ . Если оказалось, что  $\tilde{X}^0 = \emptyset$ , то процесс также прекращается, поскольку это является решением исходной задачи. Иначе рекорду присваивается значение  $m^* = \infty$ , а оценка исходного множества  $X^0$  становится  $m(X^0) = F(x^*(C, \tilde{X}^0))$  — значение функции цели в точке, являющейся оптимальным решением ослабленной задачи.

2. Множество  $X_r^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad r = 1, 2, \dots$ , разветвляется. Для этого выполняются следующие действия.

- Выбирается переменная  $x_{i_m j_m}$ , которая соответствует нецелочисленной координате  $x_{i_m j_m}^m$  решения ослабленной задачи  $x^*(C, \tilde{X}_r^m)$ . Она инициирует ветвление множества  $X_r^m$  на два подмножества  $X_r^{m+1}$  и  $X_{r+1}^{m+1}$ .

- $X_r^{m+1}$  получается из  $X_r^m$  путем подстановки в ограничения, определяющие  $X_r^m$ , значение переменной  $x_{i_m j_m} = 0$ . На ветви дерева ветвлений, которая ведет к вершине с множеством  $X_r^{m+1}$ , фиксируется значение  $x_{i_m j_m} = 0$ .

- $X_{r+1}^{m+1}$  получается из  $X_r^m$  путем подстановки в систему ограничений, определяющих  $X_r^m$ , значений переменных  $x_{i_m j_m} = 1, \quad x_{i_m j} = 0$  при  $j \neq j_m$ .

$x_{ij_m} = 0$  ідè  $i \neq i_m$ . Эти значения фиксируются на ветви дерева ветвлений, которая ведет в вершину с множеством  $X_{r+1}^{m+1}$ , и в части системы ограничений, которая обозначена (7), вычеркиваются строка  $i_m$  и столбик  $j_m$ , а в части, которая обозначена (8), вычеркиваются строка, содержащая элементы  $x_{ij_m}$ ,  $i \in [1: N]$ , и столбец, содержащий элементы  $x_{i_m j}$ ,  $j \in [1: N]$ .

**3.** Находятся оценки полученных множеств  $X_r^{m+1}$  и  $X_{r+1}^{m+1}$ . Для этого решаются ослабленные задачи  $(C, \tilde{X}_r^{m+1})$  и  $(C, \tilde{X}_{r+1}^{m+1})$ . Если какая-то из них не имеет решения (множество допустимых решений пусто), то соответствующее множество зондируется.

**4.** Оценки, полученные в п. 3, сравниваются с  $m^*$ . Множества, оценки которых больше или равняются  $m^*$ , зондируются. Если прозондированы обе, то осуществляется переход к п. 7. Иначе выполняется следующий пункт.

**5.** Проверяется, удовлетворяет ли решение хотя бы одной из задач  $(C, \tilde{X}_r^{m+1})$  и  $(C, \tilde{X}_{r+1}^{m+1})$  условиям целочисленности. Если нет, то выполняется переход к п. 7. Иначе решение, которое удовлетворяет этим условиям, запоминается как претендент на оптимальное ( $\bar{x}$ ) (вместе со значениями переменных, зафиксированных на ветвях, ведущих в соответствующую вершину), а оценка этого множества становится новым рекордом ( $m^*$ ). Если целочисленными оказались оба решения, то за  $\bar{x}$  и  $m^*$  берется результат с меньшим значением оценки.

**6.** Оценки всех висящих вершин сравниваются с  $1/m^* - m^*$ . Те вершины, оценки которых не меньше  $m^*$ , зондируются.

**7.** Проверяется, имеет ли дерево ветвлений висящие вершины. Если нет, то выполняется переход к п. 8, иначе выбирается висящая вершина с минимальной оценкой. Если таких несколько, то с наименьшей размерностью системы ограничений, а если и таких несколько, то с наименьшим порядковым номером,  $m$  присваивается значения  $m+1$ , а  $r$  — порядковый номер выбранной вершины (множества). Выполняется переход к п. 2.

