

ПОИСК ЦИКЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА УСРЕДНЕННОГО ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: нелинейные периодические дискретные системы, стабилизация периодических решений, алгоритмы поиска циклов, усредненное прогнозирующее управление.

Введение

Динамика даже простейших нелинейных дискретных систем может быть довольно сложной. Таким системам зачастую присущи крайне неустойчивые движения в фазовом пространстве, которые часто определяются как хаотические [1]. В силу теоретической значимости и инженерной применимости задачам, связанным с исследованием свойств дискретных систем, уделялось большое внимание в различных областях и исследованиях [2, 3]. Дискретные системы служат основным инструментом для понимания процессов в динамических системах с непрерывным временем, дискретизация проводится или методами типа Рунге–Кутты, или методами сечений Пуанкаре [4, 5]. Закон эволюции в различных задачах физики, инженерии, социологии и др. часто считается статическим, т.е. неизменным со временем (или случайностью), в таком случае математические модели представляются в виде автономных эволюционных уравнений. Тем не менее многие проблемы реального мира связаны с параметрами, зависящими от времени, и, кроме того, к неавтономным системам приводятся автономные при решении различных задач теории управления. В результате преобразования исходной системы чаще всего получаются периодические или почти периодические управляемые системы.

Одной из актуальных и важных задач теории динамических систем является разработка новых методов поиска хаотических или странных аттракторов и минимальных инвариантных множеств для нестационарных нелинейных дискретных систем. Эта задача актуальна и для стационарных систем.

Предполагается, что динамическая система имеет T -периодическую нестационарность и аттрактор (странный или хаотический), содержащий счетное множество неустойчивых циклов различных периодов. Эти циклы, знание которых позволит определить свойства динамической системы, обуславливают скелет аттрактора. Если с помощью управляющего воздействия локально стабилизировать какой-то цикл, то траектория системы останется в его окрестности, т.е. в системе будут наблюдаться регулярные движения, и будет известен цикл.

Рассматривается задача стабилизации цикла периода T или кратного ему. Методы решения задач стабилизации и поиска циклов можно разбить на две большие группы: прямые и не прямые [6, 7]. В не прямых методах строится система, порядок которой в T раз больше, нежели в исходной. И далее применяется один из методов поиска неподвижной точки соответствующей стационарной системы. Наиболее распространенным среди них является релаксационный метод Ньютона–Рафсона и его модификации [8, 9]. После того как все неподвижные точки найдены, из этого множества неподвижных точек надо выбрать собственно

© Д.В. ДМИТРИШИН, А.М. СТОКОЛОС, И.Э. ЯКОБ, 2020

периодические. В прямых методах ищутся сразу все точки цикла, т.е. стабилизируется цикл целиком. При этом исходная система замыкается управлением, основанным на принципе обратной связи: запаздывающей [10–13] или прогнозирующей [14–17]. Преимущества и недостатки таких управлений указаны в [18–20].

На практике возникает задача — распространить метод усредненного прогнозирующего управления поиска циклов в стационарных дискретных системах, разработанный в [15], на периодические дискретные системы и сформулировать необходимые условия того, что найденная орбита является действительно циклом.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается нелинейная периодическая дискретная система, которая при отсутствии управления имеет вид

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \quad x_n \in R^m, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $f(n, x)$ — дифференцируемая по всем компонентам вектора x векторная функция соответствующей размерности и $f(n+T, x) = f(n, x)$. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное множество A , т.е. если $\xi \in A$, то и $f(n, \xi) \in A$, $n = 1, 2, \dots, T$. Также предполагается, что в этой системе имеется один или несколько неустойчивых T -циклов $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$, где все векторы η_1, \dots, η_T различны и принадлежат инвариантному множеству A , т.е. $\eta_{j+1} = f(j, \eta_j)$, $j = 1, \dots, T-1$, $\eta_1 = f(T, \eta_T)$. Очень важно знать область локализации множества A . Некоторые методы оценки множества A можно найти, например, в [21, 22].

Мультипликаторы рассматриваемых неустойчивых циклов определяются как собственные значения произведений матриц Якоби $\prod_{j=1}^T f'(T-j+1, \eta_{T-j+1})$ раз-

мерностей $m \times m$ в точках цикла. Матрица $\prod_{j=1}^T f'(T-j+1, \eta_{T-j+1})$ называется

матрицей Якоби цикла $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$. Как правило, циклы $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (1) априори не известны. Следовательно, не известен и спектр $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ матрицы Якоби цикла. Элементы множества спектра именуется мультипликаторами цикла. В дальнейшем будем предполагать, что известна некоторая оценка множества M локализации мультипликаторов цикла. Так как цикл неустойчив, это множество не лежит целиком в центральном единичном круге комплексной плоскости.

