УДК 517.988

Я.И. Ведель, С.В. Денисов, В.В. Семенов

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ АДАПТИВНЫЙ ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АДАМАРА*

Ключевые слова: регуляризация, адаптивность, сходимость, экстрапроксимальный алгоритм, схема Гальперна, задача о равновесии, псевдомонотонность, пространство Адамара.

Введение

Одним из интенсивно развивающихся направлений современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) вида [1–13]:

$$\text{найти } x \in C: F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

где C — непустое подмножество гильбертова пространства H, $F: C \times C \to \mathbb{R}$ — функция, такая, что $F(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$ (называемая бифункцией). В виде (1) можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи.

Исследование алгоритмов решения равновесных и близких задач активно продолжается. Частным случаем задач о равновесии являются вариационные неравенства [14]. Для их решения еще в 1970-х годах Г.М. Корпелевич предложила экстраградиентный метод [15]. В [16] рассмотрен экстраградиентный метод для неравенств в бесконечномерном гильбертовом пространстве и доказана его слабая сходимость. Одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод Немировского [17]. Данный метод можно интерпретировать как вариант экстраградиентного метода с проектированием, понимаемым в смысле расхождения Брэгмана. В [18, 19] предложены адаптивные модификации проксимального зеркального метода, не требующие знания констант Липшица операторов для определения величины шага. Аналогам экстраградиентного метода для задач о равновесии и близким вопросам посвящены работы [2, 5, 7, 8, 20–24]. Следуя А.С. Антипину, экстрапроксимальным будем называть следующий аналог экстраградиентного метода для задач о равновесии [2, 5]

* Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер госрегистрации 0219U008403) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», номер госрегистрации 0119U101608).

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in (0, +\infty)$, $\operatorname{prox}_\varphi$ — проксимальный оператор функции φ [25].

В последнее время возник обусловленный проблемами математической биологии и машинного обучения интерес к построению теории и алгоритмов решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара [26] (также известных под названием $CAT(0)$-пространств). Еще одной сильной мотивацией для изучения данных задач является возможность записать некоторые невыпуклые задачи в виде выпуклых (точнее, геодезически выпуклых) в пространстве со специально подобранной римановой метрикой [10, 26].

Некоторые авторы начали изучать задачи о равновесии в пространствах Адамара [10–13]. В работе [10] получены теоремы существования для задач о равновесии на многообразиях Адамара, рассмотрены приложения к вариационным неравенствам и обоснован резольвентный метод для аппроксимации решений задач о равновесии и вариационных неравенств. В [11] для более общих задач о равновесии с псевдомонотонными бифункциями в пространствах Адамара получены теоремы существования, предложен проксимальный алгоритм и доказана его сходимость. Более конструктивному подходу посвящена работа [12], авторы которой, отталкиваясь от результатов статьи [5], предложили и обосновали для псевдомонотонных задач о равновесии в пространствах Адамара аналог экстраградиентного (или экстрапроксимального) метода. А в работе [13] предложен новый адаптивный экстрапроксимальный алгоритм, который, в отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага [5, 8, 17, 19], не производит вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требует знаний липшицевых констант бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о слабой сходимости (или Δ-сходимости) порожденных алгоритмом последовательностей.

В данной работе, продолжающей статью [13], предлагается новый итерационный регуляризованный адаптивный экстрапроксимальный алгоритм для приближенного решения задач о равновесии в метрических пространствах Адамара. Для регуляризации базовой адаптивной экстрапроксимальной схемы [13] использована классическая схема Гальперна [27], вариант которой для пространств Адамара изучен в [26]. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании фейеровского свойства экстрапроксимального алгоритма относительно множества решений задачи и известных результатов о сходимости схем типа Гальперна [4, 8, 21, 23, 26–28]. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

Вспомогательные сведения

Прежде всего, приведем основные понятия и факты, связанные с метрическими пространствами Адамара. С деталями можно ознакомиться в [26, 29, 30].

