УДК 517.977

А.А. Чикрий

КОНФЛИКТНЫЕ СИТУАЦИИ ПРИ УЧАСТИИ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ. Часть 1. ИЗБЕЖАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, избежание столкновений, теорема Пшеничного, ситуация окружения, задача Понтрягина–Мищенко, метод маневра обхода, уклонение по направлению, метод инвариантных подпространств, строго выпуклый компакт, компакт с гладкой границей, набор Каратеодори

Введение

Работа посвящена обзору исследований, касающихся динамических игровых задач со многими участниками в составе противодействующих сторон. Она состоит из двух частей. В первой рассматривается задача избежания столкновений (уклонения от встречи, убегания), которая была поставлена и решена в линейном случае Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [1–4]. Задача состоит в уклонении траектории конфликтно-управляемого процесса от попадания на заданное терминальное множество на всей полуоси $[0, +\infty)$ из любых начальных состояний. Тем самым условия разрешимости задачи определяют тотальное преимущество стороны, уклоняющей траекторию, и ее называют иногда глобальной задачей Понтрягина–Мищенко. В определенном смысле она двойственна задаче Калмана о полной управляемости, когда из любых начальных состояний траектория может быть приведена на заданное множество. В игровой ситуации говорят о полной конфликтной управляемости [5].

Если речь будет идти об уклонении траектории из заданных начальных состояний, то будем говорить о локальной задаче.

Процесс уклонения может быть реализован при различной информированности игроков. Как правило, это будут ε-стратегии, ε-контрстратегии или позиционные стратегии. Специфика глобальной задачи избежания столкновений состоит в том, что стратегию уклонения достаточно строить лишь в окрестности терминального множества. Это означает, что условия преимущества убегающего можно задавать только на самом множестве, а в окрестности они будут выполнены по непрерывности.

В исходной работе [1] факт уклонения траектории от встречи с терминальным множеством устанавливается с помощью текущей оценки расстояния траектории от множества. В последующих работах используются и другие методики. Имеется ряд идейно различных методов и маневров избежания столкновений. Это, прежде всего, метод маневра обхода [1–4] и его модификации для нелинейных систем [6-9], методы постоянных и переменных направлений [10–13], метод инвариантных подпространств [14, 15], методы, использующие исчисление Микусинского [16, 17], рекурсивные методы [18–20] и др. Между ними существуют глубокие связи и некоторые из упомянутых методов могут быть адаптированы для решения глобальной задачи убегания от группы.

В задаче избежания столкновений обычно рассматривают грубый и тонкий случаи, условия убегания высших порядков и условия убегания от группы. При этом условия уклонения даются либо в форме минимаксных или максиминных неравенств, либо в форме включений для множеств.

При взаимодействии группировок в локальной задаче уклонения от встречи существенную роль играют свойства параметров конфликтно-управляемого процесса — их строгая выпуклость и гладкость границы.

Вторая часть работы — перехват целей, посвящена задаче сближения (преследования) траектории конфликтно-управляемого процесса с терминальным множеством сложной структуры. С каждой из противодействующих сторон могут участвовать группы управляемых объектов. В соответствии с этим рассматриваются задачи группового и поочередного преследования, а также конфликтное взаимодействие группировок.

Идейную основу для исследований составляют метод разрешающих функций и правило экстремального прицеливания. В первом случае с помощью обратных функционалов Минковского и свойств многозначных отображений установлены достаточные, а иногда и необходимые условия сближения, обосновано параллельное преследование и сближение по лучу. При групповом преследовании формализована ситуация окружения, а для поочередного сближения — задачи коммивояжерного типа с использованием окружности Аполлония и параллельного преследования, установлен принцип кратчайшей ломаной.

При наличии фазовых ограничений с учетом окружения решены классические задачи из книги Р. Айзекса [21] «Лев и человек», «Крыса, загнанная в угол», «Патрулирование коридора», «Игра с линией смерти».

При позиционном групповом преследовании, в частности, обосновано сближение по погонной кривой Эйлера, дано обобщение правила экстремального прицеливания Н.Н.Красовского [22] в регулярном случае.

В задаче взаимодействия группировок анонсирован принцип поинтервальной декомпозиции, рассмотрен ряд частных ситуаций и высказана гипотеза об исходе взаимодействия группировок при простых движениях.

Как было сказано ранее, основное внимание уделено игровым задачам с группой участников хотя бы с одной из противодействующих сторон. В свое время подобные задачи Е.Ф. Мищенко назвал (в присутствии А.С. Понтрягина) вершиной теории дифференциальных игр. Однако для лучшего понимания математических конструкций иногда приводятся также схемы методов в случае «один на один». Следует также заметить, что если рассматривать историческую ретроспективу, то имеет место следующее обстоятельство. Методы преследования–убегания одиночных объектов появились раньше, чем была поставлена глобальная задача убегания [1]. В то же время при наличии группировок картина обратная. Так, задача убегания от группы преследователей была поставлена раньше [11], чем появились методы группового преследования [23,24]. Более того, можно с уверенностью утверждать, и об этом далее будет сказано подробнее, что задача убегания от группы послужила толчком к изучению проблемы группового преследования.

Общая постановка задачи

Специфика задачи избежания столкновений состоит еще и в том, что, по существу, нет необходимости находить решение конфликтно-управляемой системы в явном виде. О поведении траекторий можно судить по правой части — вектору скоростей. Поэтому рассмотрим игровую задачу о взаимодействии групп управляемых объектов в самом общем нелинейном случае.

Пусть задан конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z} = f(z,u,v),\ z \in R^n,\ u \in U, v \in V, z(0) = z_0 . \tag{1}$$

Здесь $f(z,u,v)$ — непрерывная по совокупности переменных функция. Непрерывность по z обеспечивает существование локального решения, для единственности решения необходимо выполнение локального условия Липшица. Под решением будем понимать решение по Каратеодори, т.е. абсолютно непрерывную функцию, почти везде удовлетворяющую системе (1). Продолжимость решений на весь полуинтервал обеспечивает условие Филиппова подлинейного роста вектора скоростей

$$\| f(z,u,v) \| \le C(1 + \|z\|),\ z \in R^n, \tag{2}$$

с некоторой положительной постоянной C при любых $u \in U, v \in V,\ U,\ \ V \in K(R^n)$, $K(R^n)$ — совокупность непустых компактов евклидового пространства R^n.

Уточним структуру системы (1) в соответствии с содержанием исходной задачи о конфликтном взаимодействии групп управляемых объектов.