Рассмотрим систему управления

$$x_{n+1} = F(n, x_n), \quad (2)$$

где $F(n, x) = \sum_{j=1}^N \vartheta_j f^{((j-1)T+1)}(n, x)$, $f^{(1)}(n, x) = f(n, x)$, $f^{(k)}(n, x) = f(n+k-1,$

$f^{(k-1)}(n, x)$, $k = 2, \dots, (N-1)T+1$. Числа $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$ вещественны. Нетрудно

проверить, что при $\sum_{j=1}^N \vartheta_j = 1$ в системе (2) также имеется цикл $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$.

Задача состоит в таком выборе параметра N и коэффициентов $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$, чтобы цикл $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (2) был локально асимптотически устойчив. Есте-

ственно, что при построении этих коэффициентов должна использоваться информация относительно множества локализации мультипликаторов M . Также желательно [21, 22], чтобы выполнялось дополнительное условие: инвариантное множество A системы (1) должно быть инвариантным и для системы (2). Это требование будет выполняться, например, если множество A выпуклое и $0 \leq \vartheta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, N$.

2. Построение матрицы Якоби для управляемой системы

Исследование устойчивости T -цикла системы (2) сводится к построению матрицы Якоби цикла $\prod_{j=1}^T F'(T-j+1, \eta_{T-j+1})$ и изучению расположения собственных ее

значений. Если все собственные значения матрицы $\prod_{j=1}^T F'(T-j+1, \eta_{T-j+1})$ лежат

в открытом центральном единичном круге комплексной плоскости, то соответствующий цикл локально асимптотически устойчив [23].

Обозначим $J_j = f'(j, \eta_j)$, $j = 1, \dots, T$, и запишем матрицу Якоби цикла $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (1) как $J = J_T \cdot \dots \cdot J_1$.

Введем вспомогательные матрицы $A_1 = I$, $A_2 = J_1$, $A_3 = J_2 \cdot J_1, \dots, A_{T-1} = J_{T-1} \cdot \dots \cdot J_1$ (I — единичная матрица порядка $m \times m$); $B_1 = J_T \cdot \dots \cdot J_1 = J$, $B_2 = J_T \cdot \dots \cdot J_2, \dots, B_T = J_T$.

Тогда $B_k A_k = J$, $k = 1, \dots, T$, $A_k B_k = (J_{k-1} \cdot \dots \cdot J_1) \cdot (J_T \cdot \dots \cdot J_k)$ и, следовательно, $(A_k B_k)^s = A_k J^{s-1} B_k$, $s = 1, 2, \dots$.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} (f^{(s)}(i, x))' \Big|_{x=\eta_i} &= (f(i+s-1, x))' \Big|_{x=\eta_{i+s-1}} \cdot (f^{(s-1)}(i, x))' \Big|_{x=\eta_i} = \\ &= (f(i+s-1, x))' \Big|_{x=\eta_{i+s-1}} \cdot (f(i+s-2, x))' \Big|_{x=\eta_{i+s-2}} \cdot \dots \cdot (f(i, x))' \Big|_{x=\eta_i}. \end{aligned}$$

Здесь в произведении s сомножителей. Положим $s = (j-1)T + 1$, тогда

$$(f^{((j-1)T+1)}(i, x))' \Big|_{x=\eta_i} = J_i (A_i B_i)^{j-1} = J_i A_i J^{j-2} B_i, \quad j = 2, \dots, N.$$

$$\text{Найдем теперь } F'(i, \eta_i) = \sum_{j=1}^N \vartheta_j (f^{((j-1)T+1)}(i, x))' \Big|_{x=\eta_i} = \vartheta_1 J_i + \sum_{j=2}^N \vartheta_j J_i A_i J^{j-2} B_i.$$

Выпишем матрицу Якоби цикла $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (2):

$$\begin{aligned} F'(T, \eta_T) \cdot \dots \cdot F'(1, \eta_1) &= J_T \left(\vartheta_1 I + A_T \left(\sum_{j=2}^N \vartheta_j J^{j-2} \right) B_T \right) \times \\ &\times J_{T-1} \left(\vartheta_1 I + A_{T-1} \left(\sum_{j=2}^N \vartheta_j J^{j-2} \right) B_{T-1} \right) \cdot \dots \cdot J_1 \left(\vartheta_1 I + A_1 \left(\sum_{j=2}^N \vartheta_j J^{j-2} \right) B_1 \right). \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} & J_k \left(\vartheta_1 I + A_k \left(\sum_{j=2}^N \vartheta_j J^{j-2} \right) B_k \right) = \\ & = J_k A_k \left(\vartheta_1 I + \left(\sum_{j=2}^N \vartheta_j J^{j-2} \right) B_k A_k \right) A_k^{-1} = J_k A_k \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right) A_k^{-1} \end{aligned}$$

