УДК 519.833+519.6

В.В. Романюк

АДАПТИВНАЯ КОНЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГР

Ключевые слова: непрерывная бескоалиционная игра, одностороннее администрирование, конечная игра, дискретизация множества чистых стратегий, аппроксимация решений, предпочтения администратора.

Проблемы решения непрерывных бескоалиционных игр

Бескоалиционные игры — весьма специфические модели взаимодействия субъектов (игроков), которые обладают определенными сферами интересов и рычагами их управления (предъявления), именуемыми стратегиями (каждого из игроков). Специфичность таких моделей состоит из нескольких составляющих. Во-первых, поскольку взаимодействие субъектов по правилам бескоалиционной игры предполагает отсутствие каких-либо конвенций, существование различных подходов к интерпретации рациональности и способов их реализации порождает соответствующую неопределенность [1, 2]. Во-вторых, даже после согласованного выбора одного из подходов, последний не гарантирует наличия абсолютно равновесного, выгодного и симметричного решения игры [1, 3, 4]. Более того, существование такого или условно близкого к нему решения в смешанных стратегиях порождает вереницу затруднений, связанных с процессом практической реализации этих стратегий и ограничений, накладываемых на длительность этого процесса [1, 5, 6].

Поиск, собственно, решения бескоалиционной игры обременен отсутствием точных алгоритмов даже для случая конечных игр, за исключением биматричных и диадических игр [1, 7]. В случае непрерывных бескоалиционных игр (кроме диадических), аналитический поиск, скажем, ситуаций равновесия в чистых стратегиях, очень сложен. Алгоритмическое обобщение, естественно, возможно лишь в сугубо индивидуальных случаях. Ввиду этого переход к конечным бескоалиционным играм, для которых все же существуют методы нахождения хотя бы приближенных решений [8, 9], не только предпочтителен, но и необходим.

Переход к конечным бескоалиционным играм

Переход от непрерывной бескоалиционной игры к конечной игре осуществляется путем дискретизации игры. Под дискретизацией игры подразумевают разбиения и соответствующие выборки конечных множеств из множеств чистых стратегий всех игроков. Очевидно, эти выборки не могут осуществляться произвольно. Дискретизация игры не должна привести к потере особенностей функции выигрыша каждого из игроков. От таких особенностей, скорее всего, зависят равновесные стратегии. Здесь, вообще говоря, решение конечной игры должно быть достаточно близким (в известном смысле) к решению исходной бесконечной игры [9]. В связи с этим в [10, 11] сформулированы условия корректной, «безвредной», дискретизации бескоалиционных игр, после чего решения исходной и дискретизированной игр практически отождествлялись. В [12] эти условия обобщены на случай неравномерных выборок так, что шаг дискретизации подстраивается индивидуально вдоль каждого измерения. Аппроксимированное таким образом решение получается в три этапа. Сперва функции выигрыша игроков дискретизируются, отображая исходную непрерывную (бесконечную) игру в конечную. Далее дискретизированные функции выигрыша игроков, являющиеся многомерными матрицами, преобразовываются в матрицы, количество измерений которых равно числу игроков (если чистая стратегия игрока имеет более одного измерения). На финальном, третьем, этапе устанавливается, является ли решение конечной игры согласованным, подразумевая его относительную независимость от точек выборок на единичном гиперкубе [11, 12].

Проверка согласованности решения предусматривает ряд очевидных действий, связанных с манипуляцией шагов дискретизации [12]. Во-первых, при минимальном уменьшении шага дискретизации ни спектральные мощности, ни плотности точек с ненулевыми вероятностями их выбора не должны уменьшиться. Во-вторых, согласованное решение подразумевает, что с уменьшением шага дискретизации разброс выигрышей игрока может разве что уменьшиться, а аппроксимирующая спектральное наполнение ломаная гиперповерхность изменяется не больше, чем если бы шаг дискретизации увеличивался. Следовательно, такой подход к дискретизации игр не всегда целесообразен, поскольку здесь хорошему приближению явно противопоставляется скорость получения решения [8]. Поэтому вполне очевидно, что если получение согласованного приближенного решения замедлено, то соответствующий метод его получения практически малопригоден. Особенно это касается моделирования взаимодействия трех и более сторон, чистые стратегии которых имеют два или более измерений.