Если в игре участвуют ν преследователей и μ убегающих, то будем считать, что фазовый вектор имеет вид $z = (z_{11}, \ldots, z_{1\mu}, \ldots, z_{\nu 1}, \ldots, z_{\nu\mu})$, где z_{ij} представляет собой пару (x_i, y_j), x_i — состояние i-го преследователя, а y_j — состояние j-го убегающего, $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, \mu$. Вектор скоростей $f(z,u,v) = \{ f_{ij}(z_{ij}, u_i, v_j)\}$, $i = \overline{1,\nu}$, $j = \overline{1,\mu}$, а параметры управления групп $u = (u_1, \ldots, u_\nu)$, $v = (v_1, \ldots, v_\mu)$. Области управлений $U = U_1 \times \ldots \times U_\nu, V = V_1 \times \ldots \times V_\mu$, а пространство R^n является прямым произведением пространств $R^{n_{ij}}, i = \overline{1,\nu},\ j = \overline{1,\mu}.$

В качестве допустимых управлений все игроки используют измеримые по Лебегу, далее просто измеримые, функции времени со значениями из соответствующих компактных областей управления.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество, имеющее сложную структуру и состоящее из цилиндрических множеств в $R^{n_{ij}}$:

$$M_{ij}^* = M_{ij}^0 + M_{ij},\ i = 1, \ldots, \nu,\ j = 1, \ldots, \mu, \tag{3}$$

где M_{ij}^0 — линейные подпространства из $R^{n_{ij}}$, а M_{ij} — компакты, принадлежащие ортогональным дополнениям L_{ij} к M_{ij}^0 в $R^{n_{ij}}$.

Содержательно подпространство M_{ij}^0 отражает факт точного совпадения части фазовых координат i-го игрока первой стороны с соответствующими координатами j-го игрока второй противодействующей стороны. В свою очередь, множества M_{ij} в простых ситуациях задают радиус захвата i-м игроком соответствующих координат j-го игрока.

Целью первой стороны является построение такой стратегии, которая позволяет для каждого $j \in \{1, \ldots, \mu\}$ вывести траектории $z_{ij}(t)$ на соответствующие множества M_{ij}^* с некоторыми номерами i (для каждого j номера i, вообще говоря, различны) в конечные моменты времени. Выражаясь простым языком, управляемые объекты первой стороны должны перехватить все цели второй стороны за конечное время.

Стратегическая задача второй стороны — так управлять процессом, чтобы хотя бы для одного $j \in \{1, \ldots, \mu\}$ и для всех $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ $z_{ij}(t) \bar{\in} M_{ij}^*$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Иными словами, хотя бы один из управляемых объектов второй стороны должен уцелеть.

Если это невозможно, то следует максимально оттянуть время перехвата всех целей второй стороны.

Предметом для исследования данной части работы будет задача избежания столкновений в интересах второй стороны.

Информированность и используемые стратегии будут определены при формулировке результатов.

Поскольку работа обзорная, доказательства опущены, иногда указаны идеи, но в любом случае приведены ссылки на соответствующие источники.

Если с одной из противодействующих сторон участвует лишь один игрок, то в обозначениях соответствующий индекс будем опускать. В частности, в задаче «один на один» или в случае убегания одного от группы преследователей.

Проблема избежания столкновений

Поскольку работа [1] была первой и базовой для создания теории избежания столкновений, приведем ее результат, касающийся линейных систем.

Пусть $\nu = 1, \mu = 1$, терминальное множество M^0 — линейное подпространство, задана динамика

$$\dot{z} = Az + u - v, \ \ z \in R^n, \ \ u \in U, U \in K(R^n), \ \ v \in V, \ \ V \in K(R^n).$$

Обозначим через L ортогональное дополнение к M^0 в R^n, будем предполагать, что $\dim L \geq 2$ и пусть π — ортопроектор , действующий из R^n в L.

Условия Понтрягина–Мищенко состоят в следующем. Существует такое целое положительное число k , что множества $\pi A^s U, \pi A^s V, \ s = 1, \ldots, k-1,$ являются точками, а геометрическая разность $\pi A^k V \overset{*}{-} \pi A^k U$ содержит внутренние относительно L точки, причем $\pi A^k V$ является телом в L.

Приведенные условия достаточны для разрешимости глобальной задачи убегания, а соответствующее доказательство основано на оценке снизу текущего расстояния точки $z(t)$ до M^0, причем убегающий в момент t может использовать информацию о $z(t)$ и $u(t)$. При этом маневр уклонения состоит в разведении корней двух полиномов с помощью управлений, стоящих при их старших степенях. Впоследствии этот прием сформулирован в виде леммы о квадратах [3] , маневра уклонения и разгона [9] .

Несколько позже Р.В. Гамкрелидзе заметил, что условия Понтрягина–Мищенко достаточно требовать лишь на некотором двумерном подпространстве W пространства L, что соответствует так называемому, грубому случаю.

Остановимся более подробно на методах, использующих для установления факта уклонения проектирование траекторий на подходящие направления из подпространства L и позволяющие в единой форме минимаксных и максиминных неравенств охватить различную информированность игроков в процессе уклонения.

Пусть $\nu = 1$, $\mu = 1$ и конфликтно-управляемый процесс задается нелинейной системой (1), удовлетворяющей всем оговоренным ранее свойствам, а терминальное множество $M^* = M^0$ является линейным подпространством.

Определим стратегии игроков, учитывая что игровая задача рассматривается в интересах убегающего.

Будем говорить, что задана ε-стратегия убегающего, если для каждого состояния $z, z \in R^n$, определено положительное число $\varepsilon(z)$ и функция $v(t, z)$, $t \in [0, \varepsilon(z)]$, удовлетворяющая условию $v(t) = v(t, z)$ — измеримая функция времени, принимающая значения из множества V.

Если $v(t)$ постоянна при $t \in [0, \varepsilon(z)]$ для всех $z \in R^n$, то говорят о кусочно-постоянной стратегии.

Будем говорить, что ε-контрстратегия убегающего задана, если для каждого $z, z \in R^n$, задано положительное число $\varepsilon(z)$ и функция $v(t, z, u)$, $t \in [0, \varepsilon(z)]$, $u \in U$, удовлетворяющая условию суперпозиционной измеримости: если $u(t)$ измерима, то функция $v(t) = v(t, z, u(t))$ также измерима и принимает значения из множества V.

Как и ранее, L — ортогональное дополнение M^0 в R^n. Пусть W — некоторое подпространство из L, а π_W — ортопроектор, действующий из R^n в W. Образуем последовательность функций $\varphi^{(s)}(z, u, v)$ с помощью рекуррентного соотношения $\varphi^{(s)}(z, u, v) = \nabla_z \varphi^{(s-1)}(z, u, v)\, f(z, u, v)$, $s = 1, 2, \ldots, \varphi^{(0)}(z, u, v) = \pi_W z$, где $\nabla_z \varphi^{(s)}(z, u, v)$ — матрица первых производных от вектор-функции $\varphi^{(s)}(z, u, v)$ по z. Единичную сферу в W обозначим $S_W = \{p : p \in W, \|p\| = 1\}$ и введем многозначное отображение

$$\varphi^{(s)}(z, U, V) = \bigcup_{u \in U,\, v \in V} \varphi^{(s)}(z, u, v), \ \ s = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим условия уклонения от встречи траекторий системы (1) с терминальным множеством M^0 первого порядка, т.е. тот случай, когда о возможности уклонения делается вывод по соотношению ресурсов управления игроков в наименьшей из производных от $\pi_W z$ вдоль траекторий системы (1), которая зависит от параметров управления.