и $J_k A_k = A_{k+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} F'(T, \eta_T) \cdot \dots \cdot F'(1, \eta_1) &= J_T A_T \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right) A_T^{-1} \cdot J_{T-1} A_{T-1} \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right) A_{T-1}^{-1} \cdot \dots \\ &\dots \cdot J_1 A_1 \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right) A_1^{-1} = J \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right)^T. \end{aligned}$$

При выводе формулы Якобиана предполагалось, что матрица J не вырождена. Это ограничение можно обойти, используя известный топологический прием, — вместо матрицы J рассматривать матрицу $J + \delta I$ и после всех выкладок устремить δ к нулю. Таким образом, получим следующий результат.

Лемма. Матрицу Якоби цикла $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (2) можно представить в виде

$$J \left(\sum_{j=1}^N \vartheta_j J^{j-1} \right)^T, \quad (3)$$

где J — матрица Якоби цикла $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ системы (1).

Вместо системы (2) можно рассматривать другую систему управления

$$x_{n+1} = f \left(n, \vartheta_1 x_n + \sum_{j=2}^N \vartheta_j f^{((j-1)T)}(n, x_n) \right). \quad (4)$$

При $\sum_{j=1}^N \vartheta_j = 1$ в системе (4) цикл $\{\eta_1, \dots, \eta_T\}$ сохраняется. Кроме того, матрица Якоби этого цикла системы (4) выражается через матрицу Якоби этого же цикла системы (1) по формуле (3).

Преимущество системы управления (4) перед системой (2) — это меньшее количество вычислений значений функции $f(x)$.

3. Основной результат

Результаты этого раздела сформулированы для системы (2), однако они переносятся без изменения на систему (4).

Рассмотрим линейную систему

$$x_{n+1} = P(n) x_n + b(n). \quad (5)$$

Здесь $x_n, b(n) \in R^m$, $P(n)$ — матрица размерности $m \times m$, $P(n+T) = P(n)$, $b(n+T) = b(n)$. Предположим, что матрица $J = P(T) \cdot P(T-1) \cdot \dots \cdot P(1)$ не имеет

собственного значения, равного единице. Тогда система (5) имеет единственный T -цикл и его устойчивость можно определить по собственным значениям матрицы J , которые называются мультипликаторами цикла. Полагаем, что цикл неустойчив, т.е. среди мультипликаторов есть такие, модуль которых больше единицы.

Выберем $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m+1}$ из условия

$$\frac{1}{\det(I - J)} \det(\mu I - J) = \sum_{j=1}^{m+1} \vartheta_j \mu^{j-1}.$$

Тогда система управления примет вид

$$x_{n+1} = P_1(n)x_n + b_1(n), \quad (6)$$

$$\text{где } P_1(n) = \vartheta_1 P(n) + \sum_{j=2}^{m+1} \vartheta_j P(n + (j-1)T) \cdot P(n + (j-1)T - 1) \cdot \dots \cdot P(n), \quad b_1(n+T) = b_1(n).$$

Согласно лемме справедливо равенство

$$P_1(T) \cdot P_1(T-1) \cdot \dots \cdot P_1(1) = J \left(\sum_{j=1}^{m+1} \vartheta_j J^{j-1} \right)^T.$$

Однако по теореме Гамильтона–Кэли правая часть этого равенства — нулевая матрица. Следовательно, T -цикл системы (6) асимптотически устойчив.

Рассмотрим общий случай.

Теорема. Пусть функция $f(n, x)$ T периодична по n , непрерывно дифференцируема по компонентам вектора x и у системы (1) имеется неустойчивый T -цикл с мультипликаторами $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$. Тогда этот цикл будет локально асимптотически устойчивым циклом системы (2), если

$$\mu_j [r(\mu_j)]^T \in D, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — открытый центральный единичный круг, $r(\mu) = \sum_{j=1}^N \vartheta_j \mu^{j-1}$, $\sum_{j=1}^N \vartheta_j = 1$.

