УДК 517.9; 519.6; 621.01

С.И. Ляшко, В.Г. Самойленко, Юл.И. Самойленко, И.В. Гапяк, Н.И. Ляшко, М.С. Орлова

ГЛОБАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ключевые слова: математические модели, уравнение Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами, асимптотические, солитоноподобные решения, малый параметр, сингулярные возмущения.

Введение

Двадцатое столетие ознаменовалось значительным прогрессом в изучении различных нелинейных задач в разных областях естественных наук, прежде всего, в физике, механике, биологии, химии, метеорологии [1]. Такое продвижение в развитии нелинейного естествознания достигнуто посредством гармоничного сочетания возможностей мощной вычислительной техники и достижений современной математики, в том числе, благодаря использованию ее методов и результатов при решении различных теоретических и важных прикладных задач [2–7]. Теоретическое объяснение получили такие сложные явления, как планетарные волны Россби, играющие важную роль при формировании климата на планетах, а также цунами, баротропные, бароклиновые, солитонные, бризерные, ударные волны, встречающиеся в океанах, атмосферах планет, плазме, нейронных и современных информационных системах [8–10]. Подобные нелинейные волны также рассматриваются в качестве важного элемента механизма нагрева океана на поверхности одного из спутников Юпитера — Европы.

Одним из ярких примеров нелинейных феноменов являются солитоны, в частности солитоны Россби [11], представляюшие собой устойчивые уединенные вихри. Представление о солитоне как об устойчивой уединенной волне в некотором смысле упрощенное, поскольку в общем случае солитоны обладают некоторыми дополнительными свойствами, к числу которых относятся локализация в пространстве, особый характер взаимодействия с себе подобными (сохранение формы после столкновений друг с другом), зависимость скорости их распространения от амплитуды [12].

Понятие *солитон* появилось в 1965 г. [13] в процессе поиска решения проблемы Фэрми–Паста–Улама. Впоследствии солитоны были обнаружены во многих системах: в плазме (ионнозвуковые и магнитозвуковые волны), магнетиках, бозе–эйнштейновских конденсатах холодных атомных газов [14–16], оптических волноводах с нелинейным показателем преломления (эффект Кэрра) [17, 18], в слоистой среде (гравитационные волны) [19]. Имеется еще много различных систем, в которых могут существовать солитоны. Например, предполагается, что Гигантский гексагон на Сатурне также является солитоном.

Многие из указанных выше явлений описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, относящимися к так называемым интегрируемым системам [20–22], ярким примером которых является уравнение Кортевега-де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (1)$$

Оно встречается в различных областях физики и астрономии, в том числе, в космологии. Уравнение (1) рассматривается при изучении гравитационных солитонов, например солитонных решений уравнений Эйнштейна, которые используются при математическом описании неоднородных космологических моделей, в частности, ряда интересных в физике гравитации явлений, таких как цилиндрические волны, черные дыры Шварцшильда и Керра, столкновение гравитационных волн [19].

Постановка задачи и предварительные замечания

Данная статья посвящена рассмотрению уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной вида

$$\varepsilon u_{xxx} = (t^2+1)u_t + (x^2+1)^{5/12}uu_x, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Подобные уравнения возникают при математическом описании волновых процессов в неоднородных средах с переменными характеристиками и малой дисперсией и относятся к так называемым vc KdV equation (variable coefficient Korteweg-de Vries equation) [23].

Особенностью уравнения (2) является наличие в нем нелинейных слагаемых и переменных коэффициентов, что не позволяет получить его точное решение в явном виде. Поэтому рассматривается задача построения его асимптотических солитоноподобных решений. Такие асимптотические решения в общем случае приближенно описывают *деформации* солитонных решений соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами, имеющие место при возмущениях их коэффициентов, и называются асимптотическими солитоноподобными [24].

Для решения указанной задачи используется нелинейный метод ВКБ, в соответствии с общей теорией которого [25] искомое приближенное решение записывается с помощью асимптотического ряда вида

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}}[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)] + O(\varepsilon^{N+1/2}), \ \varepsilon \to 0\,, \qquad (3)$$

где коэффициенты $u_j(x,t)$, $V_j(x,t,\tau)$, $j = \overline{0,2N}$, считаются бесконечно дифференцированными функциями своих переменных $(x,t) \in R^2$, величина $x - \varphi(t)$ называется фазой, $\tau = (x - \varphi(t))/\sqrt{\varepsilon}$ — фазовой переменной.

