УДК 517.9:519.6

В.М. Булавацкий

ЗАДАЧИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ КОНВЕКТИВНОГО МАССОПЕРЕНОСА И МАССООБМЕНА ПРИ ДВУМЕРНОЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ

Ключевые слова: математическое моделирование, геомиграция, геофильтрация, неклассические модели, задачи конвективного массопереноса и массообмена, дробно-дифференциальная динамика, аналитические решения.

Введение

В связи с проблемами охраны водных ресурсов особую актуальность приобретают вопросы разработки научных методов исследования процессов загрязнения и засоления подземных вод [1–5]. При этом такие задачи, как изучение солевого режима грунтовых вод на орошаемых территориях, анализ условий загрязнения подземных вод в районах водозаборов, проблемы подземного захоронения промышленных и бытовых стоков, а также множество аналогичных задач, требуют для своего эффективного решения учета явлений физико-химического взаимодействия между жидкостью и пористой средой [2, 3, 6–12]. Учет наличия межфазного массообмена является необходимым элементом исследования, поскольку характер межфазного взаимодействия существенно влияет на изменение концентрации растворимых веществ в подземном фильтрационном потоке [2, 3]. В тех случаях, когда миграция водорастворимых веществ осуществляется главным образом за счет конвекции (без учета диффузионной составляющей), в качестве исходных дифференциальных уравнений математической модели миграционного процесса принимают уравнения конвективного массопереноса, дополняя уравнения модели уравнением кинетики массообмена и уравнением геофильтрации [2–4, 7].

В настоящей работе рассматриваются задачи массопереноса при плоской установившейся фильтрации подземных вод в предположении, что для рассматриваемой фильтрационной схемы известно решение задачи фильтрации, т.е. известна характеристическая функция течения

$$z = F(\omega) = F_1(\varphi, \psi) + iF_2(\varphi, \psi) ,$$

где $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал фильтрации, $\varphi = \varphi(x, y)$ — потенциал скорости фильтрации, $\psi = \psi(x, y)$ — функция тока [1, 4, 8]. Процесс массопереноса и массообмена растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации подземных вод, как известно [1, 4, 9, 10, 12], описывается следующей системой уравнений конвективной диффузии и массообмена:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - \vec{\upsilon} \operatorname{grad} C, \tag{1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=f(C,N,C_*,N_*,\gamma_1,\gamma_2)\,, \tag{2}$$

совместно с уравнениями фильтрации

$$\operatorname{div}\vec{\upsilon}=0,\quad \vec{\upsilon}=\operatorname{grad}\varphi\,, \tag{3}$$

где $\vec{\upsilon}$ — вектор скорости фильтрации, $\varphi=-\kappa h$, κ — коэффициент фильтрации [1, 9], h — напорная функция, $C(x,y,t)$, $N(x,y,t)$ — концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах, D — коэффициент конвективной диффузии, f — функция кинетики массобмена, C_*, N_* — равновесные концентрации вещества соответственно в жидкой и твердой фазах, γ_1, γ_2 — константы характеризующие процесс массообмена [2, 3], σ — активная пористость среды [9, 10].

Трудности, возникающие при решении соответствующих краевых задач для рассматриваемой системы уравнений нередко связаны не только с видом уравнений или граничных условий, но и с видом (геометрией) области фильтрации, в которой ищется решение задачи. В случае сложных фильтрационных схем со свободной поверхностью, при наличии замкнутого решения плоско-вертикальной или плановой фильтрационных задач (т.е. когда известна характеристическая функция течения), эффективным подходом при решении соответствующих двумерных краевых задач массопереноса растворимых веществ является переход к новым независимым переменным φ, ψ координатам точек области комплексного потенциала фильтрации [13].

Тогда для исследования задач конвективного $(D\equiv 0)$ массопереноса из (1) получаем уравнение [4–8]

$$\sigma\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial t}=-\upsilon^2(\varphi,\psi)\frac{\partial C}{\partial \varphi},$$

где $\upsilon^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$ — функция, известная из решения соответствующей фильтрационной задачи.

Соотношения (1)–(3) лежат в основе многих математических моделей классической теории процессов массопереноса растворимых веществ в условиях геофильтрации [1, 2, 9, 10]. Отметим, что в рамках указанной теории, с использованием подхода, основанного на идее [13] перехода в область комплексного потенциала фильтрации, к настоящему времени получены решения многих актуальных двумерных краевых задач конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса загрязнений в подземных фильтрационных потоках [4–8, 11, 12, 14–17].

