УДК 517.988

Я.И. Ведель, Е.Н. Голубева, В.В. Семенов, Л.М. Чабак

АДАПТИВНЫЙ ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АДАМАРА*

Ключевые слова: пространство Адамара, задача о равновесии, псевдомонотонность, экстрапроксимальный алгоритм, адаптивность, сходимость.

Введение

Одним из популярных направлений современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) вида [1–13]:

$$\text{найти } x \in C:\ F(x, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C\,, \tag{1}$$

где C — непустое подмножество гильбертова пространства H, $F : C \times C \to \mathrm{R}$ — функция, такая, что $F(x, x) = 0 \quad \forall\, x \in C$ (называемая бифункцией). В виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи. Приведем три типичные формулировки [1, 4].

1. Если $F(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, где $\varphi : C \to \mathrm{R}$, то задача (1) является задачей условной минимизации $\varphi \to \min\limits_C$.

2. Если $F(x, y) = (Ax, y - x)$, где $A : C \to H$, то задача (1) сводится к классическому вариационному неравенству

$$\text{найти } x \in C:\ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall\, y \in C\,.$$

3. Пусть I — конечное множество индексов. Для каждого $i \in I$ заданы множество C_i и функция $\varphi_i : C \to \mathrm{R}$, где $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ обозначим $x^i = (x_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$. Точку $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in C$ называют равновесием Нэша, если для всех $i \in I$ выполняются неравенства $\varphi_i(\bar{x}) \leq \varphi_i(\bar{x}_i, y_i) \quad \forall\, y_i \in C_i$. Определим функцию $F : C \times C \to \mathrm{R}$ следующим образом:

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x^i, y_i) - \varphi_i(x))\,.$$

Точка $\bar{x} \in C$ — равновесие Нэша, если и только если она является решением задачи (1).

Исследование алгоритмов решения равновесных и близких задач активно продолжается. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства [14, 15]. Для их решения Г.М. Корпелевич предложила экстраградиент-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер госрегистрации 0219U008403) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», номер госрегистрации 0119U101608).

ный метод [16]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [17]. Данный метод можно проинтерпретировать как вариант экстра-
градиентного метода с проектированием, понимаемым в смысле расхождения Брэгмана. В [18–20] предложены адаптивные модификации проксимального зеркального метода, не требующие знания констант Липшица операторов для определения величины шага. Аналогам экстраградиентного метода для задач о равновесии и вопросам по данной тематике посвящены работы [5, 7, 8, 21–25].

Следуя А.С. Антипину, экстрапроксимальным будем называть следующий аналог экстраградиентного метода для задач о равновесии [2, 5]:

$$\begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in (0, +\infty)$, prox_φ — проксимальный оператор функции φ.

В 1980 г. Л.Д. Попов [26] предложил для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве, интересную модификацию метода Эрроу–Гурвица. В [9] для решения задач о равновесии в гильбертовом пространстве предложен двухэтапный проксимальный алгоритм вида

$$\begin{cases} y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in (0, +\infty)$, являющийся адаптацией метода Л.Д. Попова к общим задачам равновесного программирования (см. также [10, 27, 28]).

В последнее время возник обусловленный проблемами математической биологии и машинного обучения интерес к построению теории и алгоритмов решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара [29] (также известных под названием $CAT(0)$ пространств). Еще одной сильной мотивацией для изучения данных задач является возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде выпуклых (точнее, геодезически выпуклых) в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [11, 29].

Некоторые авторы начали изучать задачи о равновесии в пространствах Адамара [11–13]. В работе [11] получены теоремы существования для задач о равновесии на многообразиях Адамара, рассмотрены приложения к вариационным неравенствам и обоснован резольвентный метод для аппроксимации решений задач о равновесии и вариационных неравенств. В [12] для более общих задач о равновесии с псевдомонотонными бифункциями в пространствах Адамара получены теоремы существования и предложен проксимальный алгоритм и доказана его сходимость. Более конструктивному подходу посвящена работа [13], авторы которой, отталкиваясь от результатов статьи [5], предложили и обосновали для псевдомонотонных задач о равновесии в пространствах Адамара аналог экстраградиентного (или экстрапроксимального) метода.