**8.** Процесс прекращается. Найдено решение исходной задачи  $x^* = \bar{x}$ ,  $f(x^*) = m^* = f(\bar{x})$ .

### 3. Прикладная задача

Следующая прикладная задача приведена для иллюстрации возможности использования предложенных методов. Геометрия печатной платы, заполненной несколькими интегральными схемами, которые выступают источниками тепла, взята из [32], а тепловые свойства материалов указаны в табл. 1 [33], где  $y$  — текущая точка объекта, а  $y^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , — контрольная точка. Процессоры и контрольные точки нижней платы обозначены на рис. 1, где 1 — печатная плата, 2 — интегральные схемы (процессоры), 3 — воздух. Ради простоты обозначения верхней платы опущены, но они построены по тем же правилам, что и для нижней платы: начало нумерации из левого нижнего угла, двигаясь по оси ординат, потом — по оси абсцисс.

Таблица 1

Элементы объекта	Теплопроводность ( $k(y)$ ) W/(m K)
FR4 (печатная плата)	0,3
Silicon (интегральные схемы)	130
Воздух	0,03

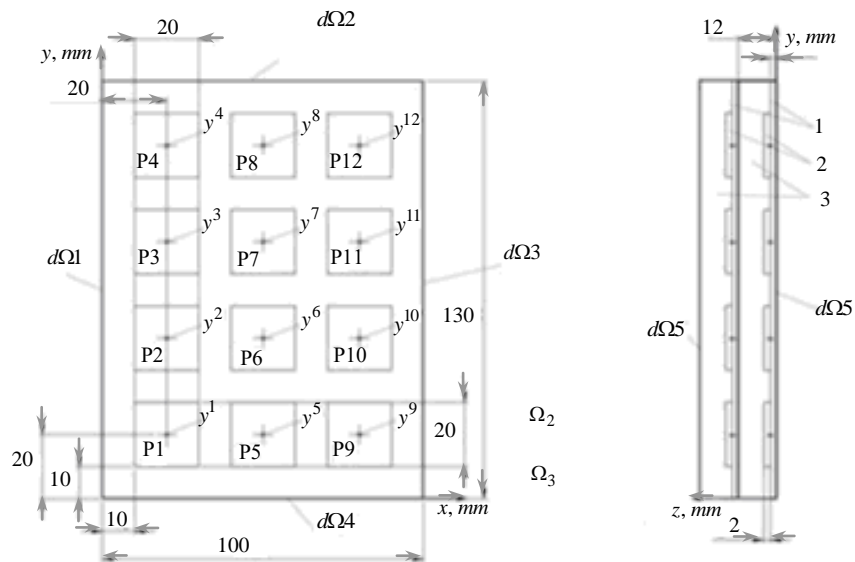


Рис. 1

Оптимальные скорости для каждого процессора получены из [34–36] и конвертированы в удельную мощность процессора  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $j$  — номер посадочного места,  $i$  — номер источника (табл. 2).

Таблица 2

$j$	$i$	$D_i$ , $\text{kw/m}^3$	$j$	$i$	$D_i$ , $\text{kw/m}^3$	$j$	$i$	$D_i$ , $\text{kw/m}^3$
1	1	15	9	9	80	17	17	160
2	2	20	10	10	90	18	18	165
3	3	30	11	11	100	19	19	35
4	4	40	12	12	110	20	20	25
5	5	45	13	13	120	21	21	55
6	6	50	14	14	130	22	22	65
7	7	60	15	15	140	23	23	75
8	8	70	16	16	150	24	24	85