Доказательство. Пусть система линейного приближения в окрестности цикла для системы (1) имеет вид $x_{n+1} = P(n)x_n$, и $J = P(T) \cdot P(T-1) \cdot \dots \cdot P(1)$. Соответственно, для системы (2) имеем $x_{n+1} = P_1(n)x_n$. Согласно лемме, $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - P_1(T) \cdot \dots \cdot P_1(1)) = \det(\lambda I - J[r(J)]^T)$. Приводя матрицу J к жордановой форме, этот полином можно представить как $\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda I - \mu_j [r(\mu_j)]^T)$, от-

куда следует заключение теоремы.

Отметим, что обязательно должно выполняться условие $r(1) = 1$. Если дополнительно $\vartheta_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, N$, то $\mu_j [r(\mu_j)]^T \in \bar{D}$ при $\mu_j \in \bar{D}$, откуда $|\mu_j [r(\mu_j)]^T| < |\mu_j|^{1+T} < |\mu_j|$. Эти неравенства означают, что если какой-то мультипликатор цикла системы (1) лежит в единичном круге, то соответствующий ему мультипликатор системы (2) будет лежать ближе к нулю, т.е. для управляемой системы качество стабилизации улучшается.

4. Некоторые вычислительные аспекты алгоритма

Если мультипликаторы стабилизируемого цикла $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ известны хотя бы приближенно, то коэффициенты усиления $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$ в системе (2) можно вы-
 бирать из условия $\frac{1}{\prod_{k=1}^m (1-\mu_k)} = \sum_{j=1}^{m+1} \vartheta_j \mu^{j-1}$. Здесь $N = m+1$.

Однако в большинстве случаев эти мультипликаторы не известны. Суще-
 ствуют разные методы оценки мультипликаторов [13, 23], один из которых связан
 с теорией характеристических показателей Ляпунова [5, 23, 24]. В некоторых за-
 дачах эти показатели можно рассматривать как обобщенные (усредненные) соб-
 ственные значения матрицы Якоби для нестационарного случая.

Рассмотрим скалярный случай ($m=1$). Так как мультипликатор один, доста-
 точно взять $N=2$, и система (2) примет вид

$$x_{n+1} = (1-\vartheta)f(n, x_n) + \vartheta f^{(T+1)}(n, x_n). \quad (7)$$

Выберем некоторое начальное значение коэффициента усиления $\vartheta = \vartheta_0$ и
 некоторое достаточно большое число v . Вычислим величину

$$\lambda(x_v) = \frac{1}{K} \ln \prod_{j=v}^{v+K} |f'(j, x_j)|, \quad (8)$$

где K также должно быть достаточно большим. Тогда число $\lambda(x_v)$ приближенно
 равно характеристическому показателю Ляпунова. Если x_v — циклическая точка
 периода T , то для мультипликатора цикла $|\mu| \approx e^{T\lambda(x_v)}$. Следовательно, в качестве
 нового приближения для коэффициента усиления можно взять $\vartheta = \frac{1}{1 \pm e^{T\lambda(x_v)}}$, где

знак плюс берется, если $\prod_{j=v}^{v+K} f'(j, x_j) < 0$, и минус — в противном случае. Опять

необходимо посчитать величину (8) уже с новым значением коэффициента усиления
 системы (7). Численные расчеты в различных модельных примерах показывают
 эффективность предложенного метода выбора коэффициента усиления. За две-
 три итерации для коэффициента ϑ и при достаточно густой сетке начальных зна-
 чений для x_0 удается найти циклы длин порядка $T=10^3$ и выше.

Рассмотрим векторный случай — используем матричный аналог характери-
 стического показателя Ляпунова

$$\Lambda(x_v) = \frac{1}{K} \text{Ln} \prod_{j=v}^{v+K} (f'(j, x_j))^*,$$

где $f'(j, x_j)$ — матрица Якоби в точке x_j , звездочкой обозначена операция
 транспонирования, Ln — матричный логарифм (вообще говоря, многозначный).
 Пусть $\lambda_1(x_v), \dots, \lambda_m(x_v)$ — собственные значения матрицы $\Lambda(x_v)$. Тогда в каче-
 стве приближений для коэффициентов усиления $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m+1}$ можно взять коэффи-

циенты полинома $\frac{1}{\prod_{k=1}^m (1-\lambda_k)} = \sum_{j=1}^{m+1} \vartheta_j \mu^{j-1}$. При необходимости проце-

дуру выбора коэффициентов надо повторить.

Предложенный выше метод, реализованный на компьютере, теоретически позволяет решить задачу определения периодических орбит динамической системы. Однако в связи с возможной хаотической динамикой исходной системы остаются вопросы: можно ли полагаться на эти численные решения, как контролировать численные результаты, какую точность вычислений следует выбирать?