В данной работе, продолжающей [18, 25], предлагается новый адаптивный экстрапроксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага [2, 5, 13, 17, 19, 20, 23, 24] в предлагаемом алгоритме не произво-

ISSN 0572-2691

дится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости (или Δ-сходимости) порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании фейеровского свойства алгоритма относительно множества решений задачи. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

Вспомогательные сведения

Приведем несколько понятий и фактов, связанных с метрическими пространствами Адамара (подробнее см. в [29–31]).

Пусть (X, d) — метрическое пространство и x, $y \in X$. Геодезическим путем, соединяющим точки x и y, называют изометрию $\gamma : [0, d(x, y)] \to X$ такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множество $\gamma([0, d(x, y)]) \subseteq X$ обозначают $[x, y]$ и называют геодезическим сегментом с концами x и y (или просто геодезическим). Метрическое пространство (X, d) называют геодезическим пространством, если любые две точки X можно соединить геодезическим, и однозначно геодезическим пространством, если для любых двух точек X существует только одна геодезическая их соединяющая.

Геодезическое пространство (X, d) называют $CAT(0)$-пространством, если для любой тройки точек y_0, y_1, $y_2 \in X$ таких, что $d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2)$, выполняется неравенство

$$d^2(x, y_0) \leq \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_2) \quad \forall x \in X . \tag{2}$$

Неравенство (2) называют CN-неравенством [30] (в евклидовом пространстве (2) превращается в тождество), а точку y_0 — серединой между точками y_1 и y_2 (она всегда существует в геодезическом пространстве).

Известно, что $CAT(0)$-пространство является однозначно геодезическим [29].

Для двух точек x и y $CAT(0)$-пространства (X, d) и $t \in [0, 1]$ будем обозначать $tx \oplus (1-t)y$ такую единственную точку z сегмента $[x, y]$, что $d(z, x) = (1-t) d(x, y)$ и $d(z, y) = td(x, y)$. Множество $C \subseteq X$ называется выпуклым (геодезически выпуклым), если для всех x, $y \in C$ и $t \in [0, 1]$ выполняется $tx \oplus (1-t)y \in C$.

Полезным инструментом для работы в $CAT(0)$-пространстве (X, d) служит неравенство

$$d^2(tx \oplus (1-t)y, z) \leq td^2(x, z) + (1-t)d^2(y, z) - t(1-t)d^2(x, y) ,$$

$$\{x, y, z\} \in X , \; t \in [0, 1] . \tag{3}$$

Важными примерами $CAT(0)$ пространств являются евклидовы пространства, R-деревья, многообразия Адамара (полные связные римановы многообразия неположительной кривизны) и гильбертов шар с гиперболической метрикой [29–31].

Полное $CAT(0)$-пространство называют пространством Адамара.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и (x_n) — ограниченная последовательность элементов X. Пусть $r(x,(x_n)) = \overline{\lim_{n\to\infty}} d(x, x_n)$. Число $r((x_n)) = = \inf_{x\in X} r(x,(x_n))$ называют асимптотическим радиусом (x_n), а множество $A((x_n)) = \{x \in X : r(x,(x_n)) = r((x_n))\}$ — асимптотическим центром (x_n). Известно, что в пространстве Адамара $A((x_n))$ состоит из одной точки [29].

Последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X, d) слабо сходится (или, как иногда говорят, Δ-сходится [30]) к элементу $x \in X$, если $A((x_{n_k})) = \{x\}$ для любой подпоследовательности (x_{n_k}). Известно, что произвольная последовательность элементов ограниченного, замкнутого и выпуклого подмножества K пространства Адамара имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из K [29, 30].

