УДК 517.5

У.З. Грабова

ПРИБЛИЖЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИХ ТРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Ключевые слова: полигармонические уравнения, механика сплошных сред, асимптотические равенства, сопряженные функции.

Введение

Развитие математики во все времена неразрывно связано с формальным моделированием реальных явлений. Любая математическая модель является приближенной к тому процессу, который она описывает. Дифференциальные уравнения находят свое применение в области построения математических моделей, которыми описывается подавляющее большинство физических явлений и процессов. Решение таких уравнений или систем, вместе с граничными, начальными или некоторыми дополнительными условиями, открывает возможности получения количественных и качественных характеристик изучаемого процесса с заданной степенью точности. Благодаря дифференциальным уравнениям появились новые прикладные теории, такие, например, как теория дифференциальных игр [1–6].

Математические модели многих задач механики сплошных сред описываются гармоническими и бигармоническими уравнениями. Например, задача кручения стержня произвольного, в том числе и многосвязного сечения сводится к нахождению гармонической функции по заданной на границе сечения ее нормальной производной; задача теории упругости — к решению краевой задачи для бигармонического уравнения. Класс полигармонических уравнений порядка выше второго также весьма важен с точки зрения приложений, так как многие задачи математической физики (например, теория упругих пластинок и оболочек) приводят к уравнениям этого класса. Указанная теория имеет огромное значение в авиационно-космической промышленности, а также при конструировании высотных зданий, автомобилей и подводных объектов для освоения морских глубин, что представляется весьма важным для решения энергетических проблем в будущем. Поэтому актуальным остается вопрос о разработке эффективных средств компьютерного моделирования и численных методов решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной области. Как известно, развивающиеся в настоящее время численные методы не исключают асимптотических [7−10]. Это объясняется тем, что разумно построенная асимптотика, особенно ее главный член, несет существенную для приложений информацию о качественном поведении решения и в этом смысле в определенной мере заменяет точное решение, которое чаще всего не может быть найдено.

Именно поэтому в настоящей работе рассматриваются вопросы решения одной из экстремальных задач теории приближения, когда объектом приближения является полигармонический оператор.

1. Постановка задачи

Пусть L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций f с нормой $\| f \|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt;$ C — пространство 2π-периодических непрерывных функций f, в котором норма определяется равенством $\| f \|_C = \max_t |f(t)|$.

Обозначим H^α класс Гельдера [11, с. 12] функций $f \in C,$ которые удовлетворяют условию

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|^\alpha, \ 0 < \alpha \le 1, 0 \le h \le 2\pi, x \in R,$$

а $\bar{H}^\alpha$ — класс функций, сопряженных функциям из класса $H^\alpha,$ т.е.

$$\bar{H}^\alpha = \left\{ \bar{f} : \bar{f} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \ f \in H^\alpha \right\},$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения, т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt.$$

Пусть $U(\rho; x)$ — тригармоническая функция в единичном круге $\left| \rho e^{ix} \right| < 1$, т.е. решение уравнения

$$\Delta^3 U(\rho; x) = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярных координатах.

Решение уравнения (1) с граничными условиями

$$U(\rho; x)\big|_{\rho=1} = f(x); \ \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} U(\rho; x)\big|_{\rho=1} = 0, \ k = 1, 2,$$

где $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция, запишем в виде [12]

$$P_3(\rho; f; x) := U(\rho; x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{4}(3-\rho^2)(1-\rho^2) + \frac{k^2}{8}(1-\rho^2)^2 \right) \rho^k \cos kt \right\} dt. \tag{2}$$

Величину $P_3(\rho; f; x)$ называют тригармоническим интегралом Пуассона функции f.

Положив в (2) $\rho = e^{-1/\delta}$, $\delta > 0,$ получим оператор $P_{3,\delta}(f; x),$ т.е.

$$P_{3,\delta}(f; x) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{4}(3-e^{-2/\delta})(1-e^{-2/\delta})+\frac{k^2}{8}(1-e^{-2/\delta})^2\right)e^{-k/\delta}\cos kt\right\}dt,$$

и используем его в качестве метода приближения функций классов $\bar{H}^{\alpha}$.