Однако существует еще один нюанс, суть которого совершенно иная. Он связан не с самой концепцией перехода к конечным бескоалиционным играм, а затрагивает мотивационную составляющую такого перехода. И если еще проблема слишком медленного получения приближенного решения теоретически может быть разрешена за счет распараллеливания вычислений, то мотивационная составляющая накладывает практически непреодолимое ограничение. Следуя правилам недопущения (невозможности) коалиций, основной вопрос состоит в синхронизированном выборе шага (шагов) дискретизации. Как, например, игроки, не имея возможности договориться между собой, смогут выбрать один и тот же шаг? Очевидно, их как-то следовало бы мотивировать, однако механизмы такой мотивации едва ли реализуемы в общем случае. Поэтому и описанный метод перехода к конечным бескоалиционным играм теряет смысл для процессов, в которых субъекты взаимодействия принимают решения независимо и самостоятельно. Тем не менее этот метод вполне пригоден, хотя и теоретически, для систем, в которых решения субъектов вырабатываются на основе конвенций, задаваемых административно (например, со стороны лица, принимающего решения). Примерами таких систем служат балансирование штрафов и поощрений в сфере экономики и экологии [7], распределение производственных мощностей в условиях частичной неопределенности [1], а также другие подобные процессы, регулируемые «сверху» одной заинтересованной стороной (администратором). Администратор заинтересован в выработке наилучших стратегий сразу для всех игроков (например, промышленников, производителей, предпринимателей, работодателей), поскольку именно этот вариант самый благоприятный для устойчивого поддержания и развития экономики, экологии, промышленности. Значит, в таких случаях администратор и будет задавать те шаги дискретизации. Но тогда и приемлемость приближенного решения будет зависить лишь от него. Получается, что администратор в случае предвидения медленного перехода к конечной бескоалиционной игре может его ускорить за счет выбора больших шагов (грубой дискретизации), невзирая на то, что соответствующее приближенное решение окажется несогласованным, имея мало общего с решением исходной игры.

Исходя из описанного ряда практически неразрешимых проблем конечной аппроксимации непрерывных бескоалиционных игр, включая мотивационную составляющую и возможность администрирования, необходимо обосновать более целесообразный метод аппроксимации. Этот метод должен значительно упрощать известный подход к аппроксимации. Для этого следует отказаться от варьирования шагов дискретизации, а также от весьма обременяющих условий приемлемости выполняемой дискретизации, которые затягивают процесс получения приближенного решения. Сначала будет показан принцип дискретизации функций выигрыша игроков, затем — процедура выбора (администратором) приближенного решения.

Дискретизация функций выигрыша игроков с одномерными стратегиями

Пусть дана бескоалиционная игра N игроков, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, в которой действия n-го игрока ограничиваются замкнутым интервалом $[a_n; b_n]$, $b_n > a_n$ $\forall\ n = \overline{1, N}$. В ситуации

$$\{x_i\}_{i=1}^{N} \in \bigtimes_{i=1}^{N} [a_i; b_i] \subset \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

когда n-й игрок выбирает чистую стратегию $x_n \in [a_n; b_n]$, он получает вещественный выигрыш $K_n\left(\{x_i\}_{i=1}^{N}\right)$. Соответственно, кортеж

$$\left\langle \left\{[a_n; b_n]\right\}_{n=1}^{N},\ \left\{K_n\left(\{x_i\}_{i=1}^{N}\right)\right\}_{n=1}^{N} \right\rangle \tag{2}$$

является непрерывной бескоалиционной игрой, в которой каждая из функций $\left\{K_n\left(\{x_i\}_{i=1}^{N}\right)\right\}_{n=1}^{N}$ определена на N-мерном гиперпараллелепипеде

$$\bigtimes_{i=1}^{N} [a_i; b_i] \subset \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

однако эти функции не обязаны быть всюду непрерывными или иметь непрерывные частные производные. Непрерывность здесь и далее относится к области определения функции выигрыша игрока.

Простейшим решением является дискретизация функций выигрыша игроков с помощью равномерного разбиения интервалов $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{N}$. При этом их концы, разумеется, включаются в рассмотрение. Интенсивность разбиения можно усиливать с помощью дихотомизации [13]. Пусть количество одинаковых подынтервалов равно $S = 2^q$, $q = 1, 2, 3, \ldots$, где $x_n^{\langle 1 \rangle} = a_n$, $x_n^{\langle S+1 \rangle} = b_n$. Тогда множество чистых стратегий n-го игрока $[a_n; b_n]$ заменяется на конечное множество, состоящее из $S+1$ его точек:

$$D^{\langle n \rangle}(S) = \{x_n^{\langle s \rangle}\}_{s=1}^{S+1} = \left\{a_n + (s-1) \cdot \frac{b_n - a_n}{S}\right\}_{s=1}^{S+1}\quad \forall\ n = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Таким образом, гиперпараллелепипед (3) заменяется на гиперпараллелепипедную решетку

$$D(S)=\bigtimes_{i=1}^{N} D^{\langle i\rangle}(S)\subset\bigtimes_{i=1}^{N}[a_i\,;b_i]\subset\mathbb{R}^N\,, \tag{5}$$