При доказательстве слабой сходимости последовательностей элементов пространства Адамара полезен известный аналог леммы Опяла.

Лемма 1 [29, p. 60]. Пусть последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X, d) слабо сходится к элементу $x \in X$. Тогда для всех $y \in X \setminus \{x\}$ имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} d(x_n, x) < \underline{\lim_{n\to\infty}} d(x_n, y).$$

Пусть (X, d) — пространство Адамара. Функция $\varphi : X \to \overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ называется выпуклой (геодезически выпуклой), если для всех x, $y \in X$ и $t \in [0, 1]$ выполняется

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Например, в пространстве Адамара функции $y \mapsto d(y, x)$ выпуклы. Если же существует такая константа $\mu > 0$, что для всех x, $y \in X$ и $t \in [0, 1]$ выполняется

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t)d^2(x, y),$$

то функция φ называется сильно выпуклой. Известно, что для выпуклых функций полунепрерывность снизу и слабая полунепрерывность снизу эквивалентны [29, p. 64], а сильно выпуклая полунепрерывная снизу функция достигает минимума в единственной точке.

Замечание 1. Многие важные для приложений конструкции в пространствах Адамара связаны с точками минимума выпуклых функций [29, 31]. Например, пусть даны набор точек $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ метрического пространства (X, d) и набор положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Барицентром (центром масс, средним Фреше) точек $\{x_i\}$ с весами $\{\alpha_i\}$ называется точка

$$z \in \operatorname{argmin}_{y\in X} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i).$$

В пространстве Адамара функции $y \mapsto d^2(y, x_i)$ сильно выпуклы (следует из неравенства (3)), поэтому функция $y \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i)$ также сильно выпукла. Отсюда следует, что барицентр существует и единственен.

Для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции $\varphi : X \to \overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальный оператор определяется следующим образом [29].

$$\operatorname{prox}_{\varphi} x = \operatorname{argmin}_{y \in X} (\varphi(y) + \tfrac{1}{2} d^2(y, x)) .$$

Поскольку функции $\varphi + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$ сильно выпуклы, то определение проксимального оператора корректно, т.е. для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $\operatorname{prox}_{\varphi} x \in X$.

Перейдем к формулировке задачи о равновесии в пространстве Адамара.

Задача о равновесии в пространстве Адамара

Пусть (X, d) — пространство Адамара. Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq X$ и бифункции $F : C \times C \to \mathrm{R}$ рассмотрим задачу о равновесии (или задачу равновесного программирования [2, 4, 9]):

$$\text{найти } x \in C : \ F(x, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C . \tag{4}$$

Предположим, что выполнены условия:

1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

2) функции $F(x, \cdot) : C \to \mathrm{R}$ выпуклы и полунепрерывны снизу для всех $x \in C$;

3) функции $F(\cdot, y) : C \to \mathrm{R}$ слабо полунепрерывны сверху для всех $y \in C$;

4) бифункция $F : C \times C \to \mathrm{R}$ псевдомонотонна, т.е. для всех x, $y \in C$ из $F(x, y) \geq 0$ следует $F(y, x) \leq 0$.

5) бифункция $F : C \times C \to \mathrm{R}$ липшицевого типа, т.е. существуют две константы $a > 0$, $b > 0$, такие, что

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a d^2(x, z) + b d^2(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in C . \tag{5}$$

Замечание 2. Условие 5) типа липшицевости в евклидовом пространстве введено G. Mastroeni [3].

Рассмотрим дуальную задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C : \ F(y, x) \leq 0 \quad \forall\, y \in C . \tag{6}$$

Множества решений задач (4) и (6) обозначим S и S^*. При выполнении условий 1)–4) имеем $S = S^*$ [12]. Кроме того, множество S^* выпукло и замкнуто.

Далее будем предполагать, что $S \neq \varnothing$.

Адаптивный экстрапроксимальный алгоритм

Для приближенного решения задачи (4) рассмотрим экстрапроксимальный алгоритм с адаптивным выбором величины шага.