В отличие от этого, в настоящей работе получены решения некоторых двумерных задач конвективного массопереноса и массообмена растворимых веществ при геофильтрации, поставленных в рамках неклассических (дробно-дифференциальных) математических моделей, позволяющих учитывать ряд нелокальных эффектов, в частности эффектов памяти [18, 19].

Предварительные сведения: модифицированная дробная производная Римана–Лиувилля

Предложенная в работах [20, 21] модификация дробной производной Римана–Лиувилля порядка α определяется следующим образом:

$$D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1}\left[f(\xi)-f(0)\right]d\xi & (\alpha<0), \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha}\left[f(\xi)-f(0)\right]d\xi & (0<\alpha<1), \\ D_x^{\alpha-n}(f^{(n)}(x)) & (n\le\alpha<n+1,\ n\ge 1), \end{cases} \tag{4}$$

где $f: R\to R$ — непрерывная на R функция, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [22].

Следующие соотношения [20, 21] определяют некоторые характерные свойства модифицированной дробной производной Римана–Лиувилля:

$$D_x^\alpha\left[f(u(x))\right] = f_u{}' D_x^\alpha u(x)\,, \tag{5}$$

$$D_x^\alpha(u(x)\upsilon(x)) = u(x)D_x^\alpha \upsilon(x) + \upsilon(x)D_x^\alpha u(x)\,, \tag{6}$$

$$D_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}x^{\gamma-\alpha} \qquad (\gamma>0)\,. \tag{7}$$

Преобразование Лапласа $L[\cdot]$ модифицированной дробной производной Римана–Лиувилля вычисляется согласно соотношениям [20, 21]

$$L[D_x^\alpha f(x)] = s^\alpha L[f(x)] - s^{\alpha-1}f(0)\ \ (0<\alpha<1)\,. \tag{8}$$

Дробно-дифференциальная динамика процесса конвективного массопереноса в условиях неравновесной обратимой адсорбции и десорбции

В условиях межфазного массообмена согласно уравнению кинетики, соответствующему наличию неравновесной обратимой адсорбции и десорбции [2, 3], динамику нелокального во времени процесса конвективной диффузии растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации подземных вод, будем описывать (в рамках дробно-дифференциального подхода) следующей системой уравнений:

$$D_t^\alpha(\sigma C + N) = D\Delta C - \vec{\upsilon}\cdot\nabla C\ \ (0<\alpha<1)\,, \tag{9}$$

$$D_t^\alpha N = \gamma_1(\sigma C - \beta N), \tag{10}$$

$$div\,\vec{\upsilon} = 0,\ \ \vec{\upsilon} = \nabla\varphi\,, \tag{11}$$

где $\vec{\upsilon} = \{\upsilon_x, \upsilon_y\}$ — вектор скорости фильтрации, φ — потенциал скорости, D — коэффициент конвективной диффузии, $C(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ — концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах, D_t^α — оператор модифицированной дробной производной Римана–Лиувилля (4) по переменной t порядка α [20, 21], γ_1 — постоянная скорости массообмена, β — коэффициент распределения вещества между фазами в условиях равновесия по

ISSN 0572-2691

линейной изотерме Генри [3], ∇ — оператор Гамильтона, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа [22].

Предположив, что соответствующая фильтрационная краевая задача для (11) решена [1, 4, 9–11], и переходя, аналогично [13], в уравнениях (9), (10) к новым переменным φ, ψ координатам точек геометрически более простой (например, для многих фильтрационных схем из работы [4]) области комплексного потенциала фильтрации, приводим систему уравнений конвективной диффузии и массообмена к виду

$$D_t^{\alpha}(\sigma C + N) = \upsilon^2(\varphi, \psi)\left(D\Delta C(\varphi, \psi, t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi}\right), \qquad (12)$$

$$D_t^{\alpha} N = \gamma_1(\sigma C - \beta N). \qquad (13)$$

В случае изучения дробно-дифференциальной динамики только конвективного массопереноса в условиях массообмена (без учета диффузионной составляющей) из (12), (13) имеем систему уравнений

$$D_t^{\alpha}(\sigma C + N) = -\upsilon^2(\varphi, \psi)\frac{\partial C}{\partial \varphi}, \qquad (14)$$

$$D_t^{\alpha} N = \gamma_1(\sigma C - \beta N). \qquad (15)$$

При исследовании процесса загрязнения подземных вод примем следующие граничные условия:

$$C(0, \psi, t) = C_1(\psi, t), \; N(0, \psi, t) = N_1(\psi, t), \qquad (16)$$

где C_1, N_1 — заданные величины.