Распределение температур в  $\Omega$  определяется краевой задачей (11)–(14). Интегральные схемы (процессоры) становятся соответствующими источниками тепла при получении той или иной задачи, т.е. размещение источников на фиксированные места — это фактически размещение задач на процессоры:

$$k(y)\Delta u = \psi(y, Z^i), \quad i \in [1: N], \quad (11)$$

$$\left( k(y) \frac{\partial u}{\partial n} + h_i u \right) \Big|_{d\Omega_i} = h_i u^0, \quad i = [1: 4], \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{d\Omega_5} = 0, \quad (13)$$

$$\psi(y, Z^i) = \begin{cases} A_i (y - Z^i), & y \in D_i, \quad i \in [1: N], \\ 0, & y \notin D_i, \end{cases} \quad (14)$$



$h_1 = 100 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $h_2 = 300 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $h_3 = 200 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  $h_4 = 400 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ,  
 $u^0 = 20^\circ\text{C}$  (температура окружающей среды).

В целях минимизации максимальной температуры сформулирована оптимизационная задача (5)–(9). Для этого введено  $N$  матриц:

$$U^k = \begin{bmatrix} u_{11}^k & \dots & u_{1N}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1}^k & \dots & u_{NN}^k \end{bmatrix}.$$

Указанные матрицы сформированы следующим образом. Каждому из  $N$  источников присваивается номер  $i \in \{1, \dots, N\}$ , источник  $i$  назначается на  $j$ -е посадочное место,  $j \in \{1, \dots, N\}$  (все другие источники неактивны). Соответствующая краевая задача (11)–(14) решается с помощью метода конечных элементов в среде численного моделирования COMSOL Multiphysics. В результате этого в  $i$ -й строке на  $j$ -м месте каждой матрицы  $U^k$ ,  $k \in \{1, \dots, N\}$  получается элемент  $u_{ij}^k$  — вклад  $i$ -го источника, который находится на  $j$ -м месте, в контрольную точку  $y^k$ . Так как дифференциальные операторы задачи (11)–(13) линейные, то эта задача имеет свойство аддитивности, т.е. температура в точке  $y^k$  равняется

$$u(y^k) = f_k(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^k x_{ij}.$$

Таким образом, задача оптимизации полностью сформирована. В результате ее решения приведенным выше алгоритмом получено оптимальное распределение задач (источников) по процессорам (табл. 3), где  $j$  — номер посадочного места,  $i$  — номер источника.

Таблица 3

		Удельная мощность источника $D_i$ , kw/m <sup>3</sup>			Удельная мощность источника $D_i$ , kw/m <sup>3</sup>			Удельная мощность источника $D_i$ , kw/m <sup>3</sup>
1	11	100	9	13	120	17	10	90
2	4	40	10	22	65	18	3	30
3	21	55	11	8	70	19	20	25
4	12	110	12	14	130	20	24	85
5	23	75	13	15	140	21	17	160
6	2	20	14	19	35	22	5	45
7	1	60	15	6	50	23	7	60
8	9	70	16	16	150	24	18	165

Рис. 2, *a* демонстрирует температурное распределение для следующего случая: процессору #1 отводится задача #1 (имеет удельную мощность  $D_1$ ), процессору #2 отводится задача #2 (имеет удельную мощность  $D_2$ ), и т.д., максимальное из значений температуры в контрольных точках  $y^k$ ,  $k = [1 : N]$  равняется  $67,7^\circ\text{C}$ .

Рис. 2, *b* демонстрирует температурное распределение при оптимальном размещении задач по процессорам (минимизированное максимальное из значений температуры в точках  $y^k$ ,  $k = [1 : N]$ , которая равняется  $48,7^\circ\text{C}$ ).