Алгоритм 1. Инициализация. Выбираем элемент $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n = \mathrm{argmin}_{y \in C} \left(F(x_n, y) + \tfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

Если $x_n = y_n$, то остановить и $x_n \in S$. Иначе перейти на шаг 2.

Шаг 2. Вычислить

$$x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \mathrm{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \tfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

Шаг 3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если} \quad F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 3. Обоснование правила остановки в алгоритме 1 приведено ниже (см. (11)).

Замечание 4. На каждом шаге алгоритма 1 следует решить две выпуклые задачи с сильно выпуклыми функциями. Предположим возможность их эффективного решения.

В предлагаемом алгоритме параметр λ_{n+1} зависит от расположения точек x_n, y_n, x_{n+1}, значений $F(x_n, x_{n+1})$, $F(x_n, y_n)$ и $F(y_n, x_{n+1})$. Никакая информация о константах a и b из неравенства (5) не используется. Очевидно, что последовательность (λ_n) неубывающая. Также она ограничена снизу числом $\min\left\{ \lambda_1, \dfrac{\tau}{2\max\{a,b\}} \right\}$. Действительно, имеем

$$F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le a d^2(x_n, y_n) + b d^2(x_{n+1}, y_n) \le$$

$$\le \max\{a,b\}(d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)).$$

Для вариационных неравенств в гильбертовом пространстве алгоритм 1 принимает следующий вид.

Алгоритм 2. Инициализация. Выбираем элемент $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$.

Если $x_n = y_n$, то остановить и x_n — решение. Иначе перейти на шаг 2.

Шаг 2. Вычислить

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

Шаг 3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если} \quad (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)} \right\}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

 ISSN 0572-2691

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 5. Алгоритм 2 отличается от изученного в [18, 25] алгоритма правилом выбора параметра λ_{n+1}. В [18, 25] вместо (7) рассматривалось следующее правило:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\dfrac{\|x_n - y_n\|}{\|Ax_n - Ay_n\|}\right\}, & \text{если } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

Сходимость алгоритма

Сначала докажем важное неравенство.

Лемма 2. Для $x \in C$ и $x^+ = \operatorname{prox}_{\lambda F(x,\cdot)}x$, где $\lambda > 0$, имеет место неравенство

$$F(x, x^+) - F(x, y) \leq \frac{1}{2\lambda}(d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y)) \quad \forall y \in C. \tag{8}$$

Доказательство. Из определения $x^+ = \operatorname{argmin}_{y\in C}(F(x, y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y, x))$ следует

$$F(x, x^+) + \frac{1}{2\lambda}d^2(x^+, x) \leq F(x, p) + \frac{1}{2\lambda}d^2(p, x) \quad \forall p \in C. \tag{9}$$

Положив в (9) $p = tx^+ \oplus (1-t)y$, $y \in C$, $t \in (0,1)$, получим

$$F(x, x^+) + \frac{1}{2\lambda}d^2(x^+, x) \leq F(x, tx^+ \oplus (1-t)y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(tx^+ \oplus (1-t)y, x) \leq$$

$$\leq tF(x, x^+) + (1-t)F(x, y) + \frac{1}{2\lambda}(td^2(x^+, x) + (1-t)d^2(y, x) - t(1-t)d^2(x^+, y)).$$

Таким образом,

$$(1-t)F(x, x^+) - (1-t)F(x, y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\lambda}(-(1-t)d^2(x^+, x) + (1-t)d^2(y, x) - t(1-t)d^2(x^+, y)). \tag{10}$$

Сократив в (10) $1-t$ и совершив предельный переход при $t \to 1$, получим (8). ■

Из леммы 2 следует, что для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеют место неравенства

$$F(x_n, y_n) - F(x_n, y) \leq \frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, y_n) - d^2(y_n, y)) \quad \forall y \in C, \tag{11}$$

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, y) \leq \frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, y)) \quad \forall y \in C. \tag{12}$$

Неравенство (11) обосновывает правило остановки алгоритма 1. Действительно, при $x_n = y_n$ из (11) вытекает $-F(x_n, y) \leq 0 \quad \forall y \in C$, т.е. $x_n \in S$.