Пусть существует натуральное число k, подпространство $W, W \subset L$, $\dim W \geq 2$, и непрерывная функция $l(z) : l : R^n \to W$ такие, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Образы многозначных отображений $\varphi^{(s)}(z, U, V)$, $i = 1, \ldots, k-1$, состоят из единственных точек $\varphi^{(s)}(z)$, $z \in R^n$, причем функции $\varphi^{(s)}(z)$ дифференцируемы по z.

Это условие содержательно означает, что до некоторого порядка производные от $\pi_W z$ в силу системы (1) не зависят от параметров управления. Оно отражает структуру конфликтно-управляемой динамической системы, ее инерционность. Так, если движения преследователя и убегающего описываются линейными уравнениями второго порядка, их состояние — это геометрические координаты, совпадение которых определяет множество M^0, а управление воздействует на ускорение, то $k=2$. Подобная ситуация имеет место, например, в контрольном примере Л.С. Понтрягина [4].

Нижеследующие условия задают определенное преимущество убегающего над преследователем в минимаксной или максиминной форме.

Условие 2. Для всех $z \in M^0$ справедливо неравенство

$$\min_{p \in S_W} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, \varphi^{(k)}(z,u,v) + l(z)) > 0 . \qquad (4)$$

Условие 3. Для всех $z \in M^0$ имеет место

$$\gamma(z) = \min_{p \in S_W} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, \varphi^{(k)}(z,u,v) + l(z)) > 0 . \qquad (5)$$

Последнее неравенство (5) эквивалентно включению для многозначных отображений

$$l(z) + \gamma(z) co S_W \subset \bigcup_{u \in U} co \varphi^{(k)}(z,u,V) ,$$

где co — овыпукление множества.

Заметим также, что экстремумы в соотношениях (4), (5) достигаются, так как в силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса выполнены условия теоремы Вейерштрасса и необходимая непрерывность по совокупности переменных имеет место.

Нижеследующие утверждения дают достаточные условия уклонения от встречи в так называемом, грубом случае, когда есть преимущество убегающего на некотором двумерном подпространстве из L .

Теорема 1. Пусть для нелинейного конфликтно-управляемого процесса (1–3) выполнены условия 1 и 2. Тогда задача избежания столкновений разрешима в классе ε-стратегий.

Такой результат содержится, например, в работе [9]. При дополнительном предположении $\dim W > k+1$ ранее достаточные условия избежания столкновений в классе кусочно-постоянных стратегий были получены в [10]. К этому направлению можно отнести работы [11–13].

Теорема 2. Пусть для нелинейного конфликтно-управляемого процесса (1–3) выполнены условия 1 и 3. Тогда задача об избежании столкновений разрешима в классе ε-контрстратегий.

Подавляющее большинство результатов по нелинейной теории избежания столкновений покрывается теоремой 2. При этом используется различная техника, чаще всего метод маневра обхода и его модификации.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на представлении проекции решения нелинейной системы (1) в виде некоторого аналога формулы Тейлора

$$\pi_W z(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!} \varphi^{(i)}(z_o) + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(z(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau , \qquad (6)$$

которое может быть получено с помощью интегрирования по частям системы (1) с учетом условия 1. Это представление, по существу, заменило формулу Коши для квазилинейных систем. Формула (6) получена в работах [10, 25] и явилась толчком к исследованию задачи избежания столкновений для нелинейных систем.

Следует заметить, что грубый случай соответствует ситуации, когда, например, терминальное множество определяется совпадением лишь геометрических координат управляющих объектов. Тонкий же случай предполагает, в частности, совпадение не только геометрических координат, но и скоростей объектов. Существуют даже специальные термины для обозначения этой ситуации, такие как «мягкая посадка» или «причаливание».

Поэтому в плане избежания столкновений появляются дополнительные возможности получить более тонкие условия. Процедура получения достаточных условий избежания столкновений в тонком случае полностью аналогична описанной в грубом случае. Рассмотрим два одномерных подпространства W_1 и W_2 из L и образуем последовательности функций

$$\varphi_r^{(s)}(z,u,v) = \nabla_z \varphi_r^{(s-1)}(z,u,v)\, f(z,u,v),$$

$$\varphi_r^{(0)}(z,u,v) = \pi_{W_r} z,\ s = 1, 2, \dots,\ r = 1, 2,$$

где π_{W_r} — ортопроекторы, действующие из R^n в W_r.

Пусть существуют натуральные числа k_1 и k_2, $k_1 \neq k_2$, одномерные подпространства W_1 и W_2 из L, $W_1 \neq W_2$, и непрерывные скалярные функции $l_r(z): R^n \to W_r$, $r = 1, 2$, такие, что выполнены следующие условия.

Условие 4. Образы многозначных отображений $\varphi_r^{(s)}(z,U,V)$, $s = 1, \dots, k_r - 1$, $r = 1, 2$, состоят из единственных точек $\varphi_r^{(s)}(z)$ при всех $z \in R^n$, причем эти функции дифференцируемы по z.

Условие 5. Для всех $z \in M^0$ справедливы неравенства

$$\min_{p \in S_{W_r}} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, \varphi_r^{(k_r)}(z,u,v) + l_r(z)) > 0,\ r = 1, 2. \quad (7)$$

Условие 6. Для всех $z \in M^0$ справедливы неравенства

$$\min_{p \in S_{W_r}} \min_{u \in U} \max_{v \in V} (p, \varphi_r^{(k_r)}(z,u,v) + l_r(z)) > 0,\ r = 1, 2. \quad (8)$$

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1–3) с $\nu = 1$, $\mu = 1$ и линейного подпространства M^0 в качестве терминального множества выполнены условия 4 и 5. Тогда возможно уклонение от встречи в классе ε-стратегий, если же выполнены условия 4 и 6, — то в классе ε-контрстратегий.

Результаты, касающиеся тонкого случая, содержатся, например, в работе [9]. Отдельного внимания заслуживают условия высших порядков. Когда сравнение ресурсов управления игроков в наименьшей производной от $\pi_W z$, зависящей от параметров управления, не дает преимущества убегающему, то приходится привлекать производные более высоких порядков. Другими словами, условия 2 и 3 не имеют места, но существует некоторое равенство по ресурсам управления. Тогда процедуру построения последовательности $\varphi^{(s)}(z,u,v)$, $s = 1, 2, \dots$, следует продолжить до тех пор, пока не проявится преимущество убегающего в виде некоторых аналогов неравенств (4), (5). В этом случае достаточные условия избежания столкновений называют условиями высших порядков. Подобные результаты на основе маневра обхода содержатся в работах П.Б. Гусятникова, другие результаты с помощью методов уклонения по направлению получены, в частности, в работе [13].

 ISSN 0572-2691

Убегание от группы преследователей. Теорема Пшеничного

Развитие методов избежания столкновений в случае «один на один» стимулировало поиск новых задач, связанных с уклонением от встречи. Первой из таких проблем, попавшей в поле зрения исследователей, оказалась задача об убегании от группы преследователей, главное отличие которой в том, что терминальное множество — объединение линейных подпространств и, следовательно, не является выпуклым.