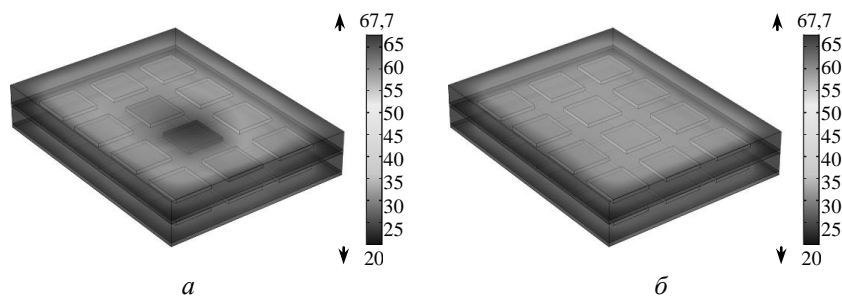


Рис. 2

#### 4. Вычислительный эксперимент

Задачу, которая рассматривается в данной работе, можно решать указанными выше алгоритмами как с использованием параллельных вычислений, так и без них.

Для использования параллельных вычислений были рассмотрены и сравнивались такие технологии, как CUDA, MPI, OpenMP.

MPI работает на одном компьютере медленнее, чем OpenMP и CUDA, но MPI в отличие от OpenMP можно использовать на нескольких компьютерах, а CUDA поддерживается лишь на компьютерах с графическим процессором Nvidia, поэтому для параллельных вычислений выбрана технология MPI.

Численные результаты программной реализации метода «Р-алгоритм» с распараллеливанием и без распараллеливания в табл. 4.

Таблица 4

Количество точек измерения	Количество посадочных мест	Время работы		Количество точек измерения	Количество посадочных мест	Время работы	
		C++	C++ с MPI			C++	C++ с MPI
		Без распараллеливания	С распараллеливанием			Без распараллеливания	С распараллеливанием
4	4	0,023	0,0214	16	4	5,08	1,1852
	8	0,0188	0,0092		8	1,8152	0,7616
	12	0,0182	0,013		12	1,7258	0,9738
	16	0,0176	0,0108		16	1,455	0,8988
	20	0,0132	0,0082		20	1,0912	1,1756
8	4	0,2844	0,059	20	4	15,1582	4,8092
	8	0,0778	0,0314		8	6,495	2,5826
	12	0,1302	0,056		12	2,9286	2,6928
	16	0,1234	0,0914		16	3,4434	3,4628
	20	0,1062	0,0508				
12	4	1,9288	0,3428				
	8	0,7808	0,2478				
	12	0,7648	0,3014				
	16	0,3278	0,1966				
	20	0,691	0,517				

График времени работы метода «Р-алгоритм» с использованием параллельных вычислений изображен на рис. 3. Выигрыш во времени от использования параллельных вычислений в методе «Р-алгоритм» (в процентах) — на рис. 4.

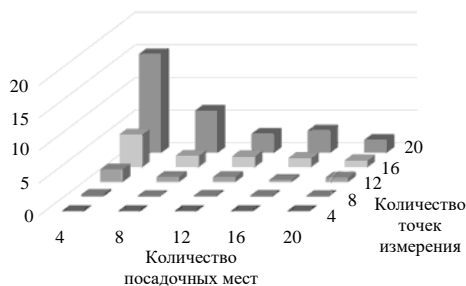


Рис. 3

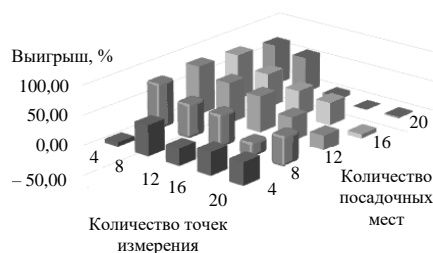


Рис. 4

График зависимости отклонений значений физического поля, полученных методом «Р-алгоритм», от точных значений в зависимости от размерности задачи на рис. 5. Таким образом, метод «Р-алгоритм» является приближенным (в большинстве случаев). Он поддается распараллеливанию. Но при этом на каждой итерации потокам необходимо координировать работу между собой, что не позволяет получать значительного увеличения быстродействия при распараллеливании.