Особенностью данной задачи является то, что асимптотическое разложение (3) содержит дробные степени малого параметра.

Формула (3) представляет собой асимптотическое соотношение и ее нужно понимать в следующем смысле: некоторым образом может быть определено произвольное количество слагаемых данной суммы, например $2N+1$, и полученная сумма удовлетворяет уравнению (2) в асимптотическом смысле [26], т.е. невязка для приближенного решения (3) имеет порядок $O(\varepsilon^{N+1/2})$. Обозначение вида $g(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \to 0$ в (3) и в дальнейшем, означает, что существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $C = C_N(K) > 0$, для которых выполняется неравенство $|g(x, t, \varepsilon)| \le C\varepsilon^N$ при всех значениях $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и $(x, t) \in K$, где $K \subset R^2$ — некоторое ограниченное замкнутое множество.

Сумму (3) можно представить в виде $u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1/2})$, где $Y_N(x, t, \varepsilon) = U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon)$, причем функция $U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} u_j(x, t)$ называется регулярной частью асимптотики, а функция $V_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} V_j(x, t, \tau)$ — сингулярной частью асимптотики (3).

Члены асимптотического разложения (3) определяются из системы дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$(t^2+1)\frac{\partial u_0}{\partial t} + (x^2+1)^{5/12}\frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 = 0, \tag{4}$$

$$(t^2+1)\frac{\partial u_j}{\partial t} + (x^2+1)^{5/12} u_0(x, t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (x^2+1)^{5/12} u_j(x, t)\frac{\partial u_0}{\partial x} = f_j(x, t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + (t^2+1)\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\varphi'(t) - (x^2+1)^{5/12}\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + (t^2+1)\frac{\partial V_j}{\partial \tau}\varphi'(t) - (x^2+1)^{5/12}\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(V_0 V_j\right)\right) = F_j(x, t, \tau), \tag{7}$$

где функции $f_j(x, t)$, $F_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{1, 2N}$, бесконечно дифференцируемы и вычисляются рекуррентно.

Эти уравнения получены путем подстановки (3) в уравнение (2), выполнения стандартных действий над асимптотическими рядами и последующего приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях полученных равенств.

Решения уравнений (4), (5) можно найти методом характеристик, поэтому функции $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, 2N}$, считаем известными. Отметим также, что регулярная часть асимптотики (3) может равняться нулю или постоянной, поскольку она является фоновой функцией для солитоноподобного решения (3).

В соответствии со свойствами искомых солитоноподобных решений коэффициенты сингулярной части асимптотики (3) определяются при некоторых дополнительных условиях, а именно: величины $V_j(x, t, \tau)$, $j = \overline{0, 2N}$, должны быть бесконечно дифференцируемыми функциями своих переменных и, кроме того, для произвольного ограниченного замкнутого множества $K \subset R^2$ удовлетворять на бесконечности условиям по переменной τ вида

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K, \tag{8}$$

 ISSN 0572-2691

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\Big(f(x,t,\tau) - f^{-}(x,t)\Big) = 0,\ (x,t)\in K, \tag{9}$$

где $f^{-}(x,t)\in C^{\infty}(R^2)$ — некоторая функция, $n,\ p,\ q,\ r$ — целые неотрицательные числа.

Пространство функций $f(x,t,\tau)$, удовлеторяющих условиям (8), (9), обозначается посредством G_1, а в случае $f^{-}(x,t)=0$ соответствующее пространство — с помощью G_1^0. Заметим, что $G_1^0 \subset G_1$ и для функций из G_1^0 выполняется соотношение $\lim\limits_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau)=0$, т.е. эти функции быстроубывающие по фазовой переменной τ.

Решения уравнений (6), (7) определим так, чтобы выполнялись условия: $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0,\ V_j(x,t,\tau)\in G_1,\ j=\overline{1,2N}$. В этом случае разложение вида (3) называться асимптотическим решением ступенчатого типа, поскольку главный член сингулярной части асимптотики (3) — быстроубывающая функция фазовой переменной τ, в то время как все остальные члены сингулярной части асимптотики обладают не обязательно нулевым пределом при стремлении фазовой переменной τ к $-\infty$, т.е. график такого решения по своей форме геометрически может напоминать профиль ударной волны, а в предельном случае — ступеньку.

