УДК 519.6

Т.В. Жигалло, Н.И. Падалко

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ АБЕЛЯ–ПУАССОНА

Ключевые слова: модуль непрерывности, пространства суммируемых функций, дифференциальные уравнения в частных производных, краевая задача.

Введение

В современной науке все чаще и чаще в исследованиях применяются всевозможные средства, позволяющие прийти к более глубокому пониманию природных явлений. В качестве одного из таких средств в современной прикладной математике принято использовать краевые задачи для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений. Особое место среди последних занимают дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа, широко используемые в математических моделях естественных процессов. Яркие примеры решений такого типа уравнений — так называемые интегралы типа Абеля–Пуассона, изучению аппроксимативных свойств которых посвящен цикл работ [1–11]. К большому сожалению, в упомянутых выше работах изучены аппроксимативные характеристики интегралов типа Абеля–Пуассона как внутри единичного круга, так и на его границе, а не на всей верхней полуплоскости, что существенно ограничивает область их прикладного применения. Однако с точки зрения прикладной математики, и в особенности игровых задач динамики [12–20], решению которых на современном этапе развития научно-технического прогресса уделяется очень большое внимание, значительно интереснее изучение именно граничных свойств интегралов Абеля–Пуассона как решений краевой задачи в верхней полуплоскости. Именно таким исследованиям и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи и некоторые дополнительные сведения

Рассмотрим краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta U = 0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах, т.е. уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \le \rho < 1, -\pi \le x \le \pi). \tag{2}$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$U(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), \ -\pi \le x \le \pi, \tag{3}$$

где $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция, далее обозначается через $U(\rho, x) = A(\rho; f; x).$ Тогда решение краевой задачи (2), (3) согласно [21] можно записать в виде

$$A(\rho;\ f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt\right\} dt, \ 0 \le \rho < 1. \tag{4}$$

Величину (4) принято называть интегралом Абеля–Пуассона [22, 23] или просто Пуассона [24, 25] функции $f(\cdot)$. Аналогично [26, 27], положив в (4) $\rho = e^{-1/\delta}$, интеграл Абеля–Пуассона запишем в виде

$$A(\delta;\ f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right\}dt,\ \ \delta > 0. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу (в полуплоскости): найти решение $U(x,\ y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,\ \ y > 0,\ \ -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

которое удовлетворяет условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x) \tag{7}$$

и является ограниченной в $G = \{y > 0, -\infty < x < \infty\}$ функцией, $\lim\limits_{y\to\infty} U(x,\ y) = 0.$ Очевидно, что задача (6), (7) — классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости. В [28] показано, что решение краевой задачи (6), (7) в интегральной форме может быть представлено в виде

$$U_\varphi(x,\ y) := A_\varphi(x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\,K(t,\ y)\,dt, \tag{8}$$

где

$$K(t,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\cos\lambda t\,d\lambda. \tag{9}$$

Следует отметить, что имеется цикл работ [29–33], посвященных исследованию аппроксимативных характеристик для интегралов Абеля–Пуассона (4), (5). Что же касается аналогичного вопроса для интегралов (8), то здесь успехи более умеренны. Именно поэтому основная задача нашей работы — исследование граничных свойств решений краевой задачи (6), (7).

2. Граничные свойства решений уравнений Лапласа в верхней полуплоскости

Обозначим, как общепринято, $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \le p < \infty$, с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{10}$$

А C и C_i всюду будем обозначать абсолютные постоянные, не зависящие ни от каких аргументов.

Тогда в принятых выше обозначениях имеет место утверждение.

Теорема. Если $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $0 \le p < \infty$, а $\omega(t), t > 0$ — функция типа модуля непрерывности первого порядка, для которого $\omega(\varphi, t) \le C\omega(t)$, то для интеграла $A_\varphi(x,\ y)$, заданного с помощью соотношений (8), (9), имеет место оценка

$$\left\|A_\varphi(\cdot, y) - \varphi(\cdot)\right\|_{L_p} \le C\omega(y). \tag{11}$$

ISSN 0572-2691

Доказательство. Аналогично [34, 35] можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda t \, d\lambda \, dt = 1. \tag{12}$$

Тогда, учитывая определение нормы (10) в L_p, имеем

$$\left\| A_\varphi(\cdot, y) - \varphi(\cdot) \right\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| A_\varphi(x, y) - \varphi(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) K(t, y) \, dt - \varphi(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x+t) - \varphi(x)) K(t, y) \, dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} | \varphi(x+t) - \varphi(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} | K(t, y) | dt \le$$

$$\le C \int_{|t|<h} \omega_p(\varphi; h) \left| K(t, y) \right| dt + C \|\varphi\|_{L_p} \int_{|t|\ge h} | K(t, y) | dt =$$

$$= C\omega_p(\varphi; h) \int_{|t|<h} \left| K(t, y) \right| dt + C \|\varphi\|_{L_p} \int_{|t|\ge h} \left| K(t, y) \right| dt := I_1 + I_2, \tag{13}$$