Автор данной работы в конце 1973 г. сделал доклады в Математическом институте им. В.А. Стеклова и в Московском университете им. М.В. Ломоносова по решению линейной задачи убегания от группы преследователей на основе метода уклонения по направлению, результаты опубликованы в [11]. Была введена функция

$$\omega(n, \nu) = \min_{\|p_i\|=1} \max_{\|v\|=1} \min_{i=1,\dots,\nu} |(p_i, v)|, \quad p_i \in R^n, v \in R^n, \ n \ge 2, \ \nu \ge 2,$$

которая определяет преимущество в ресурсах управления убегающего над каждым из преследователей. Ввиду важности этой функции приведем более точно результат для простых движений.

Динамика группы ν преследователей и убегающего имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \ \|u_i\| \le 1, \ i = 1, \dots, \nu, \ x_i(0) = x_i^0, \ x_i \in R^n,$$

$$\dot{y} = v, \|v\| \le a, \ y(0) = y^0, \ y \in R^n. \tag{9}$$

Поимка i -м преследователем убегающего означает, что $x_i = y$. Оказывается, что при условии $\omega(n, \nu) \cdot a > 1$ прямолинейное движение убегающего в подходящем направлении позволяет уклониться от встречи с преследователями из любых начальных состояний. Заметим, что функция $\omega(n, \nu)$ обладает следующими свойствами:

$$\omega(n, 2) = \sin \pi/2n, \ \ \omega(2, \nu) = \sin \pi/2\nu.$$

Кроме того, $0 < \omega(n, \nu) \le \sin \pi/2\gamma < 1, \ \gamma = \max(n, \nu)$.

Поскольку задача новая, то после упомянутых выступлений последовало развитие во многих направлениях. Так, в работе [26] показано, что в задаче (10) при более сложном маневре убегания с использованием движения по логарифмической спирали достаточно иметь преимущество над каждым из преследователей по скорости ($a > 1$). Развитие подхода последовало, например, в работе [27].

Отметим, что независимо задача убегания от группы преследователей на основе маневра обхода рассматривалась П.Б. Гусятниковым. Оба эти подхода докладывались на Одесской конференции по теории игр в 1974 г.

Однако, по-видимому, наиболее важный шаг после появления функции $\omega(n, \nu)$ был сделан Б.Н. Пшеничным [28].

Положим, $a = 1$ и рассмотрим задачу (9) с точки зрения группы преследователей. В выражении для функции $\omega(n, \nu)$ уберем внешний минимум и модуль, положив $p_i = \dfrac{x_i^0 - y^0}{\|x_i^0 - y^0\|}$, $i = 1, \dots, \nu$. Тогда условие $\max_{\|v\|=1} \min_{i=1,\dots,\nu} (p_i, v) > 0$ эквивалентно включению

$$y^0 \in \operatorname{int} co\{x_1^0, \ldots, x_\nu^0\}, \tag{10}$$

которое означает, что в начальный момент положение убегающего принадлежит внутренности выпуклой оболочки, натянутой на начальные положения убегающих.

Включение (10) назовем окружением по Пшеничному [28]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема Пшеничного. Пусть задана задача группового преследования–убегания (10), причем $a = 1$. Тогда для того, чтобы группа преследователей могла поймать убегающего за конечное время, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено включение (10) для начальных положений игроков.

Процесс группового преследования окруженного убегающего реализуется с помощью стратегии параллельного сближения [29]. Если же начальное положение убегающего лежит на границе или вне выпуклой оболочки, натянутой на начальные положения преследователей, то всегда существует гиперплоскость, вообще говоря, нестрого отделяющая убегающего от группы преследователей, и движение по нормали к этой гиперплоскости в соответствующую сторону обеспечивает убегающему уклонение от встречи с каждым из группы преследователей. Следует заметить, что как функция $\omega(n, \nu)$ стимулировала формализацию окружения по Пшеничному и появление соответствующей теоремы, так и теорема Пшеничного послужила толчком к разработке методов решения локальной (из заданных начальных положений) задачи группового преследования и локальной задачи убегания от группы преследователей.

Далее предлагается один из способов получения достаточных условий разрешимости глобальной задачи избежания столкновений при участии одного убегающего и группы преследователей на основе метода уклонения по направлению [10].

Пусть задана нелинейная дифференциальная игра (1) с терминальным множеством, которое является объединением конечного числа линейных подпространств $M_1^0, \ldots, M_\nu^0$ из R^n. В общей постановке задачи ν преследователей и один убегающий ($\mu = 1$), $M_i^* = M_i^0$, $M_i = 0$, $i = 1, \ldots, \nu$, $R^{n_i} = R^m$, $R^n = \underbrace{R^m \times \ldots \times R^m}_{\nu}$.

Путь L_i — ортогональное дополнение к M_i^0 в R^m; W_i — некоторые подпространства из L_i, а π_i — ортопроектор из R^m в W_i.

По аналогии с предыдущими построениями образуем последовательность функций

$$\varphi_i^{(s)}(z, u, v) = \nabla_z \varphi_i^{(s-1)}(z, u, v) f(z, u, v), \ s = 1, 2, \ldots, \ i = 1, \ldots, \nu, \ \varphi_i^{(0)}(z, u, v) = \pi_i z.$$

Обозначим прямое произведение единичных сфер S_{W_i}, $i = 1, \ldots, \nu$:

$$S^\nu = S_{W_1} \times \ldots \times S_{W_\nu} = \{p : p = (p_1, \ldots, p_\nu), \ p_i \in W_i, \ \|p_i\| = 1\}.$$

По заданному $p \in S^\nu$ из 2ν векторов $\pm p_i$, $i = 1, \ldots, \nu$, образуем наборы по ν векторов $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_\nu)$, где $\hat{p}_i$ равно либо p_i, либо $-p_i$. Обозначим $K(p)$ всю совокупность указанных наборов для $p \in S^\nu$.

Пусть существуют натуральные числа k_i, $i = 1, \ldots, \nu$, линейные подпространства $W_i, W_i \subset L_i$, и непрерывные функции $l_i(z), l_i : R^m \to W_i$, такие, что выполнены следующие условия.

 ISSN 0572-2691

Условие 7. $\dim W_i \geq k_i + 2,\ i = 1, \ldots, \nu$.

Условие 8. Образы многозначных отображений $\varphi_i^{(s)}(z, U, V)$, $s = 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, \ldots, \nu$, состоят из единственных точек $\varphi_i^{(s)}(z)$, $z \in R^n$, а функции $\varphi_i^{(s)}(z)$ дифференцируемы по z.

Условие 9. Имеет место неравенство

$$\min_{p \in S^\nu} \max_{\hat{p} \in K(p)} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \min_{i=1,..,\nu} (\hat{p}_i, \varphi_i^{(k_i)}(z, u, v) + l_i(z)) > 0 \tag{11}$$

либо

$$\min_{p \in S^\nu} \max_{\hat{p} \in K(p)} \max_{v \in V} \max_{u \in U} \min_{i=1,..,\nu} (\hat{p}_i, \varphi_i^{(k_i)}(z, u, v) + l_i(z)) > 0, \tag{12}$$

для всех $z \in \bigcup_{i=1,\ldots,\nu} M_i^0$.