Обозначим

$$\mathcal{E}(\bar{H}^{\alpha}; P_{3,\delta})_C := \sup_{f\in\bar{H}^{\alpha}} \| f(\cdot)-P_{3,\delta}(f;\cdot)\|_C. \tag{3}$$

Если в явном виде найдена функция $\phi(\delta)$, такая, что при $\delta\to\infty$ $\mathcal{E}(\bar{H}^{\alpha}; P_{3,\delta})_C = \phi(\delta)+o(\phi(\delta))$, то, следуя А.И. Степанцу [11, с. 9], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса $\bar{H}^{\alpha}$ и тригармонического интеграла Пуассона в равномерной метрике.

Рассмотрим последовательность $\Lambda=\{\lambda_{\delta}(k)\}$ функций натурального аргумента, зависящих от параметра δ, изменяющегося на некотором множестве $E_{\Lambda}\subseteq R$, которое содержит, по крайней мере, одну предельную точку, и удовлетворяющих следующим условиям $\lambda_{\delta}(0)=1$, $\delta\in E_{\Lambda}$. Будем считать, что $\{\lambda_{\delta}(k)\}$ имеет такое свойство, что для каждой функции $f\in L$ ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{\delta}(k)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

при каждом фиксированном $\delta\in E_{\Lambda}$ сходится в метрике пространства L к некоторой суммируемой функции $U_{\delta}(f;x;\Lambda)$. Говорят, что каждое множество функций натурального аргумента Λ при фиксированном $\delta\in E_{\Lambda}$ определяет линейный оператор $U_{\delta}(f;x;\Lambda)$, что действует из L в L, или процесс суммирования рядов Фурье.

Задача Колмогорова–Никольского имеет богатую историю, связанную с именами крупнейших специалистов в теории функций. Подробнее об этом можно прочитать, например, в [11]. Отметим, что в последнее время особый интерес в этой области экстремальных задач направлен на решение задачи Колмогорова–Никольского для спектра операторов, определяемых множеством $\{\lambda_{\delta}(k)\}$ и зависящих от некоторого непрерывного параметра $\delta\in R$. Некоторые линейные методы $U_{\delta}(f;x;\Lambda)$ хорошо изучены с точки зрения задачи Колмогорова–Никольского, в частности, в работах [13−18] исследованы аппроксимативные свойства интегралов Пуассона, в работах [19−26] — бигармонических интегралов Пуассона, в работах [27−29] — интегралов Вейерштрасса и др.

Тригармонический интеграл Пуассона $P_{3,\delta}(f;x)$ также является линейным методом суммирования и задается множеством $\Lambda=\{\lambda_{\delta}(k)\}$, где

$$\lambda_{\delta}(k)=\left(1+\frac{1}{4}(3-e^{-2/\delta})(1-e^{-2/\delta})k+\frac{1}{8}(1-e^{-2/\delta})^2k^2\right)e^{-k/\delta}. \tag{4}$$

Аппроксимативные свойства тригармонических интегралов Пуассона исследованы недостаточно, хотя прикладной характер таких операторов значительный. Отметим относительно небольшое количество работ по приближению указанным методом. Для классов Гельдера решение задачи Колмогорова–Никольского получено в работах [30−32]. Аналогичная задача решена на классах Вейля–Надя [33, 34] и

 ISSN 0572-2691

Соболева [35]. В данной работе продолжены исследования в этом направлении, а именно, ставится цель — решить задачу Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах сопряженных функций в равномерной метрике. Тем самым устраняется пробел в решении этой задачи для классов $\bar{H}^{\alpha}$.

2. Решение задачи Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах сопряженных функций

Определение [36, с. 4]. Пусть функция $\lambda(u)$ определена на $[0,\infty)$, абсолютно непрерывна и $\lambda(\infty)=0$. Будем говорить, что $\lambda(u)\in F_{\alpha}$ $(0\le\alpha<1)$, если производную $\lambda'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, что для некоторого $\alpha>0$ все интегралы

$$\int\limits_{0}^{a/2} u^{1-\alpha}\left|d\lambda'(u)\right|,\quad \int\limits_{a/2}^{3a/2}\left|u-a\right|^{1-\alpha}\left|d\lambda'(u)\right|,\quad \int\limits_{3a/2}^{\infty}(u-a)\left|d\lambda'(u)\right| \tag{5}$$

сходятся (последний как несобственный).

Далее необходимо утверждение работы [36].