где

$$\omega_p(\varphi; h) = \sup_{|t|<h} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(x+t) - \varphi(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{14}$$

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Далее, используя интегральное представление (9) ядра $K(t, y)$, произведем оценку интеграла

$$I_1 = 2C\omega(\varphi; h) \int_0^h \left| K(t, y) \right| dt = 2C\omega(\varphi; h) \int_0^h \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda t \, d\lambda \right| dt \le$$

$$\le C_1 \omega(\varphi; h) \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda t \, d\lambda \, dt \le C_2 \omega(\varphi; h) \, h. \tag{16}$$

Обозначив $\max\limits_{h \le y} \omega(\varphi; h) = \omega(\varphi; y),$ из последнего соотношения (16) имеем

$$I_1 = C_2 y \omega(\varphi; y). \tag{17}$$

Из лемм 4.3 и 4.4 [28] получим следующие оценки:

$$\int\limits_{|t|\geq h} |K(t, y)|\,dt = 2\int\limits_h^\infty \left| \int\limits_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda t\, d\lambda \right| dt \leq$$

$$\leq C\int\limits_h^\infty \left| \int\limits_0^\infty y^2 e^{-\lambda y}\frac{1-\cos\lambda t}{t^2}\,d\lambda \right| dt \leq C\int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^2}\int\limits_0^\infty y^2 e^{-\lambda y}d\lambda \leq Cy \tag{18}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^\infty |K(t, y)|\,dt = 2\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^\infty e^{-\lambda y}\cos\lambda t\, d\lambda \right| dt \leq C\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^\infty \frac{y}{\lambda}(1+\lambda y)\,e^{-\lambda y}\frac{1-\cos\lambda t}{t^2}\,d\lambda \right| dt \leq$$

$$\leq C\int\limits_0^\infty y(1+\lambda y)\,e^{-\lambda y}d\lambda \leq C\int\limits_0^\infty (1+v)e^{-v}dv \leq C, \tag{19}$$

учитывая, что $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos\lambda t}{t^2}dt = C|\lambda|$. Тогда вследствие (18), (19) имеем

$$I_2 = \|\varphi\|_{L_p}\int\limits_h^\infty |K(t, y)|\,dt \leq C_3\|\varphi\|_{L_p}\, y. \tag{20}$$

Так как всегда будет существовать постоянная, такая, что при заданном модуле непрерывности первого порядка $\omega(\cdot)$ имеет место соотношение $y = O(\omega(y))$, с одной стороны, и $\|\varphi\|_{L_p} \leq C_4$ — с другой, то из (20) следует, что

$$I_2 \leq C\omega(y). \tag{21}$$

Таким образом, объединяя соотношения (17), (21) и (13), получаем

$$\left\| A_\varphi(\cdot, y) - \varphi(\cdot)\right\|_{L_p} \leq C_2 y\omega(\varphi;\, y) + C\omega(y) \leq C\omega(y).$$

Тем самым убеждаемся в справедливости соотношения (11).

Теорема доказана.

Заключение

В результате проведенных в работе исследований получены абсолютно новые результаты, касающиеся граничных свойств решений классического типа уравнения Лапласа с заданными краевыми условиями в верхней полуплоскости. Иными словами, доказанная теорема устанавливает скорость сходимости интеграла Абеля–Пуассона как решения дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа в терминах модуля непрерывности первого порядка в пространствах суммируемых на всей числовой оси функций. Из полученной в теореме оценки меры удаления интеграла $A_\varphi(x, y)$ от его граничного значения $\varphi(x),\ -\infty < x < \infty$, в терминах модуля непрерывности первого порядка краевых данных следуют некоторые ранее полученные в работе [28] результаты. Доказанные оценки скорости сходимости интеграла Абеля–Пуассона в дальнейшем могут быть полезны при решении актуальных задач современной прикладной математики.