а бесконечная игра (2) заменяется на конечную игру

$$\left\langle\left\{D^{\langle n\rangle}(S)\right\}_{n=1}^{N},\ \left\{\mathbf{K}_n=[\,p_J^{\langle n\rangle}]_{\mathsf{F}}\right\}_{n=1}^{N}\right\rangle, \tag{6}$$

в которой $\mathbf{K}_n$ является N-мерной матрицей выигрышей n-го игрока. В матрице $\mathbf{K}_n$, формат которой

$$\mathsf{F}=\bigtimes_{r=1}^{N}(S+1)\,,$$

используется N-позиционная индексация

$$J=\{\,j_i\}_{i=1}^{N}\ \text{при}\ \ j_i\in\{\overline{1,\,S+1}\}\,. \tag{7}$$

Индексация (7), в которой индекс j_i указывает на порядковый номер чистой стратегии i-го игрока, позволяет получить значение

$$p_J^{\langle n\rangle}=K_n\left(\{x_i\}_{i=1}^{N}\right)\ \text{при}\ \ x_i=x_i^{\langle j_i\rangle}=a_i+(\,j_i-1)\cdot\frac{b_i-a_i}{S}\,. \tag{8}$$

Администратор, начиная с простейшего разбиения на два подынтервала (при $q=1$), прогрессивно увеличивает их количество $S=2^q$ ($q=1,2,3,\ldots$) до того момента, пока соответствующее приближенное решение, будучи точным решением конечной игры (6) на решетке (5), его не устроит. При этом, скорее всего, такое решение можно найти и в чистых стратегиях. Например, если не удастся найти равновесное по Нэшу решение в чистых стратегиях, то Парето-эффективное решение в чистых стратегиях существует всегда.

Дискретизация функций выигрыша игроков с многомерными стратегиями (обобщенный случай)

В обобщенном случае n-й игрок действует в пределах замкнутого гиперпараллелепипеда, имеющего M_n измерений, $M_n\in\mathbb{N}$. Такое множество чистых стратегий n-го игрока образуется в своем m-м измерении с помощью интервала $[a_{nm}\,;b_{nm}]$, $b_{nm}>a_{nm}$ $\forall\, m=\overline{1,\,M_n}$ и $\forall\, n=\overline{1,\,N}$. В итоге его чистая M_n-мерная стратегия записывается как

$$\mathbf{X}_n=[x_{nm}]_{1\times M_n}\in\bigtimes_{m=1}^{M_n}[a_{nm}\,;b_{nm}]\subset\mathbb{R}^{M_n}\,. \tag{9}$$

В ситуации

$$\mathbf{X}=\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^{N}\in\bigtimes_{i=1}^{N}\bigtimes_{m=1}^{M_n}[a_{nm}\,;b_{nm}]\subset\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{N}M_i}\,, \tag{10}$$

 ISSN 0572-2691

когда n-й игрок выбирает чистую стратегию (9), он получает вещественный выигрыш $K_n(\mathbf{X})$. Соответственно, кортеж

$$\left\langle \left\{ \bigtimes_{m=1}^{M_n} [a_{nm}; b_{nm}] \right\}_{n=1}^{N},\ \{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^{N} \right\rangle \tag{11}$$

является непрерывной бескоалиционной игрой, в которой каждая из функций $\{K_n(\mathbf{X})\}_{n=1}^{N}$ определена на $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} M_i\right)$-мерном гиперпараллелепипеде

$$\bigtimes_{i=1}^{N} \bigtimes_{m=1}^{M_n} [a_{nm}; b_{nm}] \subset \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{N} M_i}. \tag{12}$$