От системы уравнений (14), (15) перейдем к одному уравнению относительно концентрации C в жидкой фазе. Подставляя (15) в (14), находим

$$N = \frac{1}{\beta\gamma_1}(\sigma D_t^{\alpha} C + \upsilon^2(\varphi, \psi) C'_{\varphi} + \gamma_1 \sigma C). \qquad (17)$$

Вычисляя на основании (17) $D_t^{\alpha} N$ и подставляя полученный результат в (15), находим искомое уравнение для $C(\varphi, \psi, t)$ в виде

$$\sigma D_t^{\alpha} D_t^{\alpha} C + \upsilon^2(\varphi, \psi) D_t^{\alpha}(C'_{\varphi}) + \gamma_1 \sigma(1+\beta) D_t^{\alpha} C + \beta\gamma_1 \upsilon^2(\varphi, \psi) C'_{\varphi} = 0. \qquad (18)$$

Произведем в (18) замену переменных согласно соотношению

$$\xi = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)}, \qquad (19)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [22].

С учетом (19), свойств модифицированной дробной производной Римана-Лиувилля (5)–(7) и соотношений

$$D_t^{\alpha} C = C'(\xi), \; D_t^{\alpha}(C'_{\varphi}) = -\frac{\sigma}{2\upsilon^2} C''(\xi), \; D_t^{\alpha} D_t^{\alpha} C = C''(\xi)$$

уравнение (18) сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$C''(\xi) + \gamma_1(\beta + 2) C'(\xi) = 0. \qquad (20)$$

Для общего решения уравнения (20) имеем соотношение

$$C(\xi)=\frac{A_1}{\gamma_1(\beta+2)}+A_2 e^{-\gamma_1(\beta+2)\xi}, \qquad (21)$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования.

Тогда из (17) с учетом (21) имеем

$$N(\xi)=\sigma\left(\frac{A_1}{\beta\gamma_1(\beta+2)}-\frac{A_2}{2}e^{-\gamma_1(\beta+2)\xi}\right). \qquad (22)$$

Таким образом, из соотношений (21), (22), с учетом (19), находим

$$C(\varphi,\psi,t)=\frac{A_1}{\gamma_1(\beta+2)}+A_2\exp\left(-\gamma_1(\beta+2)\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right), \qquad (23)$$

$$N(\varphi,\psi,t)=\sigma\left[\frac{A_1}{\beta\gamma_1(\beta+2)}-\frac{A_2}{2}\exp\left(-\gamma_1(\beta+2)\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right)\right]. \qquad (24)$$

Постоянные A_1, A_2 находим из условий (16). В результате имеем

$$A_1=\frac{2\beta\gamma_1}{\sigma}\left[N_1(\psi,t)+\frac{\sigma}{2}C_1(\psi,t)\right], \qquad (25)$$

$$A_2=\frac{2}{\beta+2}\left(C_1(\psi,t)-\frac{\beta}{\sigma}N_1(\psi,t)\right)e^{\gamma_1(\beta+2)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}. \qquad (26)$$

Таким образом, рассматриваемая задача решается соотношениями (23)–(26). Отметим, что в частном случае при $\alpha\to 1$ полученные соотношения дают решение соответствующей задачи конвективного массопереноса в классической постановке [7].

Дробно-дифференциальная динамика конвективного массопереноса при массообмене в соответствии с обобщенным уравнением кинетики ионообменной сорбции

Дробно-дифференциальное обобщение классического уравнения нелинейной кинетики сорбции запишем в виде

$$D_t^{\alpha}N=\gamma(N-N_*)C-\gamma_*(C-C_*)N, \qquad (27)$$

где γ, γ_* — коэффициенты скорости прямой и обратной реакций соответственно, N_* — обменная емкость породы при ее насыщении до равновесной концентрации C_*. В частности, при $\alpha\to 1$ уравнение (27) переходит в известное [2, 3] классическое уравнение кинетики ионообменной сорбции.

Изучение дробно-дифференциальной динамики нелокального во времени процесса конвективного массопереноса растворимых веществ в условиях массообмена согласно (27) сводится к решению системы

$$D_t^{\alpha}(\sigma C+N)=-\upsilon^2(\varphi,\psi)C'_{\varphi}, \qquad (28)$$

$$D_t^{\alpha}N=\gamma(N-N_*)C-\gamma_*(C-C_*)N \qquad (29)$$

при граничных условиях для задачи загрязнения подземных вод в виде (16).