Теорема 4. Пусть в нелинейной задаче убегания от группы преследователей выполнены условия 7, 8 и неравенство (11) условия (9). Тогда возможно убегание в классе кусочно-постоянных ε-стратегий. Если же имеет место лишь неравенство (12) условия (9), то убегание возможно в классе ε-контрстратегий.

Доказательство может быть получено на основе метода убегания по направлению [12], условие 7 допускает ослабление с использованием переменных направлений [13], оно может быть существенно ослаблено до $\dim W_i = 2, i = 1, \ldots, \nu$, в грубом случае с использованием ε-контрстратегий с помощью маневра обхода и его модификаций [7–9], но при этом вместо неравенства (12) следует требовать более жесткое условие преимущества убегающего на подпространствах $W_i, i = 1, \ldots, \nu$.

В иллюстративных примерах грубое преимущество убегающего над каждым из преследователей может быть определено с помощью функции $\omega(n, \nu)$ [11].

Метод инвариантных подпространств

Стремление обеспечить избежание столкновений с минимальными требованиями на параметры конфликтно-управляемого процесса (1–3) привело к одному специальному методу, который называют метод инвариантных подпространств [14, 15]. При некоторых довольно жестких предположениях в случае «один на один» для убегания требуется преимущество убегающего лишь на некотором одномерном подпространстве из L, либо равенство по ресурсам управления в проекции на некоторое конечное число направлений из L-ортогонального дополнения к линейному подпространству M^0.

Обозначим e^{At} фундаментальную матрицу однородной системы $\dot{z} = Az$, A — квадратная матрица порядка n, и положим для процесса (1) $\psi(z, u, v) = f(z, u, v) - Az$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1–3) $\nu = 1$, $\mu = 1$, терминальное множество — линейное подпространство M^0, существует квадратная матрица A, одномерное подпространство W из L, непрерывная строго положительная функция $\sigma(z), \sigma : R^n \to R^1$ и число $\delta > 0$ такие, что $\pi_W A = A\pi_W$ и для всех $z \in M^0 + \delta coS_L$, $\tau \in (0, \sigma(z)]$, справедливо одно из неравенств:

$$\min_{p \in S_W} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, e^{-\tau A}\psi(z, u, v)) > 0, \tag{13}$$

$$\min_{p\in S_W}\ \min_{u\in U}\ \max_{v\in V}\ (p, e^{-\tau A}\psi(z,u,v)) > 0, \tag{14}$$

причем максимум по v в каждом случае достигается на единственном элементе.

Тогда, если выполнено неравенство (13), возможно избежание столкновений в классе позиционных стратегий, а если выполнено неравенство (14) — то в классе позиционных контрстратегий .

Заметим, что условие коммутативности заведомо выполняется, если M^0 — инвариантное подпространство матрицы A. Последнее имеет место, например, если $M^0 = \{0\}$.

Приведем несколько иную форму метода. Для этого обозначим Ψ^s, $s \ge l+1, l = \dim L$, набор векторов $(p_1, \dots, p_s)$, $p_i \in L$, $\|p_i\| = 1$, таких, что их выпуклая оболочка содержит начало координат в качестве внутренней точки. Такой набор векторов называют положительным базисом или набором Каратеодори [23, 24].

Теорема 6. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (1–3), $\nu = 1$, $\mu = 1$, а терминальное множество M^0 — линейное подпространство. При этом существует квадратная матрица A, набор Каратеодори Ψ^s, непрерывная числовая строго положительная функция $\sigma(z)$ и число $\delta > 0$ такие, что $\pi_L A = A\pi_L$ и для всех $z \in M^0 + \delta co S_L$ и $\tau \in (0, \sigma(z)]$ выполняется одно из неравенств:

$$\min_{(p_1,\dots,p_s)\in\Psi^s}\ \max_{v\in V}\ \min_{u\in U}(p_i, e^{-\tau A}\psi(z,u,v)) \ge 0, \tag{15}$$

$$\min_{(p_1,\dots,p_s)\in\Psi^s}\ \min_{u\in U}\ \max_{v\in V}\ (p_i, e^{-\tau A}\psi(z,u,v)) \ge 0, \tag{16}$$

причем максимум по v в каждом случае достигается на единственных элементах.

Тогда если выполнено условие (15), то возможно убегание в классе позиционных стратегий, а если имеет место неравенство (16), — то в классе позиционных контрстратегий.

Заметим, что в квазилинейном случае $(f(z,u,v) = Az + \varphi(u,v))$ условия избежания столкновений упрощаются [14].

Распостраним идеологию метода инвариантных подпространств на случай группы преследователей.

Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (1–3) с $\mu = 1$, ν — конечно. Пространство R^n имеет вид $R^n = R^{n_1} \times \dots \times R^{n_\nu}$. В каждом из R^{n_i} выделено линейное подпространство $M_i^0, M_i = \{0\}$. В R^{n_i} изменяются координаты z_i, $z = (z_1, \dots, z_\nu)$, $f(z,u,v) = \{f_1(z_1,u_1,v), \dots, f_\nu(z_\nu,u_\nu,v)), u = (u_1, \dots, u_\nu)$ — управление группы преследователей, $U = U_1 \times \dots \times U_\nu, U_i$ — компакт из R^{n_i}.

Далее, L_i — ортогональное дополнение к M_i^0 в R^{n_i}, W_i — некоторые подпространства из L_i, а π_i — ортопроектор из R^{n_i} в W_i.

Положим $\psi_i(z_i,u_i,v) = f_i(z_i,u_i,v) - A_i z_i$, $i = 1, \dots, \nu$, где A_i — квадратные матрицы порядка $n_i, e^{A_i t}$ — фундаментальные матрицы однородных систем $\dot z_i = A_i z_i$.

 ISSN 0572-2691

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1–3) с группой ν преследователей и одним убегающим существуют квадратные матрицы A_i, двумерные подпространства W_i из L_i, $i = 1, \ldots, \nu$, непрерывная строго положительная функция $\sigma(z)$ и число $\delta > 0$ такие, что $\pi_i A_i = A_i \pi_i$ и для всех $z, z_i \in M_i^0 + \delta co S_{L_i}$, $\tau \in (0, \sigma(z)]$, имеет место одно из неравенств:

$$\min_{p \in S^\nu} \max_{\hat{p} \in K(p)} \max_{v \in V} \min_{u \in U} \min_{i=1,..,\nu} (\hat{p}_i, e^{-\tau A_i} \psi_i(z_i, u_i, v)) > 0\,, \tag{17}$$

$$\min_{p \in S^\nu} \max_{\hat{p} \in K(p)} \min_{u \in U} \max_{v \in V} \min_{i=1,..,\nu} (\hat{p}_i, \psi_i(z_i, u_i, v)) > 0. \tag{18}$$

Причем максимум по v достигается на единственном элементе.

Тогда в случае (17) возможно избежание столкновений в классе позиционных стратегий, а в случае (18) — в классе позиционных контрстратегий.