Как и в случае с одномерными чистыми стратегиями игроков, будем осуществлять равномерное разбиение интервалов $\left\{\{[a_{nm}; b_{nm}]\}_{m=1}^{M_n}\right\}_{n=1}^{N}$, включая в рассмотрение их концы. Если количество одинаковых подынтервалов равно $S = 2^q$, $q = 1, 2, 3, \ldots$, где $x_{nm}^{\langle 1 \rangle} = a_{nm}$, $x_{nm}^{\langle S+1 \rangle} = b_{nm}$, то множество чистых стратегий n-го игрока

$$\bigtimes_{m=1}^{M_n} [a_{nm}; b_{nm}] \subset \mathbb{R}^{M_n} \tag{13}$$

заменяется на конечное множество, состоящее из $(S+1)M_n$ его точек:

$$D^{\langle n \rangle}(S) = \bigtimes_{m=1}^{M_n} D_m^{\langle n \rangle}(S) = \bigtimes_{m=1}^{M_n} \left\{ \{x_{nm}^{\langle s \rangle}\}_{s=1}^{S+1} \right\} = \bigtimes_{m=1}^{M_n} \left\{ \left\{ a_{nm} + (s-1) \cdot \frac{b_{nm} - a_{nm}}{S} \right\}_{s=1}^{S+1} \right\}$$
$$\forall\ n = \overline{1, N}. \tag{14}$$

Таким образом, гиперпараллелепипед (12) заменяется на гиперпараллелепипедную решетку

$$D(S) = \bigtimes_{i=1}^{N} D^{\langle i \rangle}(S) \subset \bigtimes_{i=1}^{N} \bigtimes_{m=1}^{M_n} [a_{nm}; b_{nm}] \subset \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{N} M_i}, \tag{15}$$

а бесконечная игра (11) заменяется на конечную игру (6), в которой $\mathbf{K}_n$ является $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} M_i\right)$-мерной матрицей выигрышей n-го игрока. В матрице $\mathbf{K}_n$, формат которой

$$\mathsf{F} = \bigtimes_{i=1}^{N} \bigtimes_{m=1}^{M_i} (S+1),$$

используется $\left(\sum\limits_{i=1}^{N} M_i\right)$-позиционная индексация

$$J = \{j_d\}_{d=1}^{\sum_{i=1}^{N} M_i} \text{ при } j_k \in \{\overline{1, S+1}\} \text{ и } k = m + \sum_{i=1}^{r-1} M_i \ \ \forall\ m = \overline{1, M_r} \text{ и } \forall\ r = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Индексация (16), в которой индексы с порядковыми номерами от $1+\sum_{i=1}^{n-1} M_i$ до $\sum_{i=1}^{n} M_i$ во множестве J соответствуют компонентам чистой стратегии n-го игрока, позволяет получить значение

$$p_J^{\langle n\rangle} = K_n(\mathbf{X}) \text{ при } x_{rm} = x_{rm}^{\langle j_k\rangle} = a_{rm} + (j_k - 1)\cdot \frac{b_{rm} - a_{rm}}{S}. \tag{17}$$

Очевидно, что игра (2) на N-мерном гиперпараллелепипеде (3) является частным случаем игры (11) на $\left(\sum_{i=1}^{N} M_i\right)$-мерном гиперпараллелепипеде (12). Соответственно дискретизация игры (2) и переход к игре (6) на N-мерной гиперпараллелепипедной решетке (5) является частным случаем дискретизации игры (11) и перехода к игре (6) на $\left(\sum_{i=1}^{N} M_i\right)$-мерной гиперпараллелепипедной решетке (15). Как и в случае с одномерными чистыми стратегиями, администратор, начиная с простейшего разбиения на два подынтервала (при $q=1$ в каждом из измерений каждого игрока), прогрессивно увеличивает их количество $S = 2^q$ ($q = 1, 2, 3, \ldots$) в каждом из измерений до того момента, пока соответствующее приближенное решение, будучи точным решением конечной игры (6) на решетке (15), его не устроит. Осуществляемая таким образом аппроксимация непрерывной бескоалиционной игры адаптивна, поскольку одна и та же игровая модель для разных процессов может иметь различные приближенные решения (приемлемость которых устанавливается администратором). Естественно, чем больше количество измерений матрицы выигрышей $\mathbf{K}_n$ в таких конечных играх, тем более приоритетным стает нахождение решения в чистых стратегиях. Очевидно, тогда и значимость Парето-эффективного решения в чистых стратегиях несоизмеримо возрастает.