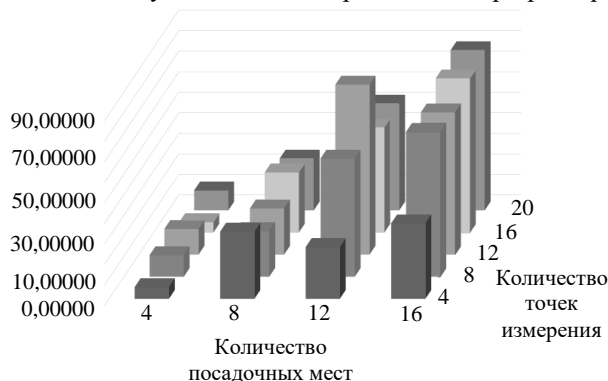


Рис. 5

Численные результаты программной реализации модифицированного метода Ленд и Дойг с распараллеливанием и без распараллеливания в табл. 5.

Таблица 5

Количество точек измерения	Количество посадочных мест	Время работы		Количество точек измерения	Количество посадочных мест c++	Время работы	
		C++	C++ с MPI			C++	C++ с MPI
		Без распараллеливания	С распараллеливанием			Без распараллеливания	С распараллеливанием
4	4	0,00180	0,00164	12	4	0,10620	0,07213
	8	0,00300	0,00286		8	1,33680	0,57800
	12	0,00300	0,00300		12	3,65100	1,67732
	16	0,00380	0,00377		16	12,14140	5,82578
	20	0,00500	0,00436		20	36,75900	18,10276

8	4	0,02540	0,00984	16	4	0,52700	0,24550
	8	0,06980	0,03486		8	9,16840	4,30378
	12	0,16260	0,09036		12	88,75940	49,31270
	16	0,24540	0,12384		16	548,05560	320,41764
	20	0,33220	0,13536		20	865,07920	455,37790

График времени работы модифицированного метода Ленд и Дойг без использования параллельных вычислений на рис. 6.

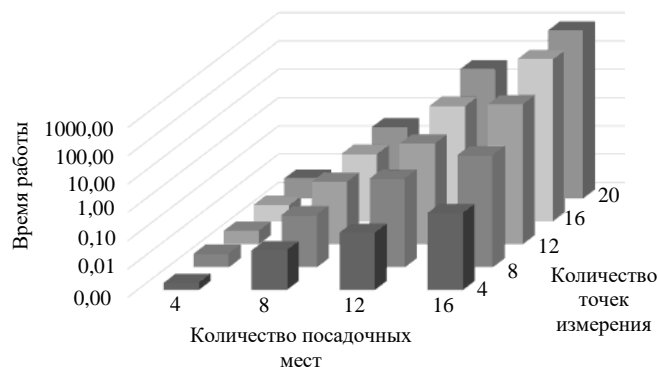
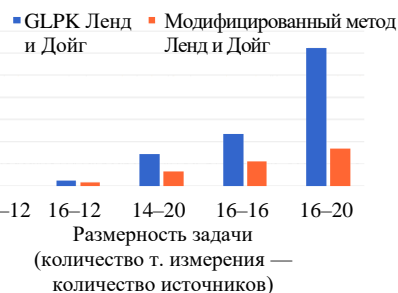


Рис. 6

График сравнения времени работы классического метода Ленд и Дойг (реализованного с помощью профессиональной библиотеки GLPK) и модифицированного (без параллельных вычислений) на рис. 7.

Из рис. 7 видно, что с увеличением размерности задачи время решения ее профессиональным пакетом программ GLPK становится значительно большим, чем соответствующее время решения ее модифицированным методом Ленд и Дойг без применения параллельных вычислений. Это объясняется указанными в описании модификации особенностями. Получаемые при ветвлении родительского множества подмножества имеют меньшую размерность, чем родительское, причем одно из этих подмножеств — значительно меньшую.

Рис. 7



Выигрыш во времени от использования в модифицированном методе Ленд и Дойг параллельных вычислений (в %) на рис. 8.