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $x,\ y \in X$. Геодезическим путем, соединяющим точки x и y, называют изометрию $\gamma : [0, d(x, y)] \to X$, такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множество $\gamma([0, d(x, y)]) \subseteq X$ обозначают $[x, y]$ и называют геодезическим сегментом с концами x и y (или просто геодезическим). Метрическое пространство (X, d) именуют геодезическим, если любые две точки X можно соединить геодезической, и однозначно геодезическим — если для любых двух точек X существует в точности одна их соединяющая геодезическая. Геодезическое пространство (X, d) называют $CAT(0)$-пространством, если для любой тройки точек y_0, y_1, $y_2 \in X$, таких, что $d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2)$, выполняется неравенство

$$d^2(x, y_0) \le \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_1) \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Неравенство (2) иногда именуют CN-неравенством [29] (заметим, что в евклидовом пространстве (2) превращается в тождество), а точку y_0 — серединой между точками y_1 и y_2 (она всегда существует в геодезическом пространстве). Известно, что $CAT(0)$-пространство является однозначно геодезическим [26]. Для двух точек x и y $CAT(0)$-пространства (X, d) и $t \in [0, 1]$ будем обозначать $tx \oplus (1-t) y$, такую единственную точку z сегмента $[x, y]$, что $d(z, x) = (1-t) d(x, y)$ и $d(z, y) = td(x, y)$. Множество $C \subseteq X$ называется выпуклым (геодезически выпуклым), если для всех x, $y \in C$ и $t \in [0, 1]$ выполняется $tx \oplus (1-t) y \in C$. Полезным инструментом для работы в $CAT(0)$-пространстве (X, d) является следующее неравенство:

$$\begin{gathered} d^2(tx \oplus (1-t) y, z) \le td^2(x, z) + (1-t) d^2(y, z) - t(1-t) d^2(x, y), \\ \{x, y, z\} \in X, \quad t \in [0, 1]. \end{gathered} \tag{3}$$

Примерами $CAT(0)$-пространств являются евклидовы пространства, $\mathbb{R}$-деревья, гильбертов шар с гиперболической метрикой и многообразия Адамара (полные связные римановы многообразия неположительной кривизны) [26, 29, 30].

Полное $CAT(0)$-пространство называют пространством Адамара.

Как и в гильбертовом пространстве, в пространствах Адамара корректно определен оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество C [26]. Точнее, для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $P_C x$ множества C со свойством $d(P_C x, x) = \min_{z \in C} d(z, x)$, причем имеет место характеризация [26]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \text{ и } d^2(y, z) \le d^2(x, z) - d^2(y, x) \quad \forall z \in C.$$

Пусть (X, d) — метрическое пространство, (x_n) — ограниченная последовательность элементов X и $r(x, (x_n)) = \overline{\lim_{n \to \infty}} d(x, x_n)$. Число $r((x_n)) = \inf_{x \in X} r(x, (x_n))$ называют асимптотическим радиусом (x_n), а множество $A((x_n)) = \{x \in X : r(x, (x_n)) = r((x_n))\}$ — асимптотическим центром (x_n). Известно, что в пространстве Адамара $A((x_n))$ состоит из одной точки [26]. Последовательность (x_n) элементов пространства Адамара (X, d) слабо сходится (или, как иногда говорят, Δ-сходится [29]) к элементу $x \in X$, если $A((x_{n_k})) = \{x\}$ для любой подпоследовательности (x_{n_k}). Известно, что произвольная последовательность элементов ограниченного, замкнутого и выпуклого подмножества K пространства Адамара имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из K [26, 29]. В гильбертовом пространстве рассмотренная Δ-сходимость совпадает с классической слабой сходимостью [26].

Пусть (X, d)— пространство Адамара. Функция $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется выпуклой (геодезически выпуклой), если для всех $x,\ y \in X$ и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\varphi(tx \oplus (1-t)\, y) \le t\varphi(x) + (1-t)\, \varphi(y).$$

Например, в пространстве Адамара функции $y \mapsto d(y, x)$ выпуклы. Если же существует такая константа $\mu > 0,$ что для всех $x,\ y \in X$ и $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\varphi(tx \oplus (1-t)\, y) \le t\varphi(x) + (1-t)\, \varphi(y) - \mu t(1-t)\, d^2(x, y),$$

то функция φ называется сильно выпуклой. Известно, что для выпуклых функций полунепрерывность снизу и слабая полунепрерывность снизу эквивалентны [26, p. 64], а сильно выпуклая полунепрерывная снизу функция достигает минимума в единственной точке.