Численный пример

Рассмотрим конкретный пример адаптивной аппроксимации. Пусть дана бескоалиционная игра двух сторон с функцией выигрыша первого игрока (рис. 1)

$$K_1(x_1, x_2) = x_1 \cos(1{,}5 x_1 x_2) + x_1 x_2\, \mathrm{e}^{-x_1 x_2} \tag{18}$$

и функцией выигрыша второго игрока (рис. 2)

$$K_2(x_1, x_2) = x_2 \sin(x_1) \cos^2(x_2) \tag{19}$$

на замкнутом прямоугольнике

$$[0{,}8; 1{,}7] \times [0{,}2; 3{,}9] \subset \mathbb{R}^2. \tag{20}$$

При увеличении количества подынтервалов S от 2 до 128 эта (биматричная) игра, задаваемая после дискретизации уже на прямоугольной решетке

$$D(S) = D^{\langle 1\rangle}(S) \times D^{\langle 2\rangle}(S) = \left\{0{,}8 + (s-1)\cdot\frac{0{,}9}{S}\right\}_{s=1}^{S+1} \times \left\{0{,}2 + (s-1)\cdot\frac{3{,}7}{S}\right\}_{s=1}^{S+1}, \tag{21}$$

имеет равновесные по Нэшу (квадратики) и Парето-эффективные решения (кружки) в чистых стратегиях (рис. 3) на решетке (21) при постепенном увеличении количества подынтервалов от 2 до 128 ($q = \overline{1,7}$). Суммарный выигрыш игроков в двух первых случаях грубой дискретизации одинаков для равновесного и эффективного решения, а далее такая сумма в эффективных ситуациях превосходит суммарный выигрыш игроков в равновесных ситуациях (рис. 4).

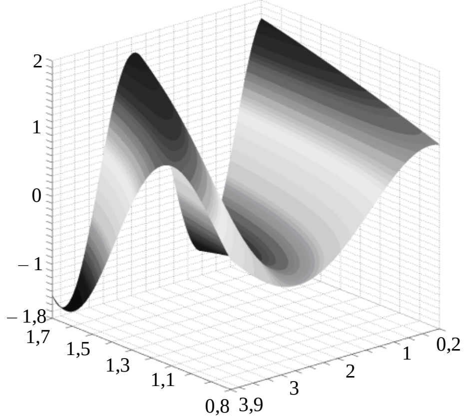

Рис. 1

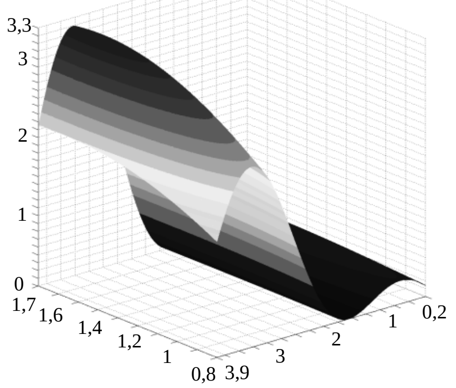

Рис. 2

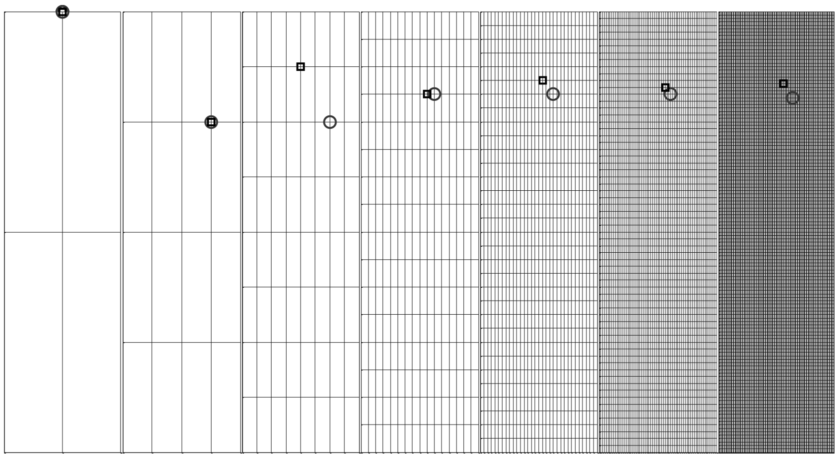

Рис. 3

Суммарный выигрыш игроков в этом примере, равно как и приближенное решение, с увеличением точности дискретизации как бы «стабилизируется». Для Парето-эффективных ситуаций суммарный выигрыш не убывает, достигая максимального значения (примерно 4,4943) при 128 подынтервалах (т.е. в результате решения биматричной 129×129 -игры). Если же для администратора ожидание решения будет слишком долгим, то Парето-эффективное решение биматричной 17×17 -игры (четвертая прямоугольная решетка на рис. 3) также приемлемо, где суммарный выигрыш игроков составит примерно 4,4925. Эта сумма идентична сумме, получаемой решением («следующей») биматричной 33×33 -игры, в которой эффективная ситуация идентична такой же ситуации в («предыдущей») 17×17 -игре. В этой манере администратор адаптирует приближенное решение исходной непрерывной игры к потребностям и возможностям, которые зависят лишь от одного источника влияния (а не от игроков).