 ISSN 0572-2691

Как и выше, перейдем от системы уравнений (28), (29) к одному уравнению относительно концентрации C . Для этого, выполняя подстановку (29) в (28), находим

$$N = \frac{\nu}{1+\mu C}(\gamma N_* C - \sigma D_t^\alpha C - \upsilon^2(\varphi,\psi)\, C'_\varphi)\,. \tag{30}$$

Отсюда с учетом свойства (5) для модифицированной дробной производной Римана-Лиувилля получаем

$$D_t^\alpha N = \frac{\nu}{1+\mu C}\left(\begin{aligned}&\frac{\gamma N_*}{1+\mu C} D_t^\alpha C + \frac{\mu\sigma}{1+\mu C}(D_t^\alpha C)^2 - \sigma D_t^\alpha D_t^\alpha C + \\ &+ \frac{\mu\upsilon^2(\varphi,\psi)}{1+\mu C} C'_\varphi\, D_t^\alpha C - \upsilon^2(\varphi,\psi) D_t^\alpha (C'_\varphi)\end{aligned}\right), \tag{31}$$

где $\nu = \dfrac{1}{\gamma_* C_*}$, $\mu = \nu(\gamma - \gamma_*)$.

Подставляя соотношение (31) в уравнение (28), находим искомое уравнение для функции концентрации $C(\varphi, \psi, t)$ в виде

$$\begin{aligned}&D_t^\alpha D_t^\alpha C + \frac{\upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma} D_t^\alpha (C'_\varphi) - \frac{\mu}{1+\mu C}(D_t^\alpha C)^2 - \frac{\mu\upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma(1+\mu C)} C'_\varphi\, D_t^\alpha C - \\ &-\left(\frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{\gamma N_*}{\sigma(1+\mu C)}\right) D_t^\alpha C - \frac{(1+\mu C)\upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma\nu} C'_\varphi = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

Производя в уравнении (32) замену переменных согласно (19), имеем

$$C''(\xi) - \frac{\mu}{1+\mu C}(C'(\xi))^2 - \left(\frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{a\mu}{1+\mu C}\right) C'(\xi) = 0\,, \tag{33}$$

или, вводя обозначение $u(C) = C'(\xi)$, получаем из (33) линейное уравнение

$$u'(C) = \frac{\mu}{1+\mu C} u(C) + \frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{a\mu}{1+\mu C}\,, \tag{34}$$

где $a = \dfrac{2\gamma N_*}{\mu\sigma}$.

Общее решение уравнения (34), очевидно, запишется в виде

$$u(C) = C'(\xi) = \left(A_1 + \frac{C}{\nu}\right)(1+\mu C) - a\,, \tag{35}$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя (35) и принимая во внимание (19), получаем

$$C(\varphi,\psi,t) = \frac{\sqrt{\delta(A_1)}}{2}\,\mathrm{cth}\left[-\frac{\sqrt{\delta(A_1)}}{2}\left(\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right) + A_2\right)\right] - \frac{b(A_1)}{2}\,, \tag{36}$$

где $\delta(A_1) = \dfrac{4a\nu}{\mu} + \left(A_1\nu - \dfrac{1}{\mu}\right)^2$, $b(A_1) = A_1\nu + \dfrac{1}{\mu}$, A_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, соотношение (30), с учетом соотношений (35), (19), принимает вид

$$N(\varphi, \psi, t) = \frac{\nu\sigma}{2}\left(a - A_1 - \frac{C(\varphi, \psi, t)}{\nu}\right). \qquad (37)$$

Отсюда с учетом граничных условий (16) имеем

$$A_1 = a - \frac{1}{\nu}\left(C_1(\psi, t) + \frac{2N_1(\psi, t)}{\sigma}\right), \qquad (38)$$

$$A_2 = -\frac{\mu}{\nu}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{2}{\sqrt{\delta(A_1)}}\operatorname{Arcth}\left(\frac{b(A_1) + 2C_1(\psi, t)}{\sqrt{\delta(A_1)}}\right). \qquad (39)$$

Следовательно, решение рассматриваемой задачи (28), (29), (16) дается соотношениями (36)–(39).

Дробно-дифференциальная динамика конвективного массопереноса в условиях растворения и выпадения растворимых веществ в осадок

В случае нелинейной кинетики массообмена, при наличии процессов растворения и выпадения растворимых веществ в осадок, предположим выполнение обобщенного кинетического соотношения вида (объемное засоление среды)

$$D_t^{\alpha} N = -\gamma_1(C_* - C)N^{\frac{1}{2}}, \qquad (40)$$

где γ_1 — постоянная скорости реакции массообмена, C_* — концентрация предельного насыщения, $C(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ — массовые концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах, D_t^{α} — оператор модифицированной [20, 21] дробной производной Римана-Лиувилля по переменной t порядка α $(0 < \alpha < 1)$.