Для выпуклой, собственной и полунепрерывной снизу функции $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}} =$ $= \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальный оператор определяется следующим образом [26]:

$$\operatorname{prox}_\varphi x = \arg\min_{y \in X} \left(\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x) \right). \tag{4}$$

Поскольку функции $\varphi + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$ сильно выпуклы, определение проксимального оператора (4) корректно, т.е. для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $\operatorname{prox}_\varphi x \in X$.

Следующие известные факты играют важную роль в доказательстве основного результата работы.

Лемма 1 [28]. Пусть числовая последовательность (a_n) имеет подпоследовательность (a_{n_k}) со свойством $a_{n_k} < a_{n_k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая неубывающая последовательность (m_k) натуральных чисел, что $m_k \to +\infty$ и $a_{m_k} \le a_{m_k+1},\ \ a_k \le a_{m_k+1}$ для всех $k \ge n_1$.

Лемма 2. Пусть (a_n) — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \le (1-\alpha_n)\, a_n + \alpha_n \beta_n$ для всех $n \in \mathbb{N},$ где последовательности (α_n) и (β_n) обладают свойствами: $\alpha_n \in (0, 1),$ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty,$ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \beta_n \le 0.$ Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Задача о равновесии в пространстве Адамара

Перейдем к формулировке задачи о равновесии в пространстве Адамара. Пусть (X, d) — пространство Адамара. Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq X$ и бифункции $F: C \times C \to \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии (или задачу равновесного программирования [2, 4, 9]):

$$\text{найти } x \in C:\ F(x, y) \ge 0 \quad \forall\, y \in C. \tag{5}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

 ISSN 0572-2691

2) функции $F(x,\cdot):C\to\mathbb{R}$ выпуклы и полунепрерывны снизу для всех $x\in C$;

3) функции $F(\cdot,y):C\to\mathbb{R}$ слабо полунепрерывны сверху для всех $y\in C$;

4) бифункция $F:C\times C\to\mathbb{R}$ псевдомонотонна, т.е.

$$\text{для всех } x,\ y\in C \text{ из } F(x,y)\ge 0 \text{ следует } F(y,x)\le 0.$$

5) бифункция $F:C\times C\to\mathbb{R}$ липшицевого типа, т.е. существуют две константы $a>0,\ b>0,$ такие, что

$$F(x,y)\le F(x,z)+F(z,y)+ad^2(x,z)+bd^2(z,y)\quad \forall\, x,y,z\in C. \tag{6}$$

Замечание 1. Условие 5 типа липшицевости в евклидовом пространстве введено в [3].

Замечание 2. Если $F(x,y)=(Ax,y-x),$ где $A:C\to H,$ C — непустое подмножество гильбертова пространства $H,$ то задача (5) сводится к классическому вариационному неравенству

$$\text{найти } x\in C:\ (Ax,y-x)\ge 0\quad \forall\, y\in C. \tag{7}$$

Если множество $C\subseteq H$ выпуклое и замкнутое, а оператор $A:C\to H$ псевдомонотонный, липшицевый и секвенциально слабо непрерывный, то для (7) выполняются условия 3–5.

Рассмотрим дуальную задачу о равновесии:

$$\text{найти } x\in C:\ F(y,x)\le 0\quad \forall\, y\in C. \tag{8}$$

Множества решений задач (5) и (8) обозначим S и S^*. При выполнении условий 1–4 имеем $S=S^*$ [11]. Кроме того, множество S^* выпукло и замкнуто.

Далее будем предполагать, что $S\ne\varnothing$.

Регуляризованный адаптивный экстрапроксимальный алгоритм

Для приближенного решения задачи о равновесии (5) рассмотрим регуляризованный с помощью схемы Гальперна [27] экстрапроксимальный алгоритм с адаптивным выбором величины шага [13].