Отметим особенность рассмотренного примера, связанную с тем, что функции (18) и (19) имеют неодинаковый диапазон выигрыша игроков. Если стандартизировать их, приводя к одинаковому диапазону — например, от 0 до 1, то зависимость суммарного выигрыша игроков достаточно сильно изменяется (рис. 5). Как и прежде, в двух первых случаях грубой дискретизации эта сумма одинакова для равновесного и эффективного решения, а далее наблюдается превосходство эффективных ситуаций. Здесь, с одной стороны, использование более, чем 16 подынтервалов ($q = 4$), не имеет смысла. С другой стороны, наибольший суммарный выигрыш получается при решении биматричной 5×5 -игры ($q = 2$), в которой, к тому же, равновесная и эффективная ситуации совпадают. Ввиду этого администратор, скорее всего, примет решение в пользу именно такого исхода.

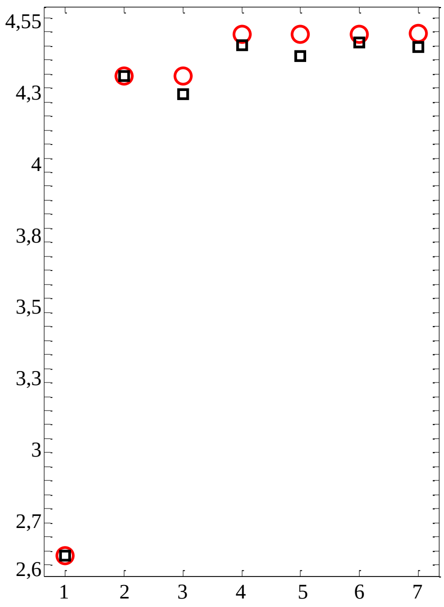

Рис. 4

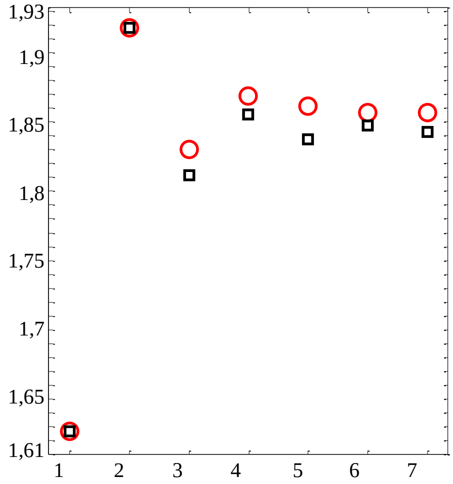

Рис. 5

Следует отметить также и то, что не все решения рассмотренных биматричных игр совпадают с решениями игр после стандартизации. В частности, Парето-эффективная ситуация биматричной 65×65 -игры (см. рис. 3) слегка отличается от Парето-эффективной ситуации в стандартизированной 65×65 -игре. Этот контрпример указывает на то, что при стандартизации функций выигрыша игроков необходимо учитывать возможные кардинальные изменения в эффективности.

Обсуждение

С точки зрения известного подхода с контролем согласованности решения конечной игры, представленный метод, безусловно, является весьма грубой аппроксимацией непрерывных бескоалиционных игр. Однако в большинстве практических задач такая аппроксимация неизбежна. Более того, благодаря тому, что моделируемая система управляется одним лицом, принимающим решения, упрощение непрерывной бескоалиционной игровой модели является единственно правильным для наискорейшего получения рационального решения.

Кроме достаточно примитивной дискретизации, предлагаемый метод груб еще и потому, что никак не учитывает особенности (главным образом, речь идет о локальных экстремумах) функций выигрыша игроков. В [12] такие особенности теоретически учитывались с помощью неравномерных выборок так, что экстремумы находились в точках выборок. При этом необходимо было вычислять еще и смешанные производные. Однако такой подход едва ли осуществим практически, поскольку тогда или нужны очень маленькие шаги дискретизации (что все равно не гарантирует «попадание» во все экстремумы), или необходимо находить все экстремумы аналитически (что дополнительно затягивает процесс пусть и гораздо более корректной аппроксимации).