Лемма [36, с. 10]. Пусть $\lambda(u)\in F_{\alpha}$, $\lambda(u)=O\left(\frac{1}{\ln u}\right)$, $u\to\infty$, и интегралы

$$\bar{A}(\alpha,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\lambda'(u)\cos ut\,du\right|dt \tag{6}$$

сходятся. Тогда при $\delta\to\infty$

$$\mathcal{E}(\bar{H}^{\alpha};U_{\delta}(\Lambda))_C=\frac{2^{\alpha-1}}{\delta^{\alpha}}\bar{A}(\alpha,\lambda)+O\left(\frac{1}{\delta^{\alpha}}\bar{a}(\alpha,\lambda)\right), \tag{7}$$

где

$$\bar{a}(\alpha,\lambda)=\int\limits_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}}|t|^{\alpha-1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\lambda'(u)\cos ut\,du\right|dt. \tag{8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для $0<\alpha<1$ при $\delta\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(\bar{H}^{\alpha};P_{3,\delta})_C=2^{\alpha-2}(1-\alpha)(2-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Согласно (4) введем следующие обозначения $\lambda(u):=$ $:=(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u}$, где

$$\gamma=\frac{\delta}{4}(3-e^{-2/\delta})(1-e^{-2/\delta}),\quad \theta=\frac{\delta^2}{8}(1-e^{-2/\delta})^2. \tag{10}$$

В [31] показано, что $\lambda(u)\in F_1$.

Докажем сходимость интеграла (6), т.е.

$$\bar{A}(\alpha,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}((\gamma-1)+(2\theta-\gamma)u-\theta u^2)e^{-u}\cos ut\,du\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}(\gamma-1)e^{-u}\cos ut\,du+(2\theta-\gamma)\int\limits_{0}^{\infty}ue^{-u}\cos ut\,du-\theta\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-u}\cos ut\,du\right|dt. \tag{11}$$

В силу равенств, полученных в работе [31], запишем

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\cos ut du = \frac{1}{1+t^2}; \quad \int_0^{\infty} ue^{-u}\cos ut du = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}; \quad \int_0^{\infty} u^2e^{-u}\cos ut du = \frac{2-6t^2}{(t^2+1)^3}. \quad (12)$$

Тогда, используя формулы 3.241.2 и 3.241.5 из [37], имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^2}dt = \operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}, \quad (13)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^2)^2}dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \frac{(\alpha-2)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha-2)\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= \frac{(2-\alpha)}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} = (1-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}. \quad (14)$$

Из формул 3.241.4, 8.331 и 8.334.3 [37] следует

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}(2-6t^2)}{(1+t^2)^3}dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t^2)^3}dt - \frac{12}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha+1}}{(1+t^2)^3}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(3)} - \frac{6}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{\alpha+2}{2}\right)}{\Gamma(3)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{\pi}\left(2-\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\alpha+2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{\pi}\left(2-\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha+2}{2}\right) =$$

$$= \left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} - \left(2-\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+2}{2}\right)\frac{3}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} = \left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} +$$

$$+3\left(2-\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+2}{2}\right)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} = (1-\alpha)(2-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}. \quad (15)$$

Далее, поскольку $\gamma-1<0$, $2\theta-\gamma<0$, учитывая (13)–(15), из (11) получаем оценку

$$\bar{A}(\alpha,\lambda) = (1-\gamma)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} + (\gamma-2\theta)(1-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2} + 2\theta\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(1-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}. \quad (16)$$

Используя (10) и разложение экспоненциальной функции в ряд Тейлора, имеем

$$1-\gamma = 1-\frac{\delta}{4}\left(3-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right) = 1-\frac{\left(3-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)\left(1-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)\delta}{4} = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

ISSN 0572-2691

$$\gamma-2\theta=\frac{\delta}{4}\left(3-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)-\frac{\delta^2}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(3-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)\left(1-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)\delta-\left(1-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)^2\delta^2\right)=O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$2\theta=\frac{\delta^2}{4}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-1+\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+\ldots\right)^2\delta^2=1+O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Учитывая полученные оценки, запишем (16) следующим образом:

$$\bar{A}(\alpha,\lambda)=\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)(1-\alpha)\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{17}$$

Таким образом, убеждаемся в сходимости интеграла (6).