Необходимо отметить, что обобщенное уравнение кинетики массообмена вида (40) при $\alpha \to 1$ обращается в хорошо известное [2, 3] классическое кинетическое уравнение

$$N'_t = -\gamma_1(C_* - C)N^{\frac{1}{2}}.$$

С учетом изложенного изучение дробно-дифференциальной динамики конвективного массопереноса растворимых веществ в рассматриваемых условиях массообмена (загрязнения подземных вод и грунтов) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$D_t^{\alpha}(\sigma C + N) = -\upsilon^2(\varphi, \psi)C'_{\varphi}, \qquad (41)$$

$$D_t^{\alpha} N = -\gamma_1(C_* - C)N^{\frac{1}{2}}, \qquad (42)$$

при граничных условиях (16).

Для отыскания решения рассматриваемой задачи сначала подставим (42) в (41), затем из полученного соотношения определим

$$N^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma_1(C_* - C)}(\sigma D_t^{\alpha} C + \upsilon^2(\varphi, \psi)C'_{\varphi}). \qquad (43)$$

Применение оператора дробной производной D_t^{α} к обеим частям полученного соотношения совместно с дальнейшим использованием (42) приводит к искомому нелинейному относительно функции концентрации C уравнению вида

$$\sigma D_t^\alpha D_t^\alpha C + \upsilon^2(\varphi,\psi) D_t^\alpha (C'_\varphi) - \frac{\sigma}{C - C_*}(D_t^\alpha C)^2 -$$

$$- \frac{\upsilon^2(\varphi,\psi)}{C - C_*} C'_\varphi D_t^\alpha C + \frac{\gamma_1^2}{2}(C - C_*)^2 = 0. \qquad (44)$$

Производя в уравнении (44) замену переменных согласно (19), преобразуем его к виду

$$C''(\xi) - \frac{1}{C - C_*}(C'(\xi))^2 + \frac{\gamma_1^2}{\sigma}(C - C_*)^2 = 0$$

или (понижая порядок уравнения с помощью подстановки $u(C) = C'(\xi)$ [7]) — к виду

$$u(C)u'(C) - \frac{u^2(C)}{C - C_*} + \frac{\gamma_1^2}{\sigma}(C - C_*)^2 = 0\,. \qquad (45)$$

Интегрирование уравнения (45) дает

$$C'(\xi) = u(C) = (C - C_*)\sqrt{A_1 - \frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C}\,, \qquad (46)$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Тогда, интегрируя (46) с учетом (19), находим

$$C(\varphi,\psi,t) = \frac{\sigma}{2\gamma_1^2}\left[A_1 - \left(A_1 - \frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C_*\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, th^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{A_1 - \frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C_*}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)} + A_2\right)\right)\right]. \qquad (47)$$

Принимая во внимание (46), (19), из соотношения (43) получаем выражение для концентрации N вещества в твердой фазе в виде

$$N(\varphi,\psi,t) = \frac{\sigma^2}{4\gamma_1^2}\left(A_1 - \frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C(\varphi,\psi,t)\right). \qquad (48)$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2 находятся из граничных условий (16) и имеют вид

$$A_1 = \frac{2\gamma_1^2}{\sigma}\left(C_1 + \frac{2}{\sigma}N_1\right), \qquad (49)$$

$$A_2 = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sigma}{\gamma_1}\sqrt{\frac{2}{\sigma(C_1 - C_*) + 2N_1}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{\frac{2N_1}{\sigma(C_1 - C_*) + 2N_1}}\,. \qquad (50)$$

Полученные соотношения (47)–(50) дают решение поставленной неклассической задачи конвективного массопереноса с учетом временно́й нелокальности процесса. Отсюда, как частный случай, при $\alpha \to 1$ получаем решение соответствующей задачи массопереноса в рамках классической математической модели (без учета временно́й нелокальности [7]).

Упрощенная математическая модель для исследования аномальной динамики конвективного массопереноса при промывке засоленных земель в условиях массообмена

Запишем исходную систему уравнений математической модели для изучения дробно-дифференциальной динамики конвективного солепереноса в условиях массообмена в виде

$$\sigma D_t^{\alpha} C + D_t^{\eta} N = -\upsilon^2(\varphi, \psi)\frac{\partial C}{\partial \varphi}, \tag{51}$$

$$D_t^{\eta} N = \gamma_1(\sigma C - \beta N), \tag{52}$$

где D_t^{α}, D_t^{η} — операторы модифицированных дробных производных Римана-Лиувилля в смысле Jumarie [20, 21] порядков α и η соответственно $(0 < \alpha, \eta < 1)$.

Изучение динамики нелокального во времени процесса промывки сводится к решению задачи Коши для системы уравнений (51), (52) с условиями

$$C(\varphi, \psi, 0) = C_0, \quad N(\varphi, \psi, 0) = N_0, \tag{53}$$

где C_0, N_0 — заданные значения начальных концентраций в жидкой и твердой фазах соответственно.