Замечание 6. На самом деле имеет место эквивалентность: $x \in S \Leftrightarrow x = \operatorname{prox}_{\lambda F(x,\cdot)}x$, $\lambda > 0$.

Докажем важную оценку, связывающую расстояния между порожденными алгоритмом 1 точками и произвольным элементом множества решений S.

Лемма 3. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$d^2(x_{n+1}, z) \le d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n), \quad (13)$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Из псевдомонотонности бифункции F имеем

$$F(y_n, z) \le 0. \quad (14)$$

Из (14) и (12) следует

$$2\lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (15)$$

Из правила вычисления λ_{n+1} получаем оценку

$$F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)). \quad (16)$$

Оценив снизу левую часть (15) с помощью (16), получим

$$2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n)) - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) \le$$

$$\le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (17)$$

Для оценки снизу $2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n))$ в (17) воспользуемся неравенством (11). Имеем

$$d^2(x_n, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, x_n) - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) \le$$

$$\le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (18)$$

Перегруппировав (18), получим (13). ■

Для доказательства сходимости алгоритма 1 нам потребуется элементарная лемма о числовых последовательностях.

Лемма 4. Пусть (a_n), (b_n) — две последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \le a_n - b_n$ для всех $n \in \mathrm{N}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $(b_n) \in \ell_1$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть (X, d) — пространство Адамара, $C \subseteq X$ — непустое, выпуклое, замкнутое множество, для бифункции $F : C \times C \to \mathrm{R}$ выполнены условия 1)–5) и $S \ne \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) слабо сходятся к решению $z \in S$ задачи о равновесии (4), причем

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0.$$

 ISSN 0572-2691

Доказательство. Пусть $z \in S$. Положим $a_n = d(z, x_n)$,

$$b_n = \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n).$$

Неравенство (13) принимает вид $a_{n+1} \le a_n - b_n$.

Поскольку существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то $1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0, 1)$ при $n \to \infty$.

Из леммы 4 можем сделать вывод, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} d^2(z, x_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (d^2(x_{n+1}, y_n) + d^2(y_n, x_n)) < +\infty$.

Отсюда получаем ограниченность последовательности (x_n) и

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in C$. Тогда из (19) следует, что (y_{n_k}) слабо сходится к z. Покажем, что $z \in S$. Имеем

$$Fv(y_{n_k}, y) \ge F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \ge$$

$$\ge F(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, y_{n_k})) -$$

$$- \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \ge \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) -$$

$$- d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, x_{n_k+1})) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, y_{n_k})) -$$

$$- \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \quad \forall y \in C. \tag{20}$$

Совершив предельный переход в (20) с учетом (19) и слабой полунепрерывности сверху функции $F(\cdot, y) : C \to \mathrm{R}$, получим

$$F(z, y) \ge \overline{\lim_{k\to\infty}} F(y_{n_k}, y) \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

т.е. $z \in S$.

Применяя вариант леммы Опяла для пространств Адамара (лемма 1), получаем слабую сходимость последовательности (x_n) к точке $z \in S$. Действительно, рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность (x_{m_k}), слабо сходящаяся к некоторой точке $\bar{z} \in C$ и $\bar{z} \ne z$. Ясно, что $\bar{z} \in S$. Далее, имеем

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z) < \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \bar{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \bar{z}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, \bar{z}) < \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z),$$

что невозможно. Следовательно, (x_n) слабо сходится к $z \in S$. Из (19) следует, что и последовательность (y_n) слабо сходится к $z \in S$. ■

Замечание 7. Как видно из доказательства теоремы 1, для последовательности (x_n), начиная с некоторого номера N, выполняется фейеровское условие относительно множества решений S.