Избежание столкновений при взаимодействии группировок управляемых объектов

Рассмотрим игровую задачу, в которой, с одной стороны, участвуют ν преследователей, а с другой — μ убегающих, причем движения игроков линейны, разделены и происходят в $R^{n_{ij}} = R^n$ для всех $i = 1, \ldots, \nu,\ j = 1, \ldots, \mu$. Пусть движение преследователей

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i,\, u_i \in U_i,\, i = 1, \ldots, \nu\,, \tag{19}$$

а динамика убегающих

$$\dot{y}_j = Ay_j + v_j,\, v_j \in V_j,\, j = 1, \ldots, \mu\,, \tag{20}$$

причем в начальный момент $x_i^0 \neq y_j^0$, где $x_i^0 = x_i(0)$, $y_j^0 = y_i(0)$, при всех $i = 1, \ldots, \nu,\ j = 1, \ldots, \mu$.

Здесь A — квадратная матрица порядка n, области управлений игроков U_i, V_j компакты, при этом будем предполагать, что

$$V_j = V,\ j = 1, \ldots, \mu,\ \ U_i \subset coV,\ \ i = 1, \ldots, \nu\,. \tag{21}$$

Под поимкой понимается точное совпадение координат объектов, т.е. i-й преследователь поймал j-го убегающего, если $x_i = y_j$, иначе говоря,

$$M_{ij}^* = M_{ij}^0 = \{(x_i, y_j) : x_i = y_j\}\,. \tag{22}$$

Допустимыми управлениями игроков являются измеримые функции времени, при этом убегающие могут использовать информацию о текущей позиции ($x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\mu$).

Задача убегающих — хотя бы одному уцелеть при $t \in [0, +\infty)$.

Для точной формулировки результатов определим понятия строго выпуклого компакта и компакта с гладкой границей [23].

Для произвольного компакта X из R^n стандартным образом введем опорную функцию [30]

$$C(X; p) = \max_{x \in X}(x, p),\ \ p \in R^n\,,$$

и опорное множество

$$H(X;\, p) = \{x \in X : (p,\, x) = C(X;\, p)\}, \;\; p \neq 0\,.$$

Если образы отображения $H(X;\, p)$ состоят из единственных точек при любом $p \in R^n$, то говорят, что множество X — строго выпуклый компакт.

Назовем множество X компактом с гладкой границей, если

$$H(X;\, p_1) \cap H(X;\, p_2) = \varnothing \;\; \forall p_1,\, p_2,\, p_1 \neq p_2,\;\; \|p_1\| = \|p_2\| = 1\,.$$

Нижеследующие результаты зависят от соотношений между числами n, ν, μ, а также от свойств границы множества V.

Утверждение 1. Пусть в игре (19), (20), (22) выполнено условие (21), причем множество V является строго выпуклым компактом. Тогда если выполнено хотя бы одно из условий: $\nu \leq n+1, \mu \geq 2;$ $\nu \leq 2n-1, \mu \geq n,$ то разрешима глобальная задача избежания столкновений.

Утверждение 2. Пусть в игре (19), (20), (22) выполнено условие (21), а множество V является строго выпуклым компактом с гладкой границей. Тогда если имеет место хотя бы одно из условий: $\nu \leq n+2, \mu \geq 2;$ $\nu \leq 2n, \mu \geq n,$ то разрешима глобальная задача избежания столкновений.

Из приведенных утверждений вытекают следствия.

Следствие 1. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (19)–(22), причем $\nu = 3, \mu = 2$, а V — строго выпуклый компакт. Тогда разрешима глобальная задача убегания.

Для простых движений с единичными шарами в качестве областей управления этот результат получен в [31].

Следствие 2. Пусть для процесса (19)–(22) $\nu = 4, \mu = 2$, а V — строго выпуклый компакт. Тогда разрешима глобальная задача убегания.

Этот существенно более сложный случай исследован при простых движениях в работе [32].

Отметим отдельно, что при $\nu = 5, \mu = 2$ в случае простых движений на плоскости с единичными шарами в качестве областей управления существует взаимное расположение игроков типа окружения по Пшеничному, при котором оба убегающих могут быть пойманы [31].

Нижеследующее утверждение дает оценку снизу минимального количества убегающих, при котором в игре (19)–(22) с ν преследователями разрешима глобальная задача избежания столкновений независимо от размерности игрового пространства.

Утверждение 3. Пусть в игре (19) — (22) множество V является строго выпуклым компактом с гладкой границей, причем имеют место неравенства $\nu \geq 2, \mu \geq 2[(q+1)2^q + 1], q = [\log_2(\nu - 1)], [\cdot]$ — целая часть числа.

Тогда разрешима глобальная задача избежания столкновений.

Результаты утверждений 1–3 содержатся в работах [35, 36, 23]. В случае простых движений результат утверждения, состоящий в оценке по заданному числу преследователей ν минимального количества убегающих $\mu, \mu = \mu(\nu)$, при котором разрешима глобальная задача убегания, получен в [37]. Там же получены оценки сверху и снизу величины $\mu(\nu)$.

Высказана следующая гипотеза [33]. Для простых движений в R^n с областями управлений — единичными шарами при $\mu = 2, \nu \leq 2n$ — разрешима глобальная задача избежания столкновений.

Для случая $n = 2$ гипотеза подтверждена в [32], а при $n = 3$ — в [34].

Наконец, приведем утверждение для $\mu = 3$, которое не следует из приведенных выше.

Утверждение 4. Пусть в игре (19)–(22) $A = 0, U_i = V_j = V = coS$, $S = \{p : \|p\| = 1\}$, $i = \overline{1, \nu}$, $j = \overline{1, \mu}$.

Тогда, если при $\mu = 3$ выполнено одно из условий: $\nu \le 6, n \ge 2$, $\nu \le 7, n \ge 3$, то разрешима глобальная задача избежания столкновений.

Локальная задача уклонения от встречи группы убегающих от группы преследователей

Рассмотрим игровую задачу (19)–(22) с ν преследователями и μ убегающими, начальное состояние обозначим

$$z^0 = (x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_\nu^0, y_1^0, \ldots, y_\mu^0)$$

и установим локальные условия избежания столкновений на $[0, +\infty)$ в зависимости от расположения игроков в начальный момент.

Пусть G — некоторое непустое подмножество пространства R^n. Положим $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$, $y = (y_1, \ldots, y_\mu)$ и определим множества индексов:

$$I(x, G) = \{i : i \in (1, \ldots, \nu),\ x_i \in G\},$$

$$J(y, G) = \{j : j \in (1, \ldots, \mu), y_j \in G\},$$

причем, если существуют индексы $j_l \in J(y(t), \partial G)$, $l = 1, \ldots, s)$, $s > 1$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$, такие, что $y_{j_1}(t) = y_{j_2}(t) = \ldots = y_{j_s}(t)$, то полагаем $j_l \notin J(y(t), \partial G)$ для $l = 2, \ldots, s$.

Предположим, что G — выпуклый компакт, т.е. $G \in coK(R^n)$. Обозначим $\Psi_j(t)$ решение сопряженной системы $\dot{\Psi} = -A^*\Psi$, соответствующее начальному условию $\Psi_j(0) = p_j$, где p_j — единичный опорный вектор к множеству G в граничной точке y_j^0, $j \in J(y^0, \partial G)$.