Рассмотрим исходную систему (1) при $m = 2$ и систему с управлением (2) (рассмотрение системы (4) приводит к аналогичным результатам). Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является решением системы с управлением. Неплохо было бы контролировать невязку $U_n = \|x_{n+1} - f(n, x_n)\|$, если последовательность $\{x_n\}$ стремится к решению системы (1), то последовательность $\{U_n\}$ стремится к нулю. Пусть $\vartheta_1 = \frac{1}{1+\tau}$, $\vartheta_2 = \frac{\tau}{1+\tau}$ и управляющий параметр τ имеют порядок p , т.е. $\tau \sim 10^p$. Для циклов больших длин можно ожидать, что p достаточно велико. Тогда невязку U_n можно оценить как $U_n = \frac{1}{1+\tau} \|f^{(T+1)}(n, x_n) - f(n, x_n)\|$. В общем случае, если последовательность $\{x_n\}$ не стремится к решению системы (1), невязка будет иметь порядок 10^{-p} , т.е. $U_n \sim 10^{-p}$. Чтобы понимать, что невязка стремится к нулю, надо выбрать точность вычислений $\delta = 10^{-p_1}$, где p_1 должно быть существенно больше p . Тогда первой точкой контроля будет условие

$$U_n \sim 10^{-p_1}, \quad n \geq n_1. \quad (9)$$

Следующая точка контроля — это проверка T -периодичности полученного численного решения:

$$\|x_{n+T} - x_n\| \sim 10^{-p_1}, \quad n \geq n_1. \quad (10)$$

Разумеется, дополнительно надо проверить, что T — это минимальное число, для которого выполняется условие (10). Следовательно, найден цикл системы (2).

Третья точка контроля — проверка условий теоремы, т.е.

$$\left| \mu_j \left(\frac{\tau}{1+\tau} + \frac{1}{1+\tau} \mu_j \right)^T \right| < 1, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

где μ_1, μ_2 — мультипликаторы T -цикла системы (2).

Условия (9)–(11) являются необходимыми, чтобы найденная последовательность $\{x_n\}$ была T -циклом системы (1). Отметим, что условия (9) и (10) неэквивалентны: T -цикл системы (2) может не быть решением системы (1) вовсе.

Аналогично представляются условия контроля и для случая $m > 2$. Эффективность этих необходимых условий обусловлена тем, что их достаточно просто проверить.

5. Результаты численного эксперимента

Проиллюстрируем эффективность метода обобщенного прогнозирующего контроля для поиска периодических орбит на нескольких примерах.

Линейная система. Рассмотрим T -периодическую линейную систему

$$x_{n+1} = P(n)x_n + b(n), \quad (12)$$

где

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix}, P(n) = \begin{pmatrix} 3/2 + 1/2 \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,1) & -2 + 3 \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,3) \\ -\sin^2(\pi \cdot n/T + 0,2) & 3/2 + 1/2 \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,4) \end{pmatrix},$$

$$b(n) = \begin{pmatrix} \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,5) \\ \cos^2(\pi \cdot n/T + 0,5) \end{pmatrix}.$$

Положим $T = 21$. Найдем мультипликаторы цикла, т.е. собственные значения матрицы $P(T) \cdot P(T-1) \cdot \dots \cdot P(1)$: они равны $\mu_1 = -7,291 \dots \cdot 10^5$, $\mu_2 = -34,269 \dots$.

Выберем коэффициенты усиления $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ из условия $\frac{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)} = \vartheta_1 + \vartheta_2 \mu + \vartheta_3 \mu^2$, тогда $\vartheta_1 = 0,971 \dots$, $\vartheta_2 = 0,028 \dots$, $\vartheta_3 = 3,888 \dots \cdot 10^{-8}$. Система управления (2) примет вид

$$x_{n+1} = P_1(n) x_n + b_1(n),$$

где

$$P_1(n) = \vartheta_1 P(n) + \vartheta_2 \prod_{j=0}^T P(n+T-j) + \vartheta_3 \prod_{j=0}^{2T} P(n+2T-j),$$

$$b_1(n) = \vartheta_1 b(n) + \vartheta_2 \left(\sum_{k=0}^{T-1} \left(\prod_{j=0}^{T-k-1} P(n+T-j) \right) b(n+k) + b(n+T) \right) +$$

$$+ \vartheta_3 \left(\sum_{k=0}^{2T-1} \left(\prod_{j=0}^{2T-k-1} P(n+T-j) \right) b(n+k) + b(n+2T) \right).$$

Разумеется, при реализации алгоритма вычислять матрицу $P_1(n)$ и вектор $b_1(n)$ не нужно.