Выигрыш от использования параллельных вычислений в модифицированном методе Ленд и Дойг в сравнении с этим же методом без параллельных вычислений достигает почти 60 %. Выигрыш на небольших размерностях небольшой или даже отрицательный. Это связано с тем, что при малых размерностях задач затраты на операции, связанные с обслуживанием параллельных вычислений, имеют больший «вес», чем сама польза параллельных вычислений для таких задач.

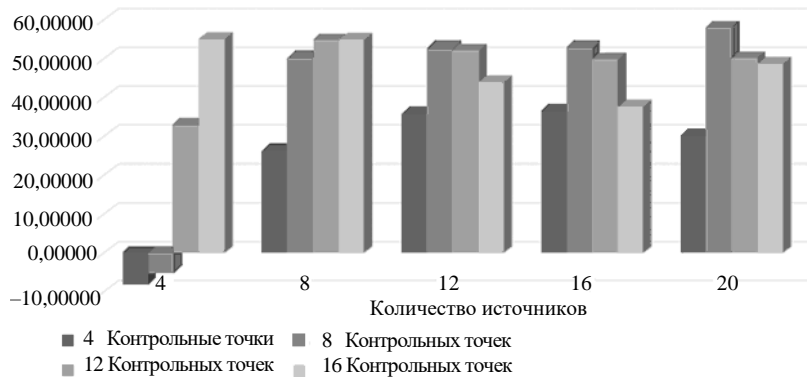


Рис. 8

Для задач большой размерности можно получить значительно лучший выигрыш, который будет возрастать при увеличении размерности. Но для этого нужно решить так называемую проблему балансирования в параллельных вычислениях.

Предложенный подход можно распространить на случай задач с точечными источниками физических полей. Краевые задачи в этом случае можно решать, например, с помощью методов, рассмотренных в работах [24, 37, 38].

### Заключение

Рассмотрена задача нахождения такого размещения источников физического поля на фиксированные места, при котором достигается минимум максимального из значений результирующего поля в точках измерения. Физическое поле, индуцируемое источниками и краевыми условиями, описывается линейной краевой задачей математической физики.

Построена математическая модель указанной оптимизационной задачи, являющаяся частично целочисленной задачей линейного программирования с булевыми переменными.

Для ее решения построена модификация метода Ленд и Дойг, которая значительно увеличивает скорость работы алгоритма в сравнении с классическим методом.

Программная реализация модифицированного метода Ленд и Дойг, выполненная с использованием параллельных вычислений, увеличила скорость работы его еще почти на 60 %.

*Авторы признательны В.Б. Крижановскому за обсуждения и предложения относительно разд. 3 и В.А. Таценко — за замечания и советы относительно разд. 4.*

*С.І. Ляшко, С.І. Яремчук, Н.І. Ляшко, О.А. Шупіков, О.С. Бондар*

## ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ НА ФІКСОВАНІ МІСЦЯ

Розглянуто задачі знаходження такого розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця, при якому максимальне із значень результирующего поля в точках заміру найменше. Наведено побудовану авторами раніше математичну модель цієї задачі, яка є мінімаксною задачею лінійного програмування з булевими змінними, і метод її розв'язання — «Р-алгоритм». Побудовано нову математичну модель, яка є частково цілочисельною задачею лінійного програмування з булевими змінними. Для розв'язання даної задачі можуть використовуватись класичні методи оптимізації, наприклад, метод Ленд і Дойг. Отримана модифікація цього методу суттєво збільшила швидкість розв'язання даної задачі. Для ілюстрації можливості використання запропонованих методів

наведено приклад розв'язання практичної задачі за допомогою модифікації методу Ленд і Дойг. Це обгрунтовано аналітично та підтверджено за допомогою чисельного експерименту, який показав, що застосування модифікації методу Ленд і Дойг значно пришвидшує розв'язання задачі порівняно з класичним, виконаним з використанням професійних бібліотек. Застосування паралельних обчислень в модифікації методу Ленд і Дойг збільшили швидкість його роботи ще майже на 60 %. Коректність наведених в роботі крайових задач впливає з отриманих авторами раніше апріорних оцінок у негативних нормах. Результати роботи легко поширюються на системи з точковою або з імпульсною дією.