Пусть $\left|I(x^0, R^n \setminus G)\right|$, $\left|J(y^0, \partial G)\right|$ — количество элементов соответствующих множеств.

Теорема 8. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (19)–(22). Тогда, если существует такой выпуклый компакт G, что $\left|J(y^0, \partial G)\right| > \left|I(x^0, R^n \setminus G)\right|$ и для любого $j \in J(y^0, \partial G)$ опорная функция $C(V; \Psi_j)$ дифференцируема по Ψ_j вдоль траектории $\Psi_j(t)$ системы (20) для почти всех $t \ge 0$, то для конфликтно-управляемого процесса (19)–(22) из начального состояния z^0 разрешима локальная задача убегания.

Следствие 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (19)–(22) множество V строго выпукло и существует вектор $p, \|p\| = 1$, и индекс $j \in (1, \ldots, \mu)$ такие, что

$$\max_{i-1,\dots,\nu}(p,\, x_i^0 - y_j^0) \le 0\,.$$

Тогда из начального состояния z^0 разрешима локальная задача убегания.

Заметим, что в случае простых движений ($A = 0$) при $\mu = 1$, $U_1 = \ldots = U_\nu = V = coS$ из следствия 3 вытекает известный результат из [28]: если начальное положение убегающего не принадлежит внутренности выпуклой оболочки, натянутой на начальные положения преследователей, то возможно убегание на полубесконечном интервале $[0, \infty)$.

Теорема 9. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (19)–(22), причем V — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Если существуют множества G_1 и G_2 из $coK(R^n)$ такие, что $x_i^0 \in G_1 \bigcup G_2$ для любого $i \in (1, \ldots, \nu)$ и имеет место неравенство

$$\left| I(x^0, G_1 \setminus G_2) \right| < \left| J(y^0, R^n \setminus (G_1 \bigcup G_2)) \right| + \left| J(y^0, \partial G_2) \right|,$$

то из начального состояния z^0 разрешима локальная задача убегания.

Следствие 4. Пусть задан конфликтно-управляемый процесс (19)–(22), причем V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Существуют гиперплоскости

$$H_1 = \{x \in R^n : (p,\, x) = \alpha\}\,,$$

$$H_2 = \{x \in R^n : (p,\, x) = \alpha + \varepsilon,\, \varepsilon > 0\} p \in R^n,\;\; \alpha \in R\,,$$

и множества $I \subset (1, \ldots, \nu)$, $J \subset (1, \ldots, \mu)$ такие, что: $(p,\, x_i^0) \le \alpha, i \in I,\quad (p,\, x_i^0) \ge$ $\ge \alpha + \varepsilon,\;\; i \in (1, \ldots, \nu) \setminus I;\; \alpha < (p,\, y_j^0) < \alpha + \varepsilon,\; j \in J\,,\; |J| > I.$

Тогда из начального состояния z^0 разрешима задача убегания.

В случае простых движений игроков с областями управлений — единичными шарами с центром в нуле — результат следствия содержится в [37].

Об избежании столкновений для объектов, управляемых по ускорению

Рассмотрим конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов, движение которых подчинено второму закону Ньютона:

$$\ddot{x}_i = u_i, \|u_i\| \le 1,\;\; x_i(0) = x_i^0,\, \dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0,\;\; i = 1, \ldots, \nu\,,$$

$$\ddot{y}_j = v_j, \|v_j\| \le 1,\;\; y_j(0) = y_j^0,\, \dot{y}_j(0) = \dot{y}_j^0,\;\; j = 1, \ldots, \mu\,,$$

причем $x_i^0 \ne y_j^0$ при всех $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, \mu$.

Такую динамику называют движением материальных точек [22], или движением крокодилов [21], имея ввиду инерционность объектов. Цель группы убегающих — хотя бы одному избежать поимки ($\exists j\;\; \forall i\;\;\; x_i \ne y_j$). Будем считать, что все игроки движутся в $R^n, n \ge 2$.

Введем переменную $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда получим

$$\ddot{z}_{ij} = u_i - v_j, \|u_i\| \le 1, \|v_j\| \le 1,\;\; z_{ij}(0) = z_{ij}^0\;\;\; \dot{z}_{ij}(0) = \dot{z}_{ij}^0\;\;\; z_{ij}^0 \ne 0,\;\; i = \overline{1, \nu},\; j = \overline{1, \mu}\,.$$

Утверждение 5. Пусть для процесса (23) с $\mu = 1$ выполнено условие $0 \notin co\left[\bigcup_{i=\overline{1,\nu}} \dot{z}_i^0\right]$.

Тогда из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_\nu^0, \dot{z}_1^0, \ldots, \dot{z}_\nu^0)$ разрешима задача избежания столкновений.

Утверждение 6. Пусть для процесса (23) $\nu = 3, \mu = 2$. Тогда для него разрешима глобальная задача убегания.

Утверждения 5 и 6 содержатся в [23].

Многие результаты для процессов более сложной структуры [38–46] могут быть перенесены на ситуацию с группами участников.

Заключение

В первой части обзора по игровым задачам сближения–уклонения с участием групп управляемых объектов рассмотрено состояние проблемы на данный момент, приведены основные результаты, касающиеся методов маневра обхода, убегания по направлению, переменных направлений, а также метода инвариантных подпространств.

Рассмотрены грубый и тонкий случаи в задаче избежания столкновений, условия высших порядков, задача убегания от группы преследователей и при взаимодействии группировок. Ряд общих результатов сформулирован для нелинейных систем, приведены утверждения для многих конкретных линейных задач, учитывая сложность общей проблемы.

Большинство результатов относится к глобальной задаче Понтрягина–Мищенко, а ряд других — к локальной задаче убегания, являясь при этом развитием теоремы Пшеничного.

А.О. Чикрій

КОНФЛІКТНІ СИТУАЦІЇ ЗА УЧАСТЮ ГРУП КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ. Частина 1. УНИКНЕННЯ СУТИЧОК

У першій частині огляду по ігрових задачах зближення–відхилення за участю груп керованих об'єктів розглянуто стан проблеми на даний момент, наведено основні результати, що стосуються методів маневру обходу, втечі за напрямком, змінних напрямків, а також методу інваріантних підпросторів. Розглянуто грубий та тонкий випадки в задачі уникнення сутичок, умови вищих порядків, задача про втечу від групи переслідувачів та при взаємодії угрупувань. Ряд загальних результатів сформульовано для нелінійних систем, наведено твердження для багатьох конкретних лінійних задач, враховуючи складність загальної проблеми. Більшість результатів відноситься до глобальної задачі Понтрягіна–Міщенка, а ряд інших — до локальної задачі про втечу, що є розвитком теореми Пшеничного. Реалізація процесів уникнення сутичок відбувається в класах ε-стратегій, ε-контрстратегій та при позиційній інформації. Основним апаратом для обгрунтування математичних конструкцій є методи нелінійного та опуклого аналізу, теорія многозначних відображень.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, уникнення сутичок, теорема Пшеничного, ситуація оточення, задача Понтрягіна–Міщенка, метод маневру обходу, відхилення за напрямком, метод інваріантних підпросторів. строго опуклий компакт, компакт з гладкою границею, набір Каратеодорі.