Выберем точность вычислений $\delta = 10^{-25}$, $x_0^1 = 0$, $x_0^2 = 0$. Определим, что при $n > 150$ значение невязки $U_n \sim \delta$ и величина $|x_n^1 - x_{n+T}^1| + |x_n^2 - x_{n+T}^2| \sim \delta$. Графики невязки для интервалов $n \in [1, 50]$ и $n \in [150, 250]$ представлены на рис. 1, а, б соответственно.

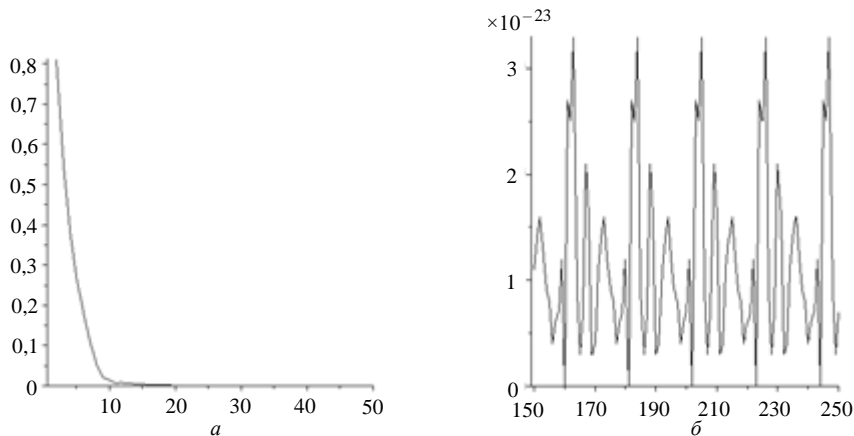


Рис. 1

Проверим, что условия (11) выполняются. 21-циклическая точка: $x_{500}^1 = -8,4486 \dots$, $x_{500}^2 = -3,2125 \dots$. На рис. 2 изображен 21 цикл системы (12) в плоскости (x_n^1, x_n^2) .

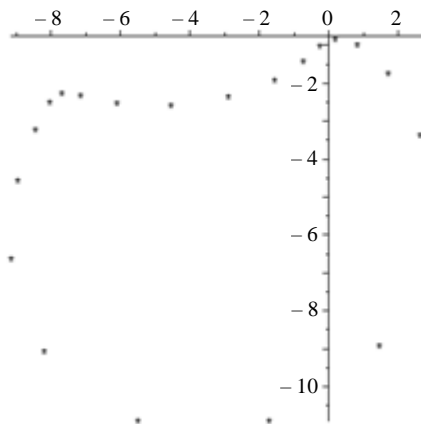


Рис. 2

Периодическое отображение Эно.

$$x_{n+1} = 1 + a(n)x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = b(n)x_n, \quad (13)$$

где $a(n) = -1,4 + \varepsilon \cdot \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,1)$, $b = 0,3 - \varepsilon \cdot \sin^2(\pi \cdot n/T + 0,2)$, $\varepsilon = 0,1$.

Если $\varepsilon = 0$, то отображение (13) является отображением с доминирующим мультипликатором, т.е. один мультипликатор по модулю существенно меньше единицы, а второй — отрицательный с большим модулем. Таким образом, систему управления можно брать в виде (7).

Найдем цикл длины $T = 101$. Возьмем значение управляющего параметра в системе (7) $\vartheta = \frac{1}{1+\tau}$, $\tau = 10^{10}$, и определим точность вычислений $\delta = 10^{-45}$. Стартуем с начальной точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, и выполним 8000 итераций. Найдем собственные значения v_1 и v_2 матрицы $B = \prod_{j=1}^{4000} f'(7000-j, x_j)$, где $f'(j, x_j) =$

$= \begin{pmatrix} 2a(j)x_j & 1 \\ b(j) & 0 \end{pmatrix}$. Далее определим приближенные значения показателей Ляпунова $\lambda_1 = \frac{1}{4000} \ln|v_1| \approx 0,34$, $\lambda_2 = \frac{1}{4000} \ln|v_2| \approx 0,05$. Осталось вычислить приближенное значение доминирующего мультипликатора $\mu_1 \approx -9 \cdot 10^{14}$. Выберем новое значение коэффициента усиления $\vartheta = \frac{1}{1+10^{15}}$ и проведем новые вычисления. Определим, что через 350 шагов значение невязки в рамках заданной точности равно нулю, т.е. $U_n \sim \delta$ при $n > 350$. Графики невязки для интервалов $n \in [300, 350]$ и $n \in [350, 550]$ представлены на рис. 3, а, б соответственно.