Алгоритм 1

Инициализация. Выбираем элементы $a\in C,$ $x_1\in C,$ числа $\tau\in(0,1),$ $\lambda_1\in\in(0,+\infty)$ и последовательность $(\alpha_n),$ такую, что $\alpha_n\in(0,1),$ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,$ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty.$ Полагаем $n=1.$

Шаг 1. Вычислить

$$y_n=\operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)}x_n=\arg\min_{y\in C}\left(F(x_n,y)+\frac{1}{2\lambda_n}d^2(y,x_n)\right).$$

Шаг 2. Вычислить

$$z_n=\operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)}x_n=\arg\min_{y\in C}\left(F(y_n,y)+\frac{1}{2\lambda_n}d^2(y,x_n)\right).$$

Шаг 3. Вычислить

$$x_{n+1}=\alpha_n a\oplus(1-\alpha_n)\,z_n.$$

Шаг 4. Вычислить

$$\lambda_{n+1}=\begin{cases}\lambda_n, & \text{если } F(x_n,z_n)-F(x_n,y_n)-F(y_n,z_n)\le 0,\\ \min\left\{\lambda_n,\ \dfrac{\tau}{2}\dfrac{d^2(x_n,y_n)+d^2(z_n,y_n)}{(F(x_n,z_n)-F(x_n,y_n)-F(y_n,z_n))}\right\}, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{9}$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 3. Очевидно, что числовая последовательность (λ_n) неубывающая. Также она ограничена снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a, b\}}\right\}$.

Перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

Основные неравенства

Сначала сформулируем важный факт.

Лемма 3 [13]. Для $x \in C$ и $x^+ = \operatorname{prox}_{\lambda F(x,\cdot)} x$, где $\lambda > 0$, имеет место неравенство

$$F(x, x^+) - F(x, y) \le \frac{1}{2\lambda}(d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y)) \quad \forall y \in C. \tag{10}$$

Из неравенства (10) следует, что для последовательностей (y_n) и (z_n), порожденных проксимальными шагами алгоритма 1, имеют место неравенства

$$F(x_n, y_n) - F(x_n, y) \le \frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, y_n) - d^2(y_n, y)) \quad \forall y \in C. \tag{11}$$

$$F(y_n, z_n) - F(y_n, y) \le \frac{1}{2\lambda_n}(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, z_n) - d^2(z_n, y)) \quad \forall y \in C. \tag{12}$$

Лемма 4. Для последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$d^2(z_n, z) \le d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n), \tag{13}$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Из псевдомонотонности бифункции F следует

$$F(y_n, z) \le 0. \tag{14}$$

Из (14) и (12) вытекает, что

$$2\lambda_n F(y_n, z_n) \le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, z_n) - d^2(z_n, z). \tag{15}$$

Из правила вычисления λ_{n+1} следует оценка

$$F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n) \le \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}}(d^2(x_n, y_n) + d^2(z_n, y_n)). \tag{16}$$

Оценив снизу левую часть (15) с помощью (16), получим

$$2\lambda_n(F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n)) - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}(d^2(x_n, y_n) + d^2(z_n, y_n)) \le$$

$$\le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, z_n) - d^2(z_n, z). \tag{17}$$

Для оценки снизу $2\lambda_n(F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n))$ в (17) воспользуемся неравенством (11). Имеем

$$d^2(x_n, y_n) + d^2(y_n, z_n) - d^2(z_n, x_n) - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}(d^2(x_n, y_n) + d^2(z_n, y_n)) \le$$

$$\le d^2(z, x_n) - d^2(x_n, z_n) - d^2(z_n, z). \tag{18}$$

Перегруппировав (18), получим (13). ■

 ISSN 0572-2691

Лемма 5. Для последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$d^2(x_{n+1}, z) - (1-\alpha_n) d^2(x_n, z) + (1-\alpha_n)\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) +$$

$$+(1-\alpha_n)\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \le \alpha_n d^2(a, z) - \alpha_n (1-\alpha_n) d^2(a, z_n), \qquad (19)$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Из равенства $x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n$ и неравенства сильной выпуклости (3) следует оценка

$$d^2(x_{n+1}, z) \le \alpha_n d^2(a, z) + (1-\alpha_n) d^2(z_n, z) - \alpha_n (1-\alpha_n) d^2(a, z_n).$$

Для оценки сверху $d^2(z_n, z)$ воспользуемся леммой 4 и получим неравенство (19). ■

Сходимость алгоритма

Докажем ограниченность порожденных алгоритмом последовательностей.