Построение асимптотических решений ступенчатого типа

В дальнейшем считаем, что регулярная часть асимптотики (3) тривиальна, т.е. $U_N(x,t,\varepsilon)\equiv 0$. Хотя после данного предположения уравнения (6), (7) существенно упрощаются, но, тем не менее, задача нахождения функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,2N}$, удовлетворяющих указанным выше условиям, остается довольно сложной. Отметим также, что дополнительно необходимо определить фазовую функцию $\varphi=\varphi(t)$, задающую кривую $\Gamma=\{(x,t)\in R^2 : x=\varphi(t)\}$, на которой предел решения (значение $u(x,t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$) имеет разрыв первого рода. Поэтому кривая Γ называется кривой разрыва.

Алгоритм нахождения функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,2N}$, состоит из двух этапов. Сначала уравнения (6), (7) для функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,2N}$, исследуются в некоторой окрестности кривой разрыва Γ и функцию $\varphi=\varphi(t)$ считаем априори известной, затем находятся решения уравнений (6), (7), редуцированных на кривую разрыва, и выводится дифференциальное уравнение для функции $\varphi=\varphi(t)$. На втором этапе редуцированные функции специальным образом продолжаются с кривой Γ.

Обозначим $v_j=v_j(t,\tau)=V_j(x,t,\tau)|_{x=\varphi(t)},\ \ j=\overline{0,2N}$. Из соотношений (6), (7) для этих функций получаем уравнения вида

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+(t^2+1)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-(\varphi^2(t)+1)^{5/12}v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+(t^2+1)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-(\varphi^2(t)+1)^{5/12}\frac{\partial}{\partial\tau}(v_0 v_j)=F_j(t,\tau), \tag{11}$$

где функции $F_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, легко вычисляются рекуррентно, а переменная $t\in R$ считается параметром. В частности,

$$F_1(t,\tau)=(t^2+1)\frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{5}{6}\tau\varphi(t)(\varphi^2(t)+1)^{-7/12}v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}. \quad (12)$$

Несложно убедиться, что при выполнении неравенства

$$A(\varphi,\varphi',t)=-(t^2+1)\varphi'(t)>0,\ \text{где}\ \varphi=\varphi(t), \quad (13)$$

уравнение (10) имеет точное решение:

$$v_0(t,\tau)=\frac{3(t^2+1)\varphi'(t)}{(\varphi^2(t)+1)^{5/12}}\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\sqrt{-(t^2+1)\varphi'(t)}}{2}(\tau+c_0)\right), \quad (14)$$

принадлежащее пространству G_1^0 при каждой постоянной $c_0\in R$. В дальнейшем, не теряя общности, полагаем $c_0=0$.

Из (11) следует, что если $v_j(t,\tau)\in G_1$, то $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, поскольку функции v_0v_j, $v_{j\tau}$, $v_{j\tau\tau\tau}$ принадлежат G_1^0. Это означает, что условие $F_j(t,\tau)\in G_1^0$ необходимо для существования решений уравнения (11) в пространстве G_1. С другой стороны, если $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, то решение уравнения (11) в пространстве G_1 существует тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности следующего вида [27]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0,\quad j=\overline{1,2N}. \quad (15)$$

Искомое решение уравнения (11) при каждом $j=\overline{1,2N}$ представляется с помощью формулы [28]

$$v_j(t,\tau)=\nu_j(t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\quad j=\overline{1,2N}, \quad (16)$$

где

$$\nu_j(t)=[(t^2+1)\varphi'(t)]^{-1}\lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau), \quad (17)$$

функция $\eta_j(t,\tau)\in G_1$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\eta_j(t,\tau)=1$, функция $\psi_j(t,\tau)\in G_1^0$,

$$\Phi_j(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_j(t,\xi)d\xi+E_j(t). \quad (18)$$

Здесь величина $E_j(t)$ определяется из (18) с учетом условия $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\Phi_j(t,\tau)=0.$

Из условия ортогональности (15) при $j=1$ для функции $\varphi=\varphi(t)$ выводится нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$(\varphi^2+1)\frac{d}{dt}((t^2+1)\varphi')=2(t^2+1)(\varphi')^2\varphi, \quad (19)$$

решение которого неявно определяются с помощью формулы $\mathrm{arctg}\,\varphi=-\alpha\,\mathrm{arctg}\,t+\beta$, где $\alpha,\beta\in R$ — постоянные интегрирования.

С учетом начального условия $\varphi(0)=0$ и неравенства (13) находим, что $\beta=0$, $\alpha>0$, и, таким образом, фазовая функция $\varphi=\varphi(t)$ определяется равенством $\varphi(t)=-\operatorname{tg}(\alpha \operatorname{arctg} t)$.