Построим вместо модели, определяемой системой дробно-дифференциальных уравнений (51), (52), более простую математическую модель процесса, базирующуюся на системе уравнений в частных производных целого (первого) порядка. Для этого аппроксимируем в формуле (8) преобразования Лапласа дробной производной D_t^{α} множитель s^{α} отрезком ряда Тейлора: $s^{\alpha} \approx \alpha s + 1 - \alpha$. В результате получим

$$L[D_t^{\alpha} u(t)] \approx \alpha L[u'(t)] + (1-\alpha)\left(L[u(t)] - \frac{u(0)}{s}\right) \; (0 < \alpha < 1).$$

Возвращаясь в последнем соотношении в область оригиналов L-преобразования, для модифицированной дробной производной Римана–Лиувилля найдем аппроксимационную формулу вида

$$D_t^{\alpha} u(t) \approx \alpha u'(t) + (1-\alpha)\big(u(t) - u(0)\big) \; (0 < \alpha < 1), \tag{54}$$

справедливую, как показано в [23], и в случае стандартной [18] дробной производной Капуто.

Далее, заменяя в уравнениях (51), (52) производные дробных порядков соответствующими аппроксимационными соотношениями вида (54), получаем упрощенную математическую модель рассматриваемого миграционного процесса, базирующуюся на следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\alpha\sigma C + \eta N\big) + \sigma(1-\alpha)C + (1-\eta)N = b_0 - \upsilon^2(\varphi, \psi)\frac{\partial C}{\partial \varphi}, \tag{55}$$

$$\eta \frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_1 \sigma C - d_0 N + a_0, \tag{56}$$

где $a_0 = (1-\eta)N_0$, $b_0 = a_0 + \sigma(1-\alpha)C_0$, $d_0 = 1 - \eta + \gamma_1\beta$.

Подставляя соотношение (56) в (55), находим

$$N = \frac{1}{1-\eta-d_0}(b_0 - a_0 - \sigma(1-\alpha+\gamma_1)C - \alpha\sigma C_t' - \upsilon^2(\varphi, \psi)C_{\varphi}'). \tag{57}$$

 ISSN 0572-2691

Дифференцируя (57) по переменной t и подставляя полученный результат вместе с соотношением (57) в (56), получаем уравнение относительно концентрации C в жидкой фазе в виде

$$C''_{tt} + \frac{\upsilon^2(\varphi, \psi)}{\alpha\sigma} C''_{\varphi t_\varphi} + a_1 C'_t + \frac{d_0 \upsilon^2(\varphi, \psi)}{\alpha\eta\sigma} C'_\varphi + b_1 C + d_1 = 0\,, \tag{58}$$

где

$$a_1 = \frac{d_0}{\eta} + \frac{1-\alpha-\gamma_1}{\alpha},\ b_1 = \frac{d_0(1-\alpha)+\gamma_1(1-\eta)}{\alpha\eta},\ d_1 = \frac{a_0(1-\eta)-b_0 d_0}{\alpha\eta\sigma}\,.$$

Замена переменных согласно соотношению

$$\xi = t - \frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)} \tag{59}$$

приводит уравнение (58) к виду

$$C''(\xi) + aC'(\xi) + bC(\xi) + d = 0\,, \tag{60}$$

где $a = 2a_1 - \dfrac{d_0}{\eta}$, $b = 2b_1$, $d = 2d_1$.

Общее решение уравнения (60) запишем

$$C(\xi) = A_1 e^{k_1\xi} + A_2 e^{k_2\xi} - \frac{d}{b}\,, \tag{61}$$

где $k_{1,\,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad(\Delta = a^2 - 4b > 0)$, A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, из (61) с учетом (59) для концентрации растворимого вещества в жидкой фазе имеем соотношение

$$C(\varphi, \psi, t) = A_1 \exp\left(k_1\left(t - \frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)}\right)\right) + A_2 \exp\left(k_2\left(t - \frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)}\right)\right) - \frac{d}{b}\,. \tag{62}$$

Далее из соотношения (57) с учетом (62) получаем следующее выражение для концентрации растворимого вещества в твердой фазе:

$$N(\varphi, \psi, t) = \frac{\sigma}{1-\eta-d_0}\left[\frac{b_0 - a_0}{\sigma} + \frac{d}{b}(1-\alpha+\gamma_1) - A_1\left(1-\alpha+\gamma_1+\frac{\alpha k_1}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(k_1\left(t - \frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right) - A_2\left(1-\alpha+\gamma_1+\frac{\alpha k_1}{2}\right)\exp\left(k_2\left(t - \frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right)\right]. \tag{63}$$