Перейдем теперь к оценке интеграла (8). Из формул (12) получаем

$$\bar{a}(\alpha,\lambda)=2\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}t^{\alpha-1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}((\gamma-1)+(2\theta-\gamma)u-\theta u^2)e^{-u}\cos utdu\right|dt=$$

$$=2\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}t^{\alpha-1}\left(\frac{\gamma-1}{1+t^2}+(2\theta-\gamma)\cdot\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+2\theta\cdot\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}\right)dt. \tag{18}$$

Далее, так как

$$\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{1+t^2}\le\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}t^{\alpha-3}dt\le\frac{K_1}{\delta^{2-\alpha}},$$

$$\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2}\le\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{1+t^2}\le\frac{K_2}{\delta^{2-\alpha}},$$

$$\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}(2-6t^2)dt}{(t^2+1)^3}\le\int\limits_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+t^2)^2}\le\frac{K_3}{\delta^{4-\alpha}},$$

из (18) находим оценку

$$\bar{a}(\alpha,\lambda)=O\left(\frac{1}{\delta^{2-\alpha}}\right). \tag{19}$$

Сопоставляя (17) и (19), получаем из (7) требуемое соотношение (9).

Теорема доказана.

Заключение

Работа посвящена решению одной из экстремальных задач теории приближения классов периодических функций операторами Пуассона. Изучены вопросы асимптотического поведения верхних граней уклонений тригармонических интегралов Пуассона на классах функций, сопряженных функциям классов H^{α},

$\alpha \in (0, 1)$. Заметим, что данная работа тесно связана с работой [31], в которой найдены асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}(\bar{H}^{\alpha}; P_{3,\delta})_C$, $0 < \alpha < 1$. Сравнивая результаты данных работ, отметим, что для классов сопряженных функций $\bar{H}^{\alpha}$ порядок остаточного члена приближения тригармоническими интегралами Пуассона меньше, чем для классов Гельдера.

У.З. Грабова

НАБЛИЖЕННЯ СПРЯЖЕНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЇХ ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій f, спряжених до функцій класів Гельдера H^{α}, $0 < \alpha < 1$, в рівномірній метриці. Таким чином, розв'язано одну із найбільш важливих задач теорії наближення функцій — задачу Колмогорова–Нікольського для класу $\bar{H}^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, і тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці, що усуває прогалину в розв'язуванні даної задачі для класів спряжених періодичних функцій. Застосовано методи дослідження інтегральних представлень відхилень операторів, що породжуються послідовністю функцій $\{\lambda_{\delta}(k)\}$, залежних від деякого неперервного параметра δ, на класах періодичних функцій, які виникли завдяки роботам Л.І. Баусова. Класична теорія крайових задач для полігармонічних функцій стала досить добре систематизованим розділом математичного моделювання. Моделювання явищ, що вивчаються в механіці суцільних середовищ (плоска задача теорії пружності, задача вигину тонкої пластини з жорстко закріпленими краями та ін.), призводить до крайових задач для полігармонічного рівняння в певній області. Оскільки розвиток високоточних виробництв приводить до необхідності розробки і впровадження асимптотичних методів теорії апроксимації, результати даної роботи можна розглядати як можливе прикладне застосування. Це пояснюється і тим, що асимптотичні методи набагато конструктивніші і простіші в обчислювальній реалізації, ніж точні методи розв'язування (якщо такі взагалі існують). У реальних умовах (особливо при розробці програмного забезпечення точного машинобудування) асимптотичні методи приводять практично до тих же результатів, що і оптимальні. При подальшому вдосконаленні технологій щодо високоточного виробництва саме асимптотичним методам буде надаватися пріоритет. Цьому сприяє і розвиток наукомістких, високоточних технологій, і в останні роки досягнуто успіхів у розвитку екстремальних задач теорії наближення. Крім того, багато технічних задач сучасного машинобудування породжують нові постановки задач і в самій теорії наближення.

Ключові слова: полігармонічні рівняння, механіка суцільних середовищ, асимптотичні рівності, спряжені функції.