Проверим условие периодичности $|x_n - x_{n+T}| + |y_n - y_{n+T}| \sim \delta$, $n > 350$ (компьютер выдает нули). Вычислим мультипликаторы $\mu_1 \approx -4,78 \cdot 10^{14}$, $\mu_2 \approx 10^{-76}$,

и убедимся в выполнении условий (11). Таким образом, имеются основания полагать, что найденная орбита действительно является циклом длины 101. На рис. 4 черным цветом изображен цикл, серым — аттрактор.

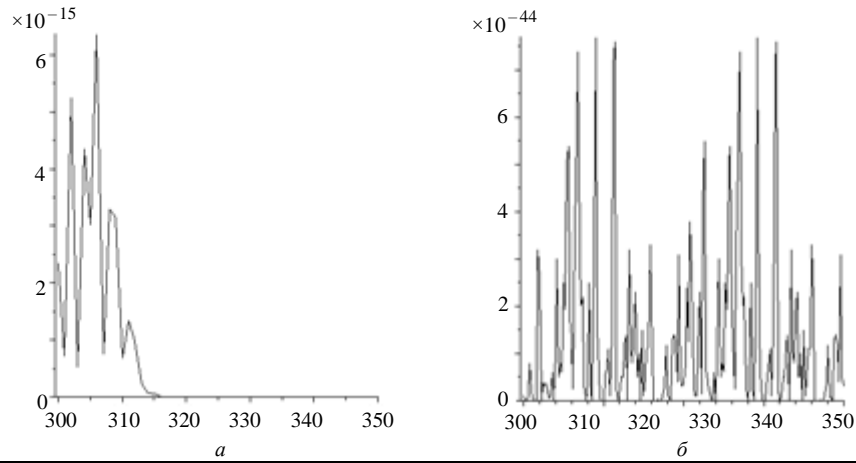


Рис. 3

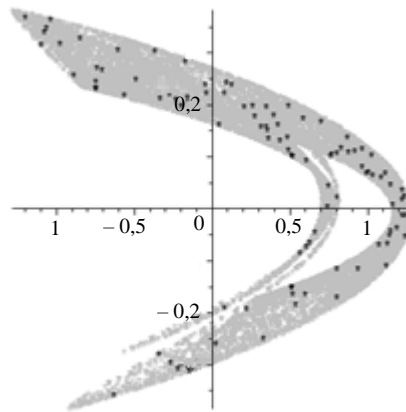


Рис. 4

Приведем приближенные значения координат 101-циклической точки: $x_{350} = -0,9900377 \dots$, $y_{350} = 0,0706991 \dots$

Заключение

В статье рассмотрена проблема стабилизации неустойчивых и априори неизвестных периодических орбит периодических нелинейных систем с дискретным временем. Для решения этой задачи применен метод прогнозирующего управления, который перенесен со стационарного случая на нестационарный. Предложены методы выбора коэффициентов усиления, основанные на приближенном вычислении характеристических показателей Ляпунова. Для оценки правильности численных результатов использованы три легко проверяемых критерия, необходимые для того, чтобы найденная орбита действительно была T -циклом исходной динамической системы. Несмотря на тройной контроль численных результатов вопрос их надежности, вообще говоря, решен не до конца. В первую очередь, из-за несовершенства вычислительной техники, если учитывать сверхвысокую точность представления данных и очень большие по величине параметры. Поэтому необходимо проверить метод на сверхкомпьютерах.