**Ключові слова:** оптимізація, лінійний оператор, функція мети.

*S.I. Lyashko, S.I. Yaremchuk, N.I. Lyashko, A.A. Shupikov, E.S. Bondar*

## OPTIMIZATION OF PLACING PHYSICAL FIELD SOURCES TO FIXED PLACES

The problems of finding such placement of physical field sources at fixed landing places are considered, at which the maximum of the resulting field values at the measurement points is the smallest. The paper presents a mathematical model of this problem, which was previously developed by the authors, which is minimax linear programming problem with Boolean variables and method «P-algorithm» which resolves it. The new mathematical model which is partly an integer linear programming problem with Boolean variables was built. Classic optimization methods such as the Land and Doig method can be used to solve this problem. Obtained modification of this method significantly increased the speed of solving this problem. An example of how to solve a practical problem by using a Land and Doig method modification is an illustration of how to use the proposed methods. In this paper, it is analytically substantiated and verified by numerical experimentation, which showed that applying the Land and Doig method modification significantly speeds up the solution of the task compared to the classic professional libraries. The use of parallel computations in modifications of the Land and Doig method increased its speed by almost 60 %. The correctness of the boundary-value problems given in the work follows from the a priori estimates obtained by the authors in negative norms. The results of the work easily apply to systems with point or impulse action.

**Keywords:** optimization, linear operator, goal function.

1. Chopade R.P., Mishra S.C., Mahanta P., Maruyama S. Effects of locations of a 3-D design object in a 3-D radiant furnace for prescribed uniform thermal conditions. *Applied Thermal Engineering*. 2011. **31**, N 16. P. 3262–3274.
2. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 6. P.1–11. DOI:10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.10.
3. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Onotskyi V.V., Lyashko N.I. Optimal control of drug delivery from microneedle systems. *Cybern. Syst. Anal.* 2018. **54**, N 3. P. 1–9.
4. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2019. **754**. P. 194–203.
5. Lankelma J., Luque R.F., Dekker H., Schinkel W., Pinedo H.M. A mathematical model of drug transport in human breast cancer. *Microvasc. Res.* 1999. **59**. P. 149–161.
6. Ward J.P., King J.R. Mathematical modelling of drug transport in tumor multicell spheroids and monolayer cultures. *Math. Biosciences*. 2003. **181**, N 2. P. 177–207.
7. Tzafirri A.R., Lerner E.I., Flashner–Barak M., Hinchckiffe M., Ratner E., Parnas H. Mathematical modeling and optimization of drug delivery from intratumorally injected microspheres. *Clinical Cancer Research*. 2005. **11**. P. 8260–834.
8. Baxter L.T., Jain R.K. Transport of fluid and macromolecules in tumors. III. Role of binding and metabolism *Microvasc. Res.* 1991. **41**. P. 5–23.
9. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Tymoshenko A.A., Lyashko N.I., Bondar E.S. Optimal control of intensity of water point sources in unsaturated porous medium. *Journal of Automation*. 2019. N 7. P. 24–33.
10. Communar G., Friedman S. Unsteady infiltration from point and line sources in laterally confined domains. *Soil Science Society of America Journal*. 2013. **77**. N 5. P. 1529–1541.