U.Z. Hrabova

APPROXIMATION OF CONJUGATE PERIODIC FUNCTIONS BY THEIR THREE-HARMONIC POISSON INTEGRALS

Asymptotic equalities are obtained for the upper bounds of deviations of the three-harmonic Poisson integrals from functions f conjugated to functions from the Hölder classes H^{α}, $0 < \alpha < 1$, in the uniform metric. Thus, one of the most important problems is solved in the theory of approximation of functions — the Kolmogorov–Nikol'skii problem for the class $\bar{H}^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ and three-harmonic Poisson integral in the uniform metric, that eliminates the gap in the solution of this problem for classes of conjugated periodic functions. In the paper the methods of investigation are used for the integral representations of deviations of operators defined by the sequence of functions $\{\lambda_\delta(k)\}$ that depend on a certain continuous parameter δ on the classes of periodic functions. They arose and developed due to the papers by L.I. Bausov. The classical theory of boundary problems for polyharmonic functions became a well-organized chapter of the mathematical modeling. Modeling of phenomena studied in mechanics of continuous media (a plane problem of elasticity theory, the elasticity problem of a thin plate with rigid edges etc.) leads to boundary value problems for polyharmonic equation in the specific area. Since the development of high-precision production leads to the need for development and implementation of asymptotic methods of approximation theory, then the results of this work can be considered as possible applications. This is due to the fact that asymptotic methods are much more constructive and simpler in computational implementation than the exact solution methods (in case there are any). In the real conditions (especially when developing precision engineering software) asymptotic methods lead to almost the same results as optimal. As a result of this study, we can conclude that with further improvement of technology towards high-precision production, namely, asymptotic methods will be given a priority. This is facilitated by the development of science-intensive, high-precision technologies and the recent success in the development of extreme problems of the approximation theory. In addition, a lot of technical problems of modern engineering generate new formulations of problems in the theory of approximation.

Keywords: polyharmonic equations, mechanics of continuous media, asymptotic equalities, conjugate functions.

1. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl. 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
2. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. **50**, N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
3. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl. 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
4. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl. 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
5. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In Breton M., Szajowski K. (eds). Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston : Birkhäuser. 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.-1007/978-0-8176-8089-3_4.
6. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
7. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
8. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
9. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A: 1023463801914.
10. Hrabova U.Z., Serdyuk A.S. Order estimates for the best approximations and approximations by Fourier sums of the classes of (ψ,β)-differential functions. *Ukrainian Math. J.* 2014. **65**, N 9. P. 1319–1331. DOI: 10.1007/s11253-014-0861-7.
11. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев : Наук. думка, 1981. 340 с.
12. Gembarska S.B. On boundary values of three-harmonic Poisson integral on the boundary of a unit disk. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 7. P. 1012–1021. DOI: 10.1007/s11253-018-1548-2.
13. Kharkevich Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$. *Math. Notes*. 2014. **96**, N 5-6. P. 1008−1019. DOI: 10.1134/S0001434614110406.
14. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
15. Zhyhallo T.V. Approximation in the mean of classes of the functions with fractional derivatives by their Abel-Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51**, N 8. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i8.50.

16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
17. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
18. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
20. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_{\beta} H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
22. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W^r_{\beta} H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
23. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
24. Zhyhallo K.M. Algorithmization of calculations of the Kolmogorov−Nikol'skii constants for values of approximations of conjugated differentiable functions by generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51**, N 10. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i10.50.
25. Абдуллаєв Ф.Г., Харкевич Ю.І. Наближення класів $C^{\psi}_{\beta} H^{\alpha}$ бігармонічними інтегралами Пуассона. *Укр. мат. журн.* 2020. **72**, N 1. C. 20–35.
26. Zhyhallo K.M., Zhyhallo T.V. On the approximation of functions from the Hölder class given on a segment by their biharmonic Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2019. **71**, N 7. P. 1043–1051. DOI:10.1007/s11253-019-01696-7.
27. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. Approximation of functions from the classes $W^r_{\beta} H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
28. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^r_{\beta} H^{\alpha}$. *J. Math. Sci.* (N.Y.). 2018. **231**, N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
29. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
30. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 12. P. 57–70. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60.
31. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. P. 77–86. DOI: 10.1615/jautomainfscien.v50.i8.70.
32. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
33. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2. P. 10–23. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334.
34. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^r_{\beta} H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N.Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4
35. Hrabova U.Z. Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51**, N 12. P. 46–55. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i12.50.
36. Bausov L.I. Linear methods of summation of Fourier series with prescribed rectangular matrices. II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1966. **55**, N 6. P. 3–17.
37. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

Получено 19.05.2020