Лемма 6. Порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) ограниченны.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Имеем

$$d(x_{n+1}, z) = d(\alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n, z) \le \alpha_n d(a, z) + (1-\alpha_n) d(z_n, z).$$

Поскольку существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$,

$$1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1-\tau \in (0, 1) \text{ при } n \to \infty .$$

Воспользовавшись неравенством леммы 4, получим

$$d(x_{n+1}, z) \le \alpha_n d(a, z) + (1-\alpha_n) d(x_n, z) \le \max\{d(a, z), d(x_n, z)\}$$

для всех $n \ge n_0$.

Следовательно,

$$d(x_{n+1}, z) \le \max\{d(a, z), d(x_{n_0}, z)\} \quad n \ge n_0.$$

Таким образом, последовательность (x_n) ограниченна.

Ограниченность последовательностей (y_n) и (z_n) следует из ограниченности (x_n) и леммы 4. ■

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть (X, d) — пространство Адамара, $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F : C \times C \to \mathbb{R}$ выполнены условия 1–5 и $S \ne \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) сходятся к элементу $P_S a$.

Доказательство. Рассмотрим элемент $z_0 = P_S a$. Из леммы 5 следует существование такого числа $M > 0$, что

$$\left| d^2(a, z_0) - (1-\alpha_n) d^2(a, z_n) \right| \le M \text{ для всех } n \in \mathrm{N}.$$

Тогда из неравенства леммы 5 получим оценку

$$d^2(x_{n+1}, z_0) - (1-\alpha_n) d^2(x_n, z_0) + (1-\alpha_n)\left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) +$$

$$+ (1-\alpha_n)\left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \le \alpha_n M. \tag{20}$$

Рассмотрим числовую последовательность $(d(x_n, z_0))$. Возможны два варианта: а) существует номер $\bar{n} \in \mathrm{N}$, такой, что $d(x_{n+1}, z_0) \le d(x_n, z_0)$ для всех $n \ge \bar{n}$; б) существует возрастающая последовательность номеров (n_k), такая, что $d(x_{n_k+1}, z_0) > d(x_{n_k}, z_0)$ для всех $k \in \mathrm{N}$.

Сначала рассмотрим вариант а). В этом случае существует $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_0) \in \mathbb{R}$. Поскольку $d^2(x_{n+1}, z_0) - d^2(x_n, z_0) \to 0$, $\alpha_n \to 0$ и $1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0, 1)$, то при $n \to \infty$ имеем

$$d(x_n, y_n) \to 0, \tag{21}$$

$$d(z_n, y_n) \to 0. \tag{22}$$

Из ограниченности (x_n) следует существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $w \in X$. Тогда из (21), (22) вытекает, что (y_{n_k}) и (z_{n_k}) слабо сходятся к w. Очевидно, что $w \in C$. Покажем, что обязательно $w \in S$. Имеем

$$F(y_{n_k}, y) \ge F(y_{n_k}, z_{n_k}) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \ge$$

$$\ge F(x_{n_k}, z_{n_k}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) +$$

$$+ d^2(z_{n_k}, y_{n_k})) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \ge$$

$$\ge -\frac{1}{2\lambda_{n_k}}(d^2(z_{n_k}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, z_{n_k})) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) +$$

$$+ d^2(z_{n_k}, y_{n_k})) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \ \forall y \in C. \tag{23}$$

Совершив предельный переход в (23) с учетом (21), (22) и слабой полунепрерывности сверху функции $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$, получаем

$$F(z, y) \ge \varlimsup_{k\to\infty} F(y_{n_k}, y) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

т.е. $z \in S$.