Рассмотрим частный случай задачи о равновесии: вариационное неравенство в гильбертовом пространстве H:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall\, y \in C. \tag{21}$$

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть H — гильбертово пространство, $C \subseteq X$ — непустое, выпуклое, замкнутое множество, оператор $A: C \to H$ псевдомонотонный, липшицевый, секвенциально слабо непрерывный и существуют решения (21). Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n), (y_n) слабо сходятся к решению вариационного неравенства (21), причем $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0$.

Заключение

В данной работе, продолжающей [18, 25], предложен новый адаптивный экстрапроксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в пространствах Адамара. Алгоритм имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$ подбирается адаптивно. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага [2, 5, 13, 17, 19, 20, 23, 24] в предлагаемом алгоритме не проводятся вычисления значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости (Δ-сходимости), порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании фейеровского свойства алгоритма относительно множества решений задачи. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

В одной из ближайших работ планируется представить адаптивный вариант двухэтапного проксимального алгоритма вида

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right). \end{cases}$$

Данный алгоритм для задач в гильбертовом пространстве предложен в работе [9] (см. также [10, 27, 28]). Заметим, что в последнее время вариант этого алгоритма для вариационных неравенств известен в среде специалистов по машинному обучению под названием «Extrapolation from the Past» [32]. Также представляет интерес построение рандомизированнных адаптивных версий алгоритмов.

Я.І. Ведель, К.М. Голубєва, В.В. Семенов, Л.М. Чабак

АДАПТИВНИЙ ЕКСТРАПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

Одним з популярних напрямів сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження задач про рівновагу (нерівностей Кі Фаня, задач рівноважного програмування). У вигляді задачі про рівновагу можна сформулювати задачі математичного програмування, задачі векторної оптимізації, варіаційні нерівності та багато ігрових задач. Класичне формулювання задачі про рівновагу вперше з'явилось в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, а перші загальні алгоритми проксимального типу для розв'язання задач про рівновагу запропонував А.С. Антіпін. Останнім часом виник обумовлений проблемами математичної біології та машинного навчання інтерес до побудови теорії та алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара. Ще однією сильною мотивацією для дослідження даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді опуклих (точніше, геодезично опуклих) в просторі з спеціально підібраною метрикою. У даній роботі розглядаються загальні задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для наближеного розв'язання задач запропоновано та досліджено новий ітераційний адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. На кожному кроці алгоритму слід здійснити послідовну мінімізацію двох спеціальних сильно опуклих функцій. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому алгоритмі не проводиться обчислень значень біфункції в додаткових точках та не потрібне знання інформації про величину ліпшицевих констант біфункції. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу, слабко напівнеперервних зверху по першій змінній, опуклих та напівнеперервних знизу по другій змінній, доведено теорему про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Доведення засноване на використанні фейєрівської властивості алгоритму відносно множини розв'язків задачі про рівновагу. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до варіаційних нерівностей з ліпшицевими, секвенційно слабко неперервними та псевдомонотонними операторами, що діють в гільбертових просторах.

Ключові слова: простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, екстрапроксимальний алгоритм, адаптивність, збіжність.

Ya.I. Vedel, E.N. Golubeva, V.V. Semenov, L.M. Chabak

ADAPTIVE EXTRA-PROXIMAL ALGORITHM FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