Легко видеть, что функция $\varphi=\varphi(t)$, как непрерывно дифференцируемое нетривиальное решение уравнения (19), при $\alpha>1$ определена лишь в некоторой окрестности начальной точки t = 0, т.е. на конечном интервале, а при $\alpha\in(0;1]$ — при всех $t\in R$. В частности, находим

$$\varphi(t)=\frac{2t}{t^2-1},\ t\in(-1;1),\text{ если }\alpha=2,\text{ и }\varphi(t)=-t,\ t\in R,\text{ если }\alpha=1.$$

Пусть $\alpha=1$. Тогда фазовая функция $\varphi(t)=-t$, а главный член сингулярной части асимптотики в (14) принимает вид

$$v_0(t,\tau)=-3(t^2+1)^{7/12}\operatorname{ch}^{-2}\vartheta(t,\tau), \tag{20}$$

где $\vartheta(t,\tau)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{2}\tau$, $\tau=\dfrac{x+t}{\sqrt{\varepsilon}}$, причем функция $v_0(t,\tau)$ определена при всех $(t,\tau)\in R^2$.

С другой стороны, непосредственным интегрированием уравнений (11) находим их общие решения в явном виде:

$$v_j(t,\tau)=\left(\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)d\tau_1+c_{1j}\right)v_{0\tau}(t,\tau)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}v_{0\tau}^{-2}(t,\tau_1)d\tau_1-$$

$$-\left(\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}v_{0\tau}^{-2}(t,\xi)\,d\xi d\tau_1+c_{2j}\right)v_{0\tau}(t,\tau), \tag{21}$$

где c_{1j}, c_{2j} — произвольные действительные постоянные, а функции $\Phi_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, удовлетворяют условию $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\Phi_j(t,\tau)=0.$

Формулы (20), (21) представляют значение функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$ при $x=\varphi(t)$, т.е. на кривой разрыва Γ. Задача о продолжении этих функций с кривой Γ в некоторую ее окрестность решается следующим образом: поскольку $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0$, $V_j(x,t,\tau)\in G_1$, $j=\overline{1,2N}$, то с учетом представления (16) продолжение функций $v_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, с кривой Γ в некоторую ее окрестность можно выполнить с помощью формул

$$V_0(x,t,\tau)=v_0(t,\tau), \tag{22}$$

$$V_j(x,t,\tau)=u_j^-(x,t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\ j=\overline{1,2N}, \tag{23}$$

где функции $u_j^-(x,t)\in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$, $j=\overline{1,2N}$, являются решениями задачи Коши вида

$$(t^2+1)\frac{\partial}{\partial t}u_j^-(x,t)=h_j^-(x,t), \tag{24}$$

$$u_j^-(x,t)\Big|_{\Gamma}=\nu_j(t),\ j=\overline{1,2N}. \tag{25}$$

Уравнения (24) и, в частности, функции $h_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, 2N}$, определяются подстановкой асимптотического ряда (3) с учетом формул (22), (23) в уравнение (2) и перехода в полученном соотношении к пределу при $\tau \to -\infty$, т.е. с использованием предельных при $\tau \to -\infty$ свойств функций $V_j(x, t, \tau)$, следующих из включений $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$, $V_j(x, t, \tau) \in G_1$, $j = \overline{1, 2N}$.

В соответствии с теорией дифференциальных уравнений в частных производных задача Коши (24), (25) в общем случае имеет решение, по крайней мере, в некоторой μ-окрестности $\Omega_\mu(\Gamma) = \{(x, t) \in R^2 : |x - \varphi(t)| < \mu\}$ кривой Γ, поскольку эта задача корректна в силу трансверсальности кривой Γ характеристикам оператора $(t^2 + 1)\dfrac{\partial}{\partial t}$ при всех $t \in R$. Более того, уравнение (24) можно рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, содержащее переменную x в качестве параметра, и поэтому оно легко интегрируется. Его правая часть — функция $h_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, 2N}$, рекуррентно определяется через функции $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$, $V_1(x, t, \tau)$, $V_2(x, t, \tau), \ldots, V_{j-1}(x, t, \tau) \in G_1$, является бесконечно дифференцируемой функцией переменной t и не зависит от неизвестной величины — функции $u_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, 2N}$. Отсюда следует, что решение задачи Коши (24), (25) существует при всех значениях $(x, t) \in R^2$, при которых определена правая часть в уравнении (24).