Докажем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} (d^2(a, z_0) - (1-\alpha_n) d^2(a, z_n)) \le 0. \tag{24}$$

 ISSN 0572-2691

Рассмотрим такую подпоследовательность (z_{n_k}), что

$$\lim_{k\to\infty}(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{n_k})d^2(a, z_{n_k})) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_n)d^2(a, z_n)).$$

Дополнительно можно считать, что $z_{n_k} \to w \in S$ слабо. Тогда, воспользовавшись слабой полунепрерывностью снизу функции $d^2(a,\cdot)$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{n_k})d^2(a, z_{n_k})) \le d^2(a, z_0)-d^2(a, w). \tag{25}$$

Поскольку $z_0 = P_S a = \arg\min_{w\in S} d(a, w)$, то из (25) следует (24).

Теперь из (24), неравенства

$$d^2(x_{n+1}, z_0) \le (1-\alpha_n)d^2(x_n, z_0)+\alpha_n(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_n)d^2(a, z_n)),$$

имеющего место для достаточно больших n, и леммы 2 делаем вывод, что $d(x_n, z_0)\to 0$. Из (21), (22) получаем $d(y_n, z_0)\to 0$ и $d(z_n, z_0)\to 0$.

Изучим вариант б). В этом случае рассмотрим последовательность номеров (m_k) со следующими свойствами (лемма 1):

i) $m_k \nearrow +\infty$;

ii) $d(x_{m_k+1}, z_0) \ge d(x_{m_k}, z_0)$ для всех $k \ge n_1$;

iii) $d(x_{m_k+1}, z_0) \ge d(x_k, z_0)$ для всех $k \ge n_1$.

Из неравенства леммы 5 и свойства ii следует

$$\alpha_{m_k}d^2(x_{m_k}, z_0)+(1-\alpha_{m_k})\left(1-\tau\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right)d^2(z_{m_k}, y_{m_k})+$$

$$+(1-\alpha_{m_k})\left(1-\tau\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right)d^2(y_{m_k}, x_{m_k}) \le$$

$$\le \alpha_{m_k}d^2(a, z_0)-\alpha_{m_k}(1-\alpha_{m_k})d^2(a, z_{m_k}) \le \alpha_{m_k}M .$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, y_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} d(z_{m_k}, y_{m_k}) = 0.$$

Рассуждениями, подобными вышеизложенным, показываем, что частичные слабые пределы последовательностей (x_{m_k}), (y_{m_k}) и (z_{m_k}) принадлежат множеству S. Как и ранее, получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{m_k})d^2(a, z_{m_k})) \le 0.$$

Далее для достаточно больших номеров k имеем

$$d^2(x_{m_k+1}, z_0) \le (1-\alpha_{m_k})d^2(x_{m_k}, z_0)+\alpha_{m_k}(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{m_k})d^2(a, z_{m_k})) \le$$

$$\le (1-\alpha_{m_k})d^2(x_{m_k+1}, z_0)+\alpha_{m_k}(d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{m_k})d^2(a, z_{m_k})).$$

Отсюда, учитывая свойство iii, получаем

$$d^2(x_k, z_0) \le d^2(x_{m_k+1}, z_0) \le d^2(a, z_0)-(1-\alpha_{m_k})d^2(a, z_{m_k}).$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, d^2(x_k, z_0) \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\, (d^2(a, z_0) - (1-\alpha_{m_k})\, d^2(a, z_{m_k})) \le 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_0) = 0$ и, в свою очередь, $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, z_0) = 0$. ■

Замечание 4. Если бифункция $F: C\times C \to \mathbb{R}$ обладает более сильным свойством липшицевого типа:

$$\exists c > 0:\ F(x, y) \le F(x, z) + F(z, y) + cd(x, z)\, d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in C,$$

то вместо (9) в алгоритме 1 можно использовать правило

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{d(x_n, y_n)\, d(z_n, y_n)}{(F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n))}\right\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для полученного такой модификацией алгоритма будет справедлив аналогичный теореме 1 результат о сходимости.