One of the most popular areas of modern applied nonlinear analysis is the study of equilibrium problems (Ky Fan inequalities, equilibrium programming problems). In the form of an equilibrium problem, one can formulate mathematical programming problems, vector optimization problems, variational inequalities, and many game theory problems. The classical formulation of the equilibrium problem first appeared in the works of H. Nikaido and K. Isoda, and the first general proximal algorithms for solving equilibrium problems were proposed by A.S. Antipin. Recently, interest has arisen due to the problems of mathematical biology and machine learning to construct the theory and algorithms for solving mathematical programming problems in Hadamard metric spaces. Another strong motivation for studying these problems is the ability to write down some nonconvex problems in the form of convex (more precisely, geodesically convex) in a space with a specially selected metric. In this paper, we consider general equilibrium problems in Hadamard metric spaces. For an approximate solution of problems, a new iterative adaptive extra-proximal algorithm is proposed and studied. At each step of the algorithm, sequential minimization of two special strongly convex functions should be done. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithm does not calculate bifunction values at additional points and does not require knowledge of information on of bi-function's Lipschitz constants. For pseudo-monotone bifunctions of Lipschitz type, weakly upper semicontinuous in the first variable, convex and lower semicontinuous in the second variable, the theorem on weak convergence of sequences generated by the algorithm is proved. The proof is based on the use of the Fejer property of the al-gorithm with respect to the set of solutions of equilibrium problem. It is shown that the proposed algorithm is applicable to variational inequalities with Lipschitz- con-tinuous, sequentially weakly continuous and pseudomonotone operators acting in Hilbert spaces.

Keywords: Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, extra-proximal algorithm, adaptivity, convergence.

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium problems and applications. London: Academic Press, 2019. 419 p.
2. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys*. 1997. **37**. P. 1285–1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044.
3. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. Daniele, P. et al. (eds.) Equilibrium Problems and Variational Models. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. P. 289–298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1.
4. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal*. 2005. **6**. P. 117–136.
5. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*. 2008. **57**. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876.
6. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. **42**. N 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.
7. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. **47**. N 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
8. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the Set of Solutions the Equilibrium Problems. In: Zgurovsky M.Z. and Sadovnichiy V.A. (eds.) continuous and distributed systems. Solid Mechanics and Its Applications, **211**, Springer International Publishing Switzerland, 2014. P. 131–146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10.
9. Lyashko S.I., Semenov V.V. A New two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. Goldengorin B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, 2016. **115**, Springer, Cham, P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
10. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent developments in data science and intelligent analysis of information. ICDSIAI. Advances in Intelligent Systems and Computing, 2018. **836**. 2019. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.
11. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012. **388.** P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001.
12. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041.
13. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. **20**. No. 1. P. 281–297. https://doi.org/ 10.18514/MMN.2019.2361.
14. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their appli-cations. New York: Academic Press, 1980. Russian transl. M. : Mir, 1983. 256 p.

15. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for non-linear diffusion problems in perforated domains. Izvestiya Mathematics. 2005. **69.** N 5. P. 1035–1059. http://dx.doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.
16. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. **12**. N 4. P. 747–756.
17. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim*. 2004. **15**, N 1. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629.
18. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55,** N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.
19. Stonyakin F.S. On the adaptive proximal method for a class of variational inequalities and related problems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2019. **25** N 2. P. 185–197. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-185-197.
20. Stonyakin F.S., Vorontsova E.A., Alkousa M.S. New version of mirror prox for variational inequalities with adaptation to inexactness. In: Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds.) Optimization and applications. OPTIMA 2019. Communications in computer and information science, **1145**. Springer, Cham, 2020. P. 427–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38603-0_31.
21. Semenov V.V. A Strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. **46,** N 5. P. 45-56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40.
22. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**. N 5. P. 741–749. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y.
23. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47.** N 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
24. Semenov V.V. Modified extragradient method with bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**. N 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
25. Denisov S.V., Nomirovskii D. A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**. N 6. P. 12–24. https://doi.org/ 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
26. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1980. **28.** N 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.
27. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**. N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9.
28. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**. N 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.
29. Bacak M. Convex analysis and optimization in hadamard spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.
30. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5.
31. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A course in metric geometry. graduate studies in mathematics. 2001. **33**. Providence: AMS, xiv+415 p.
32. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. *arXiv preprint arXiv:1802.10551*. 2018.

Получено 21.01.2020

Статья представлена к публикации чл.-корр. НАН Украины С.И. Ляшко.