Известно, что при рассмотрении приближенных (асимптотических) решений задач с малым возмущением достаточно построить нулевое и первое слагаемые соответствующего асимптотического разложения [26]. Учитывая формулы (20), (22), находим

$$V_0(x, t, \tau) = v_0(t, \tau) = -3(t^2 + 1)^{7/12} \operatorname{ch}^{-2} \vartheta(t, \tau). \tag{26}$$

Перейдем к нахождению функции $V_1(x, t, \tau)$. Для этого из (18), с учетом формулы (12), получаем функцию

$$\Phi_1(t, \tau) = t(t^2 + 1)^{1/12} \Bigg[4\left(th\, \vartheta(t, \tau) - 1\right) -$$

$$- \left(6t\vartheta(t, \tau) - \frac{5}{2} th\, \vartheta(t, \tau) + \frac{15}{2} \vartheta(t, \tau) ch^{-2} \vartheta(t, \tau)\right) ch^{-2} \vartheta(t, \tau) \Bigg],$$

а из (21), с учетом формулы (20), — функцию

$$\begin{aligned} v_1(t, \tau) = \Bigg[&\frac{t}{(t^2+1)^{5/12}} \left(\frac{83}{4} - \frac{20}{3} ch^{-2} \vartheta(t, \tau) - \frac{105}{4} ch^{-4} \vartheta(t, \tau) + 6th\, \vartheta(t, \tau) \right) \tau - \\ &- \frac{t}{(t^2+1)^{11/12}} \Bigg[12 - 15\, ch^{-2} \vartheta(t, \tau) + \left(\frac{23}{4} - \frac{105}{4} ch^{-2} \vartheta(t, \tau) + \frac{1}{16} ch^{-4} \vartheta(t, \tau) \right) \times \\ &\times th\, \vartheta(t, \tau) - t(t^2+1)^{1/12} \left(\frac{3}{4} + \frac{315}{16} \tau^2 ch^{-4} \vartheta(t, \tau) \right) th\, \vartheta(t, \tau) - \\ &- \frac{105\, t}{(t^2+1)^{11/12}} th\, \vartheta(t, \tau) \ln \vartheta(t, \tau) \Bigg] ch^{-2} \vartheta(t, \tau) - \frac{4\, t}{(t^2+1)^{11/12}} \left(th\, \vartheta(t, \tau) - 1 \right). \end{aligned} \tag{27}$$

 ISSN 0572-2691

Далее, при $j=1$ из соотношения (17) находим

$$\nu_1(t) = -\frac{1}{t^2+1}\lim_{\tau\to-\infty} \Phi_j(t,\tau) = 8t(t^2+1)^{-11/12},$$

а из представления (16), с учетом свойства $\psi_j(t,\tau)\in G_1^0$, определяем функции

$$\eta_1(t,\tau) = -\frac{1}{2} th\,\vartheta(t,\tau) + \frac{1}{2},\ \ \psi_1(t,\tau) = \nu_1(t,\tau) - \eta_1(t,\tau)\ .$$

Функция $h_1^-(x,t)=0$, поскольку она определяется как предел при $\tau\to-\infty$ некоторого полиномиального выражения от функции $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0$ и ее производных. Тогда решение задачи (24), (25) при j = 1 записывается следующим образом:

$$u_1^-(x,t) = -8x(x^2+1)^{-11/12},$$

а функция $V_1(x,t,\tau)$ принимает вид

$$V_1(x,t,\tau) = u_1^-(x,t)\,\eta_1(t,\tau) + \psi_1(t,\tau), \tag{28}$$

где величины $u_1^-(x,t)$, $\eta_1(t,\tau)$, $\psi_1(t,\tau)$ представлены в явном виде выше.

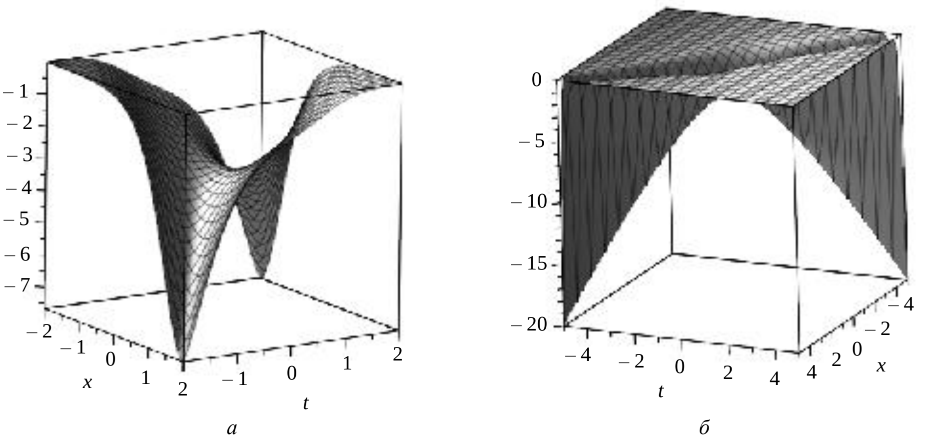
Таким образом, первое приближение для асимптотического решения ступенчатого типа для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами (2) имеет следующий вид:

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = V_0(x,t,\tau) + \sqrt{\varepsilon}V_1(x,t,\tau),\ \ \tau = \frac{x+t}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{29}$$

где функция $V_0(x,t,\tau)$ представляется формулой (26), а функция $V_1(x,t,\tau)$ — формулой (28).

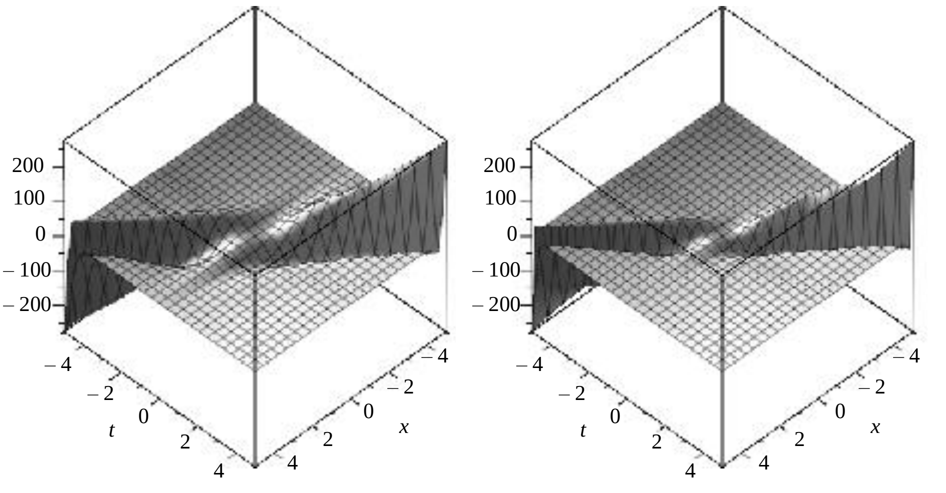
Первое приближение (29) определено при всех $(x,t)\in R^2$, т.е. является глобальным. Функция $Y_1(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (2) с точностью — $O(\sqrt{\varepsilon})$ для всех $(x,t)\in R^2$, а в предельном случае, при $\tau\to\pm\infty$, с более высокой точностью — $O(\varepsilon)$, что следует из общих теоретических результатов [25].

На рис. 1–3 представлены графики нулевого и первого слагаемых асимптотического решения ступенчатого типа вида (3), а также его первого приближения при $\varepsilon=0{,}95$, $\varepsilon=0{,}25$ соответственно. Анализ этих графиков показывает, что для адекватного описания решений ступенчатого типа уравнения вида (2) можно ограничиться первым асимптотическим приближением. На рис. 1 нулевое (главное) слагаемое $V_0(x,t,\tau)$; *а* — $\varepsilon=0{,}95$, *б* — $\varepsilon=0{,}25$. На рис. 2 слагаемое $V_1(x,t,\tau)$; *а* — $\varepsilon=0{,}95$, *б* — $\varepsilon=0{,}25$. На рис. 3 первое приближение $V_1(x,t,\varepsilon)$.



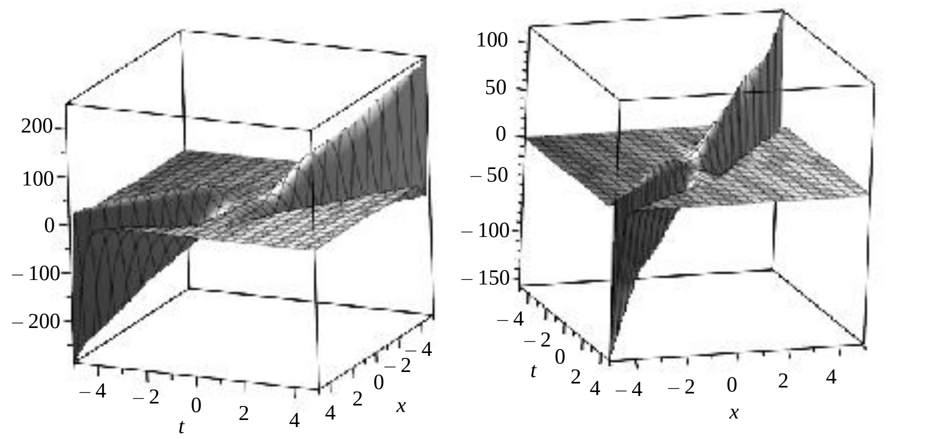
а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