Огромным преимуществом представленного метода аппроксимации по сравнению с другими является использование равномерного дихотомизированного разбиения множеств чистых стратегий игроков. Ведь, действительно, в конечных играх, в которых игроки имеют одинаковое число чистых стратегий вдоль каждого из измерений, намного проще искать решения. В частности, точные равновесные ситуации в биматричных играх с квадратными матрицами выигрышей можно находить аналитически (т.е. с помощью обобщенного алгоритма). Тем не менее в случаях, когда, например, множество чистых стратегий одного игрока является интервалом, а чистые стратегии других игроков задаются на прямоугольниках, данное преимущество исчезает. Иными словами, адаптивная конечная аппроксимация будет более эффективной для игр, в которых множества чистых стратегий игроков имеют одинаковое количество измерений.

Предлагаемый метод решения непрерывных бескоалиционных игр подобен процессу конечной оптимизации, в ходе которого выбирается наилучший исход из небольшого перечня возможных. При этом известная проблема единственности решения игры [2, 3, 10, 11] устраняема с помощью непосредственного администрирования. Точно так же решается проблема оперирования различными типами выгодности, симметричности и равновесия. Такой подход кажется вполне пригодным для внедрения в динамическое игровое моделирование, где подстройка шага кусочно-программного управления приводит к соответствующей оптимизационной задаче [14].

Заключение

Адаптивная конечная аппроксимация непрерывных бескоалиционных игр является необходимой процедурой, направленной на получение приближенных решений, пригодных для практической имплементации в условиях одностороннего администрирования или контроля моделируемых систем. Эта процедура состоит из двух этапов. На первом — функции выигрыша игроков дискретизируются с помощью равномерного дихотомизированного разбиения множеств их чистых стратегий. На втором этапе решается соответствующая конечная бескоалиционная игра. Если ее решение удовлетворяет запросам администратора (лица, ответственного за принятие решений в моделируемой системе), то это решение и является результатом аппроксимации. В противном случае процедура возвращается к первому этапу, где интенсивность (плотность) разбиения усиливается в два раза, затем решается новая, «усложненная в два раза», игра. Такое возвращение и усложнение повторяются до тех пор, пока решение соответствующей конечной игры не устроит администратора. Степень близости этого решения к решению исходной непрерывной игры не устанавливается, а точность и качество аппроксимации рассматривается в смысле того, насколько быстро решение конечной игры удовлетворит запросам администратора. При этом последовательность уже построенных, постепенно усложняющихся, конечных игр и их решений не удаляется, а служит основой выбора наиболее рационального решения с точки зрения скорости его получения, выгодности, симметричности и равновесия.

В.В. Романюк

АДАПТИВНА СКІНЧЕННА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ БЕЗКОАЛІЦІЙНИХ ІГОР

Розглянуто проблему розв'язування неперервних безкоаліційних ігор. Передбачається, що керування в системі, модельованій за допомогою неперервної безкоаліційної гри, може здійснюватися в односторонньому порядку, де відповідальність за прийняття рішень у системі покладається на певного адміністратора. Тому будь-які розв'язки, незалежно від того, як гравці їх інтерпретують, повинні вивчатися й фактично оптимізуватися тільки адміністратором. Відповідно до цього представлено процедуру адаптивної скінченної апроксимації неперервних безкоаліційних ігор, що спрямовується на одержання наближених розв'язків, придатних для практичної імплементації за умов одностороннього адміністрування або контролю модельованих систем. Ця процедура складається з двох етапів. На першому — функції виграшу гравців дискретизуються за допомогою рівномірного дихотомізованого розбиття множин їх чистих стратегій. На другому етапі розв'язується відповідна скінченна безкоаліційна гра. Якщо її розв'язок задовольняє запитам адміністратора, то цей розв'язок є результатом апроксимації. У протилежному випадку процедура повертається до першого етапу, де щільність розбиття підсилюється удвічі, і розв'язується нова, «ускладнена удвічі», гра. Таке повернення й ускладнення повторюються доти, поки розв'язок відповідної скінченної гри не влаштує адміністратора. Тільки адміністратор вирішує, який тип вигідності, симетричності або рівноваги є кращим, а також, чи є прийнятним розв'язок відповідної гри. Ступінь близькості наближеного розв'язку до розв'язку вихідної неперервної гри не встановлюється. Точність і якість апроксимації розглядаються в сенсі того, наскільки швидко розв'язок скінченної гри задовольнить запитам адміністратора. Послідовність розв'язаних ігор не видаляється, а служить основою для вибору найбільш раціонального розв'язку з погляду на швидкість його одержання, вірогідність, симетричність і рівновагу.