11. Communar G., Friedman S. Generalized coupled source–sink model for evaluating transient water uptake in trickle irrigation: I. model formulation for soils with vertical heterogeneity. *Soil Science Society of America Journal*. 2012. **76**(3). P. 779–790.
12. Friedman S.P., Gamliel A. Wetting patterns and relative water–uptake rates from a ring–shaped water source. *Soil Science Society of America Journal*. 2019. **83**(1). P. 48–57.
13. Hayek M. An analytical model for steady vertical flux through unsaturated soils with special hydraulic properties. *Journal of Hydrology*. 2015. **527**. P. 1153–1160.
14. Vereecken, H. et al. Modeling soil processes: review, key challenges, and new perspectives. *Vadose Zone Journal*. 2016. **15**(5). P. 1–57.
15. Paniconi C., Putti M. Physically based modeling in catchment hydrology at 50: Survey and outlook. *Water Resources Research*. 2015. **51** (9). P. 7090–7129.
16. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age — structured contamination sources in ground water. *Optimal control of age — structured populations in economy, demography, and the environment* (ed. By R. Boucek et al.). London and New York : Routledge, 2013. P. 277–292.
17. Lyashko, S.I. Klyushin, D.A. Pavlychko, V.V. Model-based analysis of biological tissue heating by point ultrasound sources. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. **42**(2). P. 44–50.
18. Воронина Т.А. Определение начальной формы волны цунами по данным о колебаниях уровня свободной поверхности. <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/41454/48773/ВоронинаТ.А.pdf> свободный.
19. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування. К.: Мінбуд України, ДБН В.1.2-2:2006. 78 с.
20. Стоян Ю.Г., Пуятин В.П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей, 1988. Киев: *Наук. думка*. 192 р.
21. Диденко В.П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. *ДАН СССР*. 1972. **205**. № 4. С. 763–766.
22. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Sergienko T.I. Trajectory and terminal controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. *Cybernet. Systems Anal.* **37**. 2001, N 5. P. 756–763.
23. Lyashko S.I., Semenov. V.V. On the controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernet. Systems Anal.* 2001. **37**. N 1. P.13–32.
24. Lyashko S.I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameter. Kluwer Academic Publishers, 2002. 465 p.
25. Растринин Л.А. Системы экстремального управления. М. : *Наука*, 1974. 630 с.
26. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев : *Наук. думка*, 1986. 268 с.
27. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рошин В.А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. Киев : *Наук. думка*, 1980. 272 с.
28. Yaremchuk S.I., Burda P.V., Matuschenko S.S. Algorithm to solve a discrete minimax problem of the arrangement of physical field sources. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. **45**(5). P. 808–817.
29. Yaremchuk, S., Burda, R., Morgalyuk, O. The minimax problem solving of physical fields sources allocation in specified positions. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2010. **36**(C). P. 599–606.
30. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М.: Из-во иностр. л-ры, 1963. 175с.
31. A.H. Land and A.G. Doig An automatic method of solving discrete programming problems». *Econometrica*. 1960. **28** (3). P. 497–520.
32. Ortega A (2002) Air cooling of electronics: a personal perspective 1981–2001, presentation material, IEEE SMITHERM Symp.
33. <https://www.comsol.com/material-library>, accessed 01 February 2019.
34. Li K. Energy efficient scheduling of parallel tasks on multiprocessor computers. *J Supercomput.* 2012. **60**. 223 p.
35. Li M, Yao AC, Yao F.F. (2006) Discrete and continuous min-energy schedules for variable voltage processors. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2006. **103**(11). P. 3983–3987.
36. Wang L, von Laszewski G et al. Towards energy aware scheduling for precedence constrained parallel tasks in a cluster with DVFS. *Proc. of the 10th IEEE/ACM Int. Conf. on Cluster, Cloud and Grid Computing*. 2010. P. 368–377.
37. Lyashko S.I. Numerical solution of pseudoparabolic equations. *Cybernet. Systems Anal.* 1995. **31**, N 5. P. 718–722. DOI: 10.1007/BF02366321.
38. Lyashko S.I. Approximate solution of equations of pseudoparabolic type *Comput. Math. Math. Phys.* 1991. **31**, N 12. P. 107–111.

Получено 13.02.2020