A.A. Chikrii

CONFLICT SITUATIONS INVOLVING CONTROLLED OBJECT GROUPS. Part I. COLLISION AVOIDANCE

The article provides an overview of the game problems of pursuit-evasion with the participation of groups of controlled objects. In the first part of the review, the current state of the problem is examined. The main results concerning the methods of maneuvering around, deviation in direction, as well as the method of invariant subspaces, are presented. Rough and subtle cases of the problem of collision avoidance, conditions of higher order are explored. The problem of evasion from a group of pursuers and during interaction of the groups is considered. A number of general results for nonlinear systems are formulated, problem statements are given for many specific linear problems, given the complexity of general problem. Most of the results relate to the global Pontryagin–Mishchenko problem and a number of others relate to the local evasion problem, being a development of the Pshenicnyi theorem. Collision avoidance processes are carried out in the classes of ε-strategies, ε-counterstrategies and under positional information. The main apparatus for substantiating mathematical constructions are the methods of nonlinear and convex analysis, the theory of set-valued mappings.

Key words: conflict-controlled process, collision avoidance, Pshenichnyi theorem, environment situation, Pontryagin–Mishchenko problem, bypass maneuver method, deviation in direction, method of invariant subspaces, strictly convex compact, compact with a smooth border, Caratheodory set.

1. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. *ДАН СССР*. 1969. **189**, № 4. С. 721–723.
2. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. *Дифференциальные уравнения.* 1971. **7**, № 3. С. 436–445.
3. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания. *Тр. МИАН*. 1971. **112**. С. 30–63.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: *Наука*, 1988. **2**. 576 с.
5. Belousov A.A., Chikrii A.A. Complete conflict controllability of quasilinear processes. *Journal of Applied mathematics and Mechanics,* 1990, **54**, N 6. P. 735–744.
6. Пшеничный Б.Н. О задаче убегания. *Кибернетика.* 1975. № 4. С. 120–127.
7. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания *m*-лиц. *Изв. АН СССР, Техн кибернетика*. 1978. № 6. С. 3–14.
8. Гусятников П.Б. Убегание одного нелинейного объекта от нескольких более инертных преследователей. *Дифференциальные уравнения.* 1976. **12**, № 2. С. 1316–1324.
9. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 260 с.
10. Chikrii A.A. Deviation problems in nonlinear differential games. *Cybernetics*, 1975, **11**, N 3. P. 412–415.
11. Chikrii A.A. Linear problem of avoiding several pursuers. *Engineering Cybernetics*, 1976, **14**, N 4, P. 38–42.
12. Chikrii A.A. Sufficient conditions for avoidance in nonlinear differential games between several persons. *Engineering Cybernetics*, 1978, **16**, N 6. P. 8–15.
13. Chikrii A.A. Method of alternating directions in nonlinear differential games of evasion. *Cybernetics*, 1984, **20**, N 1. P. 71–82.
14. Pshenichnyi B. N., Chikrii A.A. Differential game of avoidance. *Engineering Cybernetics*, 1977, **15**, N 1. P. 1–5.
15. Chikrii A.A. Technique for avoiding several pursuers. Automation and remote control, 1978, **39**, N 8. P. 122–126.
16. Gamkrelidze R. V., Kharatishvili G. L. A differential game of evasion with nonlinear control. *SIAM J. Control.* 1974. **12**, N 2. P. 332–349.
17. Никольский М.С. О линейной задаче убегания. *ДАН СССР.* 1974. **218**, № 5. С. 1024–1027.
18. Borovko P., Rzymowski W., Stachura A. Evasion from many pursuers in the simple case. *J. Math. Anal. And Appl.,* 1988. **135**, N 1. P. 75–80.

19. Chodun W. Differential games of evasion with many pursuers. *J. Math. Anal. And Appl*., 1989, **142**, N 2. P. 370–389.
20. Губарев Е.В. Убегание от группы преследователей. *Автоматика*. 1992. № 5. С. 66–70.
21. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
22. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
23. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Springer Science and Busines Media. Dordrecht, Boston; London. 2013. 424 p.
24. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
25. Pshenichnyi B. N., Chikrii A.A. The problem of avoiding contact in differential games. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, **14**, N 6. P. 46–56.
26. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.; Наука, 1978. 280 с.
27. Зак В.Л. Об одной задаче уклонения от многих преследователей. ПММ. 1979. **43**, № 3. С. 57–71.
28. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. Кибернетика. 1976. № 3. С. 115–116.
29. Locke S. Arthur, Guidance. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, 1955. 776 p.
30. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: *Мир*, 1973. 470 с.
31. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих. *ДАН СССР*. 1985. т. **282**, № 5. С.1051–1054.
32. Чикрий А.А., Прокопович П.В. О взаимодействии групп управляемых объектов. *Теория оптимальных решений*. 1987. С. 71–75.
33. Chikrii A.A. Escape Problem for Control Dynamic Objects. *Journal of Automation and Information Sciences*, 1997, **29**, N 6. P. 71–82.
34. Chikrii A.A, Ignatenko A.P. A problem of evasion of two controlled objects from a group of pursuers in the three-dimensional space. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2002, **34**, N 1. P. 1–26.
35. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов. *ПММ*. 1994. **58**, № 4. С. 12–20.
36. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Linear avoidance in the case of interaction of controlled objects group. *Annals of International Society of Dynamic Games, New Trends in Dynamic Games and Applications*, Birkhauser. 1995, **3**. P. 259–269.
37. Петров Н.Н., Петров Н.Н. О дифференциальной игре «казаки-разбойники». *Дифференциальные уравнения.* 1983. **19**, № 8. С.1366–1374.
38. Baranovskaya L.V., Chikrii Al.A. Game problems for a class of hereditaly systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 1997, **29**, N 2. P. 87–97.
39. Chikrii G.T. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, **48**, N 5. P. 12–26.
40. Nakonechnyi A.G., Mashchenko S.O., Chikrii V.K. Motion control under conflict condition. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, **50**, N 1. P. 54–75.
41. Bigun Ya. I., Kryvonos I. Iu., Chikrii Al.A., Chikrii K.A. Group approach under phase constraints. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2014, **46**, N 4. P. 1–8.
42. Pepelyaev V.A., Chikrii Al.A. On the game dynamics problems for nonstationary controlled processes. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2017, **49**, N 3. P.13–23.
43. Kryvonos I. Iu., Chikrii Al.A., Chikrii K.A. On an approach scheme in nonstationary game problems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013, **45**, N 8. P. 32–40.
44. Vlasenko L.A. Existence and uniqueness theorems for an implicit delay differential equations, *Differential Equations*, 2000, **36**, N 5. P. 689–694.
45. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Soblev type, *Differential Equations*, 2011, **47**, N 10. P. 1498–1507.
46. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013, **45**, N 9. P. 65–76.

Получено 04.05.2020