Т.В. Жигалло, Н.Й. Падалко

ПРО ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ АБЕЛЯ–ПУАССОНА

При отриманні за допомогою класичних аналітичних методів аналітичного розв'язання багатьох задач прикладної математики доводиться стикатися з великими математичними труднощами, які в більшості випадків викликані величезним об'ємом необхідної інформації (параметрів) для подальшої математичної обробки. Напевно, інколи неможливо обійтися без чисельного розв'язання так званих крайових задач деяких типів рівнянь і систем рівнянь. Очевидно, що тип рівняння або системи рівнянь, які розв'язуємо, враховує особливості постановки даної задачі і відповідно визначає методи і властивості її розв'язання. У випадку еліптичної задачі диференціального рівняння в частинних похідних, на її розв'язання в певній точці розглянутої області завжди впливають задані на всій межі області крайові умови. У зарубіжній і вітчизняній науковій літературі з прикладної математики є низка результатів, що стосуються вивчення апроксимативних властивостей розв'язків класичного рівняння Лапласа як всередині одиничного кола, так і на його межі. Що стосується аналогічних досліджень у верхній координатній півплощині для зазначених вище рішень рівнянь, то тут успіхи більш помірні. Саме тому дану роботу присвячено дослідженню деяких граничних властивостей інтеграла Абеля–Пуассона, які в свою чергу є розв'язками рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. Доведена теорема на конкретному прикладі (інтеграла Абеля–Пуассона) дає можливість характеризувати граничні властивості розв'язків крайових задач у плоских областях (верхній півплощині) в термінах модуля неперервності першого порядку просторів сумовних на всій числовій осі функцій. Отримані в даній роботі результати можуть бути використані при подальших дослідженнях в сучасній прикладній математиці.

Ключові слова: модуль неперервності, простори сумовних функцій, диференціальні рівняння в частинних похідних, крайова задача.

T.V. Zhyhallo, N.I. Padalko

ON SOME BOUNDARY PROPERTIES OF ABEL–POISSON INTEGRALS

When obtaining an analytical solution to many problems of applied mathematics using classical analytical methods, one encounters great mathematical difficulties. In most cases, these difficulties are caused by the huge amount of information (parameters) that is necessary for further mathematical processing. And here in some cases, it will probably be impossible not to use a numerical solution of the so-called boundary value problems of certain types of equations and systems of equations. Obviously, the type of equation or system of equations that we solve takes into account the peculiarities of formulation of this problem and, respectively, determines methods and properties of their solution. So, in the case of elliptic problem for a partial differential equation, its solution at some point of the considered domain is always influenced by the boundary conditions given on the entire boundary of the domain. In the foreign and national scientific literature on applied mathematics there is a number of results concerning the study of approximative properties of solutions of the classical Laplace equation inside the unit circle as well as on its boundary. As for similar studies in the upper coordinate half-plane, for the indicated above solutions of equations the successes were more moderate. That is why this work is devoted to the study of certain boundary properties of the Abel–Poisson integral, which in turn are solutions of the partial differential equations of elliptic type. The proved theorem on a concrete example (the Abel–Poisson integral) makes it possible to characterize the boundary properties of solutions of boundary value problems in flat domains (in the upper half-plane) in terms of the first order modulus of continuity of the spaces of functions that are summable on the entire numerical axis. The results obtained in this paper may be in demand in further studies of the modern applied mathematics.

Keywords: modulus of continuity, spaces of summable functions, partial differential equation, boundary value problem.

1. Poddubnyi A.M. Estimate of the rate of approximation by images of operators of Abel–Poisson type of some special classes of functions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 6. P. 38–53. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.40.
2. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
3. Zhyhallo K.M. Algorithmization of calculations of the Kolmogorov−Nikol'skii constants for values of approximations of conjugated differentiable functions by generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 10. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i10.50.
4. Zhyhallo K.M., Zhyhallo T.V. On the approximation of functions from the Hölder class given on a segment by their biharmonic Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2019. **71**, N 7. P. 1043–1051.
5. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
6. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
7. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 12. P. 57–70. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60.
8. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 77–86. DOI: 10.1615/jautomainfscien.v50.i8.70.
9. Hrabova U.Z. Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 12. P. 46–55. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i12.50.
10. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2, P. 10–23. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334.
11. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: org/10.1007/s10958-020-04721-4.
12. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
13. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. and Systems Anal.* 2014. **50**, N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
14. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
15. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
16. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
17. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (eds) Advances in Dynamic Games. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. Boston : Birkhäuser. 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
18. Chikrij A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. and Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
19. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2007. **9**. P. 37–55. DOI: 10.1007/978-0-8176-4553-3_2.
20. Rappoport I.S., Chikrii A.A. Guaranteed result in a differential game of group pursuit with terminal payoff function. *J. of Applied Math. and Mechanics*. 1997. **61**, N 4. P. 567–576.
21. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.

22. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
23. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
24. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
26. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
27. Абдуллаєв Ф.Г., Харкевич Ю.І. Наближення класів $C^\psi_\beta H^\alpha$ бігармонічними інтегралами Пуассона. *Укр. мат. журн.* 2020. **72**, N 1. C. 20–35.
28. Бугров Я.С. Дифференциальные свойства решений некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка. *Матем. сб*. 1964. **63** (105), N 1. C. 59–121.
29. Zhyhallo T.V. Approximation in the mean of classes of the functions with fractional derivatives by their Abel–Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 8. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i8.50.
30. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^\psi_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J*. 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-010-0321-y.
31. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-010-0321-y.
32. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
33. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^\psi_\beta H^\alpha$. *Mathematical Notes*. 2014. **9**, N 5–6. P. 1008–1019. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434614110406.
34. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
35. Kharkevych Yu.I. On Approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.

Получено 19.05.2020