Вариант алгоритма для вариационных неравенств

Рассмотрим частный случай задачи о равновесии: вариационное неравенство в гильбертовом пространстве H:

$$\text{найти } x \in C:\ (Ax, y - x) \ge 0 \quad \forall y \in C. \tag{26}$$

Предположим, что выполнены следующие условия: множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое; оператор $A: C \to H$ псевдомонотонный, липшицевый и секвенциально слабо непрерывный; множество решений (26) не пусто. Пусть P_C — оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество C, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством

$$\| P_C x - x \| = \min_{z\in C} \| z - x \|.$$

Для вариационных неравенств (26) алгоритм 1 принимает следующий вид.

Алгоритм 2

Инициализация. Выбираем элементы $a \in C$, $x_1 \in C$, числа $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ и последовательность (α_n), такую, что $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

Шаг 2. Вычислить

$$z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

Шаг 3. Вычислить

$$x_{n+1} = \alpha_n a + (1-\alpha_n)\, z_n.$$

Шаг 4. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\| x_n - y_n \|^2 + \| z_n - y_n \|^2}{(Ax_n - Ay_n, z_n - y_n)}\right\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

 ISSN 0572-2691

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть H — гильбертово пространство, $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонный, липшицевый, секвенциально слабо непрерывный и существуют решения (26). Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n), (y_n) и (z_n) сильно сходятся к проекции элемента a на множество решений вариационного неравенства (26).

Замечание 5. Если оператор A монотонный, то результат теоремы 2 справедлив без предположения о секвенциальной слабой непрерывности оператора A.

Заключение

В данной работе, продолжающей статью [13], рассматриваются общие задачи о равновесии в метрических пространствах Адамара. Для приближенного решения задач предложен и изучен регуляризованный адаптивный экстрапроксимальный алгоритм. Алгоритм имеет следующую структуру

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C} \left(F(x_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \\ z_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \arg\min_{y\in C} \left(F(y_n, y) + \dfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n, \end{cases}$$

где $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, а $\lambda_n > 0$ подбирается адаптивно. В отличие от применяемых ранее [5, 8, 17, 19] правил выбора величины шага, в предлагаемом алгоритме не производится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знаний о ее липшицевых константах. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о сходимости порожденных алгоритмом последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n) к проекции элемента a на множество решений задачи о равновесии. Доказательство опирается на результаты и технику работ [8, 13, 26, 28]. Показано, что предложенный алгоритм применим к псевдомонотонным вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

В одной из ближайших работ авторы планируют рассмотреть более специальные варианты изученного регуляризованного адаптивного алгоритма для вариационных неравенств и минимаксных задач на многообразиях Адамара (например, на многообразии симметричных положительно определенных матриц).

Я.І. Ведель, С.В. Денисов, В.В. Семенов

РЕГУЛЯРИЗОВАНИЙ АДАПТИВНИЙ ЕКСТРАПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

Одним із напрямків сучасного прикладного нелінійного аналізу, що інтенсивно розвивається, є дослідження задач про рівновагу, відомих як нерівності Кі Фаня, задачі рівноважного програмування. У вигляді задачі про рівновагу можна сформулювати варіаційні нерівності, задачі математичного програмування, пошук рівноваги Неша. Останнім часом виник обумовлений проблемами математичної біології та машинного навчання інтерес до побудови теорії та алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара. У даній роботі розглядаються загальні задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для наближеного розв'язання задач запропоновано та досліджено новий ітераційний регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому алгоритмі не проводиться обчислень значень біфункції в додаткових точках та не потрібно знання про величину її ліпшіцевих констант. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшіцевого типу доведено теорему про збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Доведення засновано на використанні фейєрівської властивості екстрапроксимального алгоритму відносно множини розв'язків задачі та відомих результатів про збіжність схеми Гальперна. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Ключові слова: регуляризація, адаптивність, збіжність, екстрапроксимальний алгоритм, схема Гальперна, задача про рівновагу, псевдомонотонність, простір Адамара.