Постоянные A_1, A_2 в задаче о промывке засоленных грунтов находятся из начальных условий (53). С учетом (62), (63) отсюда получаем

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\kappa - k_2\left(C_0 + \frac{d}{b}\right)\right]\exp\left(-k_1\frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)}\right).$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[k_1\left(C_0 + \frac{d}{b}\right) - \kappa\right]\exp\left(-k_2\frac{\alpha\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi, \psi)}\right),$$

где $\kappa = \frac{2}{\alpha\sigma}[b_0 - a_0 - \sigma(1-\alpha+\gamma_1)C_0 - (1-\eta-d_0)N_0]$.

Таким образом, подставляя найденные значения A_1, A_2 в соотношения (62), (63), получаем искомое решение задачи о промывке в рамках упрощенной математической модели процесса переноса и массообмена. При этом следует отметить, что аппроксимационные свойства упрощенной математической модели улучшаются по мере приближения значений порядков дробных производных α и η к единице.

Заключение

В натоящей работе получены замкнутые решения некоторых краевых задач динамики конвективного массопереноса и массообмена растворимых веществ при двумерной установившейся фильтрации грунтовых вод, поставленных в рамках нелокальных во времени дробно-дифференциальных математических моделей. В частности рассмотрены задачи:

- дробно-дифференциальной динамики процесса конвективного массопереноса в условиях массообмена в соответствии с обобщенным (дробно-дифференциальным) уравнением неравновесной обратимой адсорбции и десорбции а также при массообмене в соответствии с обобщенным уравнением кинетики ионообменной сорбции;
- дробно-дифференциальной динамики конвективного массопереноса в случае нелинейной кинетики массообмена при наличии процессов растворения и выпадения растворимых веществ в осадок.

Также предложена упрощенная математическая модель для исследования аномальной динамики конвективного массопереноса при промывке засоленных грунтов в условиях массообмена. В отличие от исходной дробно-дифференциальной модели, указанная упрощенная математическая модель базируется (аналогично классическому случаю) на системе двух уравнений в частных производных первого порядка. В рамках упрощенной математической модели получено замкнутое решение простейшей задачи о промывке.

В.М. Булавацький

ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ КОНВЕКТИВНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ТА МАСООБМІНУ ПРИ ДВОВИМІРНІЙ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ

У зв'язку з проблемами охорони водних ресурсів особливої актуальності набувають питання розробки наукових методів дослідження процесів забруднення та засолення підземних вод. Такі задачі, як вивчення сольового режиму грунтових вод на зрошувальних територіях, аналіз умов забруднення підземних вод в районах водозаборів, проблеми підземного захоронення промислових та побутових стоків та інше вимагають для свого ефективного розв'язання врахування явищ фізико-хімічної взаємодії між рідиною та пористим середовищем. Урахування наявності міжфазного масообміну є необхідним елементом дослідження, оскільки характер міжфазної взаємодії суттєво впливає на зміну концентрації розчинних речовин у підземному фільтраційному потоці. У тих випадках, коли міграція водорозчинних речовин здійснюється головним чином за рахунок конвекції, в якості вихідних диференціальних рівнянь математичної моделі міграційного процесу приймають рівняння конвективного масопереносу, доповнюючи рівняння моделі рівняннями кінетики масообміну та рівнянням геофільтрації. У даній роботі одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач динаміки аномального конвективного масопереносу та масообміну розчинних речовин при двовимірній усталеній фільтрації грунтових вод, поставлених в рамках нелокальних у часі дробово-диференційних математичних моделей. Зокрема розглянуто задачі: дробово-диференційної динаміки процесу конвективного масопереносу за умов масообміну у відповідності з узагальненим рівнянням нерівноважної зворотної адсорбції і десорбції, а також при масообміні у відповідності з узагальненим рівнянням кінетики іонообмінної сорбції; дробово-диференційної динаміки конвективного масопереносу у випадку нелінійної кінетики масообміну за наявності процесів розчинення та випадання розчинних речовин в осад. Також запропоновано спрощену математичну модель для дослідження аномальної динаміки конвективного масопереносу при промивці засолених грунтів за умов масообміну, в рамках якої одержано замкнений розв'язок найпростішої задачі промивки.

Ключові слова: математичне моделювання, геоміграція, геофільтрація, некласичні моделі, задачі конвективного масопереносу та масообміну, дробово-диференційна динаміка, аналітичні розв'язки.