Заключение

С помощью нелинейного метода ВКБ построены асимптотические решения ступенчатого типа для уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной. Рассмотрен случай нулевого фона, когда регулярная часть асимптотики тривиальна. Получено первое асимптотическое приближение для искомого решения, которое определено для всех значений независимых переменных, т.е. является глобальным.

Представлены графики нулевого и первого слагаемых построенного асимптотического решения, а также его первого приближения при различных значениях малого параметра. Анализ данных графиков показывает, что для адекватного описания решений ступенчатого типа для указанного уравнения можно ограничиться его первым асимптотическим приближением. Последнее свойство согласуется с теоретическими результатами, полученными авторами ранее.

С.І. Ляшко, В.Г. Самойленко, Юл.І. Самойленко,
І.В. Гап'як, Н.І. Ляшко, М.С. Орлова

ГЛОБАЛЬНІ АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СХІДЧАСТОГО ТИПУ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянуто рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром при старшій похідній. Подібні рівняння виникають при математичному описі хвильових процесів у неоднорідних середовищах зі змінними характеристиками і малою дисперсією. Особливістю досліджуваного рівняння є наявність в ньому нелінійних доданків і змінних коефіцієнтів, що не дозволяє отримати його точний розв'язок у явному вигляді. За допомогою нелінійного методу ВКБ побудовано його асимптотичні солітоноподібні розв'язки, які у загальному випадку наближено описують *деформації солітонних* розв'язків відповідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Шуканий розв'язок подано у вигляді суми регулярної і сингулярної частин асимптотики, отримано рівняння для визначення членів асимптотичного розкладу, описано процедуру побудови їх розв'язків. Розглянуто випадок нульового фону, коли регулярна частина асимптотики є тривіальною. Отримано перше асимптотичне наближення для асимптотичного розв'язку східчастого типу, який визначено для всіх значень незалежних змінних, тобто є глобальним. Подано графіки отриманих розв'язків для різних значень малого параметра. Їх аналіз показує, що для адекватного опису асимптотичних розв'язків східчастого типу можна обмежитися його першим асимптотичним наближенням. Остання властивість узгоджується із теоретичними результатами, отриманими авторами раніше.

Ключові слова: математичні моделі, рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, асимптотичні, солітоноподібні розв'язки, малий параметр, сингулярні збурення.

S.I. Lyashko, V.H. Samoilenko, Yu.I. Samoilenko,
I.V. Gapyak, N.I. Lyashko, M.S. Orlova

GLOBAL ASYMPTOTIC STEP LIKE SOLUTIONS TO THE SINGULARLY PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

The paper deals with the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients and a small parameter at the highest derivative. Similar equations arise while mathematical simulation of wave processes in inhomogeneous media with variable characteristics and a small dispersion. A specific feature of the problem is the presence of nonlinear terms and variable coefficients that does not allow us to obtain its exact solution in explicit form. By means of the nonlinear WKB technique its asymptotic soliton like solutions are constructed, that in general case approximately describe the deformations of soliton solutions of the corresponding equations with constant coefficients. The searched solution is given in the form of the sum of the regular and singular parts of the asymptotics. The equations for terms of the asymptotic expansions are obtained as well as the procedure of constructing their solutions is presented. There is considered the case of zero background when the regular part of the asymptotics is trivial. The first approximation is obtained for an asymptotic step like solution that is defined for all values of independent variables. It means that the solution is global. The graphs of the constructed solutions for various values of a small parameter are presented. Their analysis allows us to conclude that for an adequate description of the asymptotic step like solution it is sufficient to construct its first asymptotic approximation. The last property is consistent with the theoretical results obtained by the authors previously.

Keywords: mathematical models, the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients, asymptotic solutions, soliton-like solutions, small parameter, singular perturbations.