Ya.I. Vedel, S.V. Denisov, V.V. Semenov

REGULARIZED ADAPTIVE EXTRA-PROXIMAL ALGORITHM FOR EQUILIBRIUM PROBLEM IN HADAMARD SPACES

One of the intensively developing areas of modern applied nonlinear analysis is the study of equilibrium problems, also known as Ky Fan inequalities, equilibrium programming problems. In the form of an equilibrium problem, one can formulate variational inequalities, mathematical programming problems, and many game theory problems (search of Nash equilibrium). Recently, interest has arisen due to the problems of mathematical biology and machine learning to construct the theory and algorithms for solving mathematical programming problems in Hadamard metric spaces. In this paper, we consider equilibrium problems in Hadamard metric spaces. For an approximate solution of problems, a new iterative regularized adaptive extra-proximal algorithm is proposed and studied. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithm does not calculate bifunction values at additional points and does not require knowledge of information on of bifunction's Lipschitz constants. For regularization of basic extra-proximal scheme, the classic Halpern scheme is used. For pseudo-monotone bifunctions of Lipschitz type, the theorem on convergence of sequences generated by the algorithm is proved. The proof is based on the use of the Fejer property of the extra-proximal algorithm with respect to the set of solutions of problem and known results on the convergence of the Halpern scheme. It is shown that the proposed algorithm is applicable to pseudo-monotone variational inequalities in Hilbert spaces.

Keywords: regularization, adaptivity, convergence, extra-proximal algorithm, Halpern scheme, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, Hadamard space.

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium problems and applications. London : Academic Press, 2019. xx+419 p.
2. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys.* 1997. **37**. P. 1285–1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044
3. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In Daniele P. et al. (eds.) Equilibrium Problems and Variational Models. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 289–298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1
4. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. **6**. P. 117–136.
5. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization.* 2008. **57**. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
6. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2010. **42**, N 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20
7. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. **47**, N 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1

8. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In Zgurovsky M.Z. and Sadovnichiy V.A. (eds.). Continuous and distributed systems. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2014. **211**. P. 131–146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10
9. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In Goldengorin B. (ed.). Optimization and its applications in control and data sciences. *Springer Optimization and Its Applications*. 2016. **115**. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
10. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2012. **388**. P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
11. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society.* 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
12. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes.* 2019. **20**, N 1. P. 281–297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
13. Ведель Я.И., Голубева Е.Н., Семенов В.В., Чабак Л.М. Адаптивный экстрапроксимальный алгоритм для задачи о равновесии в пространствах Адамара. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2020. № 4. С. 21–33.
14. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York : Academic Press, 1980; Russian transl., Moscow : Mir, 1983. 256 p.
15. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon.* 1976. **12**, N 4. P. 747–756.
16. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2006. **128**. P. 191–201. https://doi.org/10.1007/s10957-005-7564-z
17. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim.* 2004. **15**, N 1. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629
18. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. **55**, N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
19. Stonyakin F.S., Vorontsova E.A., Alkousa M.S. New version of mirror prox for variational inequalities with adaptation to inexactness. In Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds.). Optimization and Applications. OPTIMA 2019. *Communications in Computer and Information Science*. Cham : Springer, 2020. **1145**. P. 427–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38603-0_31
20. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. **50**, N 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
21. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. **46**, N 5. P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40
22. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. **50**, N 5. P. 741–749. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y
23. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47**, N 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40
24. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. **53**, N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9
25. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2011. 408 p.
26. Bacak M. Convex analysis and optimization in Hadamard spaces. Berlin; Boston : De Gruyter, 2014. viii+185 p.
27. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. **73**. P. 957–961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
28. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis.* 2008. **16**. P. 899–912. https://doi.org/10.1007/s11228-008-0102-z.
29. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham : Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5
30. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A course in metric geometry. *Graduate Studies in Mathematics.* **33**. Providence : AMS, 2001. xiv+415 p.

Получено 14.05.2020

Статья рекомендована к публикации чл.-корр. НАН Украины С.И. Ляшко.