V.M. Bulavatsky

PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS OF CONVECTIVE MASS TRANSFER AND MASS EXCHANGE DURING TWO-DIMENSIONAL GEOFILTRATION

The development of scientific methods for studying the processes of pollution and salinization of groundwater is of particular relevance regarding the problems of water resources protection. Problems such as studies of groundwater salt regime in irrigated areas, analyses of groundwater pollution conditions in water intake areas, problems of underground disposal of industrial and domestic wastewater, etc., require effective consideration of the phenomena of physicochemical interaction between a liquid and a porous medium. Taking into account the presence of interphase mass exchange is a necessary element of a study, since the nature of interphase interaction significantly influences the change in the concentration of soluble substances in the underground filtration flow. In cases when the migration of water-soluble substances is carried out mainly due to convection, the mathematical model of the migration process is formed by the differential equations of convective mass transfer supplemented with the equation of mass exchange kinetics and the geofiltration equation. In this paper closed solutions are obtained for some boundary-value problems of the dynamics of anomalous convective mass transfer and mass exchange of soluble substances during two-dimensional steady-state filtration of groundwater posed within the framework of non-local in time fractional-differential mathematical models. In particular, we consider the problems: of fractional-differential dynamics of the process of convective mass transfer under the conditions of mass exchange in accordance with the generalized equation of non-equilibrium reversible adsorption and desorption as well as under the conditions of mass exchange in accordance with the generalized equation of kinetics of ion-exchange sorption; fractional-differential dynamics of convective mass transfer in the case of nonlinear mass exchange kinetics in the presence of dissolution and precipitation of soluble substances. Also, a simplified mathematical model for studying anomalous dynamics of convective mass transfer during the washing of saline soils under the conditions of mass exchange is proposed in the paper and within the framework of this model a closed solution to the simplest washing problem is obtained.

Keywords: mathematical modeling, geomigration, geofiltration, non-classical models, problems of convective mass transfer and mass exchange, fractional-differential dynamics, analytical solutions.

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Веригин Н.Н., Васильев С.В., Саркисян В.С., Шержуков Б.С. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. М.: Недра, 1977. 272 с.
3. Голубев В.С. Динамика геохимических процессов. М.: Недра, 1981. 208 с.
4. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наук. думка, 1990. 376 с.
5. Лаврик В.И., Добрынский В.А., Рогаль И.В. Некоторые математические модели и методы исследования процессов загрязнения подземных вод. *Математика и проблемы водного хазяйства*. Киев: Наук. думка, 1986. С. 100–123.
6. Лаврик В.И., Рудченко П.А. Постановка и решение некоторых краевых задач конвективной диффузии. *Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности*. Киев: Наук. думка, 1977. С. 145–163.
7. Лаврик В.И., Никифорович Н.А. Исследование конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена. Киев, 1982. 46с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; № 82.20).
8. Лаврик В.И., Олейник А.Я. О некоторых математических моделях подземной гидродинамики. *Физико-технические приложения краевых задач.* Киев: Наук.. думка, 1978. С. 76–98.
9. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
10. Мистецкий Г.Е. Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах. Киев: Будівельник, 1985. 136 с.
11. Булавацкий В.М. Специальные краевые задачи подземной гидродинамики. Киев: Наук. думка, 1993. 133 с.
12. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Киев: Наук. думка, 2005. 283с.
13. Нумеров С.Н., Патрашев А.Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений. *Труды Ленингр. политехн. ин-та*. 1947, № 4. С. 165−169.
14. Bohaienko V.O. Numerical schemes for modelling time-fractional dynamics of non-isothermal diffusion in soils. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2019. **157**. P. 100–114.
15. Bulavatsky V.M. Numerical modeling of the dynamics of a convection diffusion process locally non-equilibrium in time. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. **48**, N 6. P. 861–869.
16. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of dynamics of the process of filtration convection diffusion under the condition of time nonlocality. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. **44**, N 2. P.13–22.
17. Bulavatsky V.M. , Bogaenko V.A. Mathematical modeling of the fractional differential dynamics of the relaxation process of convective diffusion under conditions of planned filtration . *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. **51**, N 6. P. 886–895.
18. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
19. Sandev T.,Tomovsky Z. Fractional equations and models.Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
20. Jumarie G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions, further results. C*omput. Math. Appl*. 2006. **51**. P. 1367–1376.
21. Jumarie G. Fractional partial differential equations and modified Riemann- Liouville derivative, new methods for solution. *Journ. Appl. Math. & Computing.* 2007. **24**, N 1–2. P. 31–48.
22. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1965. 831 p.
23. Ahmadian A., Salahshour S., Ali-Akbari M., Ismail F., Baleanu D. A novel approach to approximate fractional derivative with uncertain conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017. **104**. P. 68–76.

Получено 24.02.2020