Ключові слова: неперервна безкоаліційна гра, одностороннє адміністрування, скінченна гра, дискретизація множини чистих стратегій, апроксимація розв'язків, переваги адміністратора.

V.V. Romanuke

ADAPTIVE FINITE APPROXIMATION OF CONTINUOUS NONCOOPERATIVE GAMES

A problem of solving continuous noncooperative games is considered. It is presumed that a system modeled by a continuous noncooperative game can be administered from just one side eventually responsible for decisions in the system. Therefore, any solutions, regardless of how players treat them, should be studied and be in fact optimized only by the administrator. Thus, a procedure of adaptive finite approximation of continuous noncooperative games is presented, which is aimed at obtaining approximate solutions suitable for their practical implementation in systems with one-sided administering or control. The procedure consists of two stages. At the first stage, the players' payoff functions are sampled by the uniform dichotomized breaking of the sets of their pure strategies. The respective finite noncooperative game is solved at the second stage. If its solution satisfies requirements of the administrator, then this solution is the result of the approximation. Otherwise, the procedure returns to the first stage, where the density of the breaking is twice increased and a new, «twice-complexified», game is solved. Such returns and complexifications are fulfilled until a solution of the corresponding finite game satisfies the administrator. Only the administrator decides which type of profitability, symmetry, or equilibrium is preferable, and whether the respective game solution is acceptable. The closeness of the approximate solution to the solution of the initial continuous game is not ascertained. The accuracy and quality of the approximation is treated in terms of how fast the finite game solution satisfies the administrator. A sequence of the already solved games is not removed, but serves as a basis for selecting the most rational solution considering operation speed, profitability, symmetry, and equilibrium.

Keywords: continuous noncooperative game, one-sided administering, finite game, sampling a set of pure strategies, solution approximation, administrator preferences.

1. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М. : Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1984. 496 с.
2. *Harsanyi J. C., Selten R.* A General Theory of equilibrium selection in games. Cambridge Mass. : The MIT Press, 1988. 396 p.
3. *Myerson R. B.* Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*. 1978. **7**, N 2. P. 73–80.
4. *Belhaiza S., Audet C., Hansen P.* On proper refinement of Nash equilibria for bimatrix games. *Automatica.* 2012. **48**, N 2. P. 297–303.
5. *Романюк В. В.* Сходимость и оценка процесса компьютерной реализации принципа оптимальности в матричных играх с видимым горизонтом разыгрываний. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2013. № 5. С. 96–102.
6. *Kumano T.* Nash implementation of constrained efficient stable matchings under weak priorities. *Games and Economic Behavior.* 2017. **104**. P. 230–240.
7. *Romanuke V. V.* Ecological-economic balance in fining environmental pollution subjects by a dyadic 3-person game model. Applied Ecology and Environmental Research. 2019. **17**, N 2. P. 1451–1474.
8. *Kontogiannis S. C., Panagopoulou P. N., Spirakis P. G.* Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games. *Theoretical Computer Science*. 2009. **410**, N 17. P. 1599–1606.
9. *Bernhard P., Shinar J.* On finite approximation of a game solution with mixed strategies. *Applied Mathematics Letters.* 1990. **3**, N 1. P. 1–4.
10. Romanuke V. V. Uniform sampling of the infinite noncooperative game on unit hypercube and reshaping ultimately multidimensional matrices of players’ payoff values. *Electrical, Control and Communication Engineering*. 2015. **8**. P. 13–19.
11. Romanuke V. V. Approximation of unit-hypercubic infinite noncooperative game via dimension-dependent samplings and reshaping the player’s payoffs into line array for the finite game simplification. *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* 2015. **108**, N 2. P. 113–134.
12. Romanuke V. V. Finite approximation of unit-hypercubic infinite noncooperative game via dimension-dependent irregular samplings and reshaping the player’s payoffs into line array for simplification and speedup. *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки. Математичне моделювання і прикладна механіка*. 2015. № 2. С. 201–221.
13. Romanuke V. V. Interval uncertainty reduction via division-by-2 dichotomization based on expert estimations for short-termed observations. *Journal of Uncertain Systems*. 2018. **12**, N 1. P. 3–21.
14. *Чикрий А. А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев : Наук. думка, 1992. 383 с.

Получено 27.04.2020