1. Scott A. Nonlinear science. Emergence and dynamics of coherent structures. Oxford : Oxford University Press, 2003. 504 p. ISBN: 9780198528524.
2. Control systems : theory and applications. V.M. Kuntsevich, V.F. Gubarev, Y.P. Kondratenko, D.V. Lebedev, V.P. Lysenko River Publishers, 2018. 330 p. ISBN: 9788770220248, e-ISBN: 9788770220255.
3. Lyashko I.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. Control of pseudo-hyperbolic systems by concentrated impacts. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2000. **32,** N 12. P. 23–36. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v32.i12.40.
4. Gubarev V.F. Control of plasma parameters in Tokomaks with a complicated magnetic configuration. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1996. **28,** N 1–2. P. 93–107. DOI: 10. 1615/JAutomatInfScien.v28.i1-2.100.
5. Nakonechnyi O.G., Kapustian O.A., Chikrii A.O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. 55, N 5. P. 785–795. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00189-6.
6. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51,** N 6. P. 1–11. DOI:10.1615 /JAutomatInfScien.v51.i6.10.
7. Yatsenko V.A., Cheremnyk O.K., Kuntsevich V.M., Semeniv O.V. Identification of models of geomagnetic activity and space weather prediction. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2009. **41,** N 12. P. 58–69.
8. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. New Jersey: John Wiley & Sons, 1999. 636 p. DOI:10.1002/9781118032954.
9. Gill A.E. Atmosphere — ocean dynamics. New York: Academic Press, 1982. 680 p.
10. Agrawal G.P. Fiber-optic communication systems. New York: Wiley, 1997. 555 p. ISBN 0471175404; 9780471175407.
11. Nezlin M.V. Rossby solitons (Experimental investigations and laboratory model of natural vortices of the Jovian Great Red Spot type). *Soviet Physics Uspekhi*. 1986. 29, N 9. P. 807 – 842. DOI: 10.1070/pu1986v029n09abeh003490.
12. Drazin P. G.; Johnson R. S. Solitons: an introduction. Cambridge University Press, 1989. 238 p. ISBN-13: 978-0521336550; ISBN-10: 0521336554.
13. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states. *Phys. Review Lett.* 1965. 15. P. 240 243. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev Lett.15.240.
14. Kever H., Morikawa G.K. Korteweg-de Vries equation for nonlinear hydromagnetic waves in a warm collision-free plasma. *Physics of Fluids*. 1969. 12. P. 2090–2093.
15. Tappert F.D. Improved Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves. *Physics of Fluids*. 1975. 15. P. 2446–2447.
16. Yamigno S. Propagation of dark solitary waves in the Korteveg-Devries-Burgers equation describing the nonlinear RLC transmission. *Journal of Modern Physics*. 2014. **5**. P. 394–401. DOI: 10.4236/jmp.2014.56051.

17. New G. Introduction to nonlinear optics. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 258 p.
18. Newel A.C. Solitons in mathematics and physics. SIAM: Philadelphia, 1985. 260 p. ISBN: 978-0-898711-96-7.
19. Belinski V., Verdaguer E. Gravitational solitons. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 258 p.
20. Blacmore D., Prykarpatsky A.K., Samoylenko V.H. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and integrability analysis. Singapore: World Scientific, 2011. 564 p. ISBN-13: 978-9814327152; ISBN-10: 9814327158.
21. Calogero F., Degasperis A. Spectral transform and solitons: Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. Netherlands: North-Holland Publishing Company, 1982. 516 p. ISBN 0444 863680.
22. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1982. 640 p. ISBN 9780122191206; ISBN10 0122191226; ISBN13 9780122191220.
23. Ji J., Zhang L., Wang L. et al. Variable coefficient KdV equation with time-dependent variable coefficient topographic forcing term and atmospheric blocking. *Advance Difference Equation*. 2019. **2019**, N 320. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2045-0.
24. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. Providence: American Mathematical Society, 2001. 243 p.
25. Samoilenko V.H., Samoilenko Yu.I. Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2012. 64, N 7. P. 1109 – 1127.
26. Prikazchikov V.G., Khimich A.N. Asymptotic estimates of the accuracy of eigenvalues of fourth order elliptic operator with mixed boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**, N 3. P. 358 – 365. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9935-5.
27. Samoilenko V.H., Samoilenko Yu.I. Existence of a solution to the inhomogeneous equation with the one-dimensional Schrodinger operator in the space of quickly decreasing functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. **187,** N 1. P. 70 – 76.
28. Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I. Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. **57,** N 1. P. 132–148.

Получено 29.04.2020