Д.В. Дмитришин, О.М. Стоколос, І.Е. Якоб

ПОШУК ЦИКЛІВ НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНОГО ПРОГНОЗУЮЧОГО КЕРУВАННЯ

Динаміка навіть найпростіших нелінійних стаціонарних дискретних систем є досить складною. Вона включає в себе як періодичні рухи, так і квазіперіодичні або рекурентні. У таких системах майже завжди присутні хаотичні атрактори, природа яких на сьогодні досить добре вивчена для широкого класу модельних стаціонарних рівнянь. В нестаціонарних системах така динаміка стає ще більш складною. У багатьох випадках хаотичні атрактори можна моделювати за допомогою періодичних рухів з великими періодами, тобто будувати так званий скелет атрактора. Пошук самих атракторів, як і мінімальних інваріантних множин на них, є важливим завданням прикладної математики — рішення використовуються в фізичних, хімічних, економічних науках, в теорії кодування, передачі сигналів та ін. Один із підходів вирішення завдань пошуку і верифікації циклів засновано на застосуванні методів стабілізації цих циклів. Ці методи можна розділити на дві групи: запізнілий контроль, який використовує знання про попередні стани системи, і прогнозний контроль, при якому приймаються майбутні значення стану системи при відсутності керування. Основним результатом роботи є представлення матриці Якобі циклу системи з керуванням через відповідну матрицю Якобі системи без керування. З цього представлення відразу отримуємо коефіцієнти посилення керування, якщо мультиплікатори циклу відомі. Якщо вони не відомі, то пропонується метод оцінки коефіцієнтів посилення через наближені значення показників Ляпунова. Запропоновано методи верифікації знайдених точок циклу у вигляді трьох необхідних умов циклічності точки: перевірка малості нев'язки, періодичності та локальної асимптотичної стійкості циклу. Роботу алгоритму продемонстровано на модельних прикладах.

Ключові слова: нелінійні періодичні дискретні системи, стабілізація періодичних рішень, алгоритми пошуку циклів, усереднене прогноуюче керування.

D.V. Dmitrishin, A.M. Stokolos, I.E. Yakob

SEARCH FOR CYCLES OF NONLINEAR PERIODIC DISCRETE SYSTEMS USING THE METHOD OF AVERAGE PREDICTIVE CONTROL

The dynamics of even the simplest nonlinear stationary discrete systems is very complex. It includes both periodic motions and quasiperiodic or recurrent ones. In such systems, chaotic attractors are almost always present, the nature of which has been studied quite well today, at least for a wide class of model stationary equations. In non-stationary systems such dynamics becomes even more complex. In many cases chaotic attractors can be modeled using periodic motions with large periods, i.e. build the so-called skeleton of an attractor. The search for both attractors themselves and minimal invariant sets on them is an important task of applied mathematics — solutions are used in the physical, chemical, economic sciences, in the theory of coding, signal transmission, etc. One of the approaches to solving search and verification of cycle problems is based on the application methods for stabilizing these cycles. These methods can be divided into two groups: delayed control, using knowledge of the previous states of the system, and predictive control, using future values of the state of the system in the absence of control. The main result of this work is the representation of the Jacobi matrix of a system cycle with control through the corresponding Jacobi matrix of a system without control. From this representation control gains are immediately obtained if the cycle multipliers are known. If they are not known, then a method is proposed for estimating the gain using approximate values of Lyapunov exponents. Verification methods for the found points of the cycle are proposed in the form of three necessary conditions for the cyclicity of the point: checking the smallness of the residual, checking the periodicity, and checking the local asymptotic stability of the cycle. The operation of the algorithm is demonstrated on model examples.

Keywords: nonlinear periodic discrete systems, stabilization of periodic solutions, loop search algorithms, average predictive control.

1. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. New York : Addison-Wesley Publ. Co., second edition, 1993. 360 p. (ISBN-10: 0201130467, ISBN-13: 978-0201130461).
2. Chen G., Dong X. From chaos to order: methodologies, perspectives and applications. Singapore : World Scientific, 1998. 776 p. doi:10.1142/9789812798640.
3. Jackson E.A. Perspectives of nonlinear dynamics. New York; Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1991. **II**. 652 p. (ISBN-13: 978-0521426336 , ISBN-10: 0521426332).
4. Ott E., Grebodgi C., Yorke J.A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* 1990. **64**. P. 1196–1199. doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196.
5. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A. Chaos: an introduction to dynamical systems. New York : Springer-Verlag N.Y. Inc., 1996. 603 p. doi 10.1007/b97589.
6. Yang D., Zhou J. Connections among several chaos feedback control approaches and chaotic vibration control of mechanical systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2014. **19**. P. 3954–3968. doi:10.1016/j.cnsns.2014.04.001.
7. Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Control of chaos: methods and applications. I. Methods. *Avtomat. i Telemekh.* 2003. N 5. P. 3–45. doi.org/10.1023/B:AURC.0000023528.59389.09.
8. Miller J.R., Yorke J.A. Finding all periodic orbits of maps using Newton methods: sizes of basins. *Physica D*. 2000. **135**, N 3-4. P. 195–211. doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00138-4.
9. Ypma T.J. Historical development of the Newton-Raphson method. *SIAM Rev.* 1995. **37**, N 4. P. 531–551. doi/10.1137/1037125.
10. Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling feedback. *Phys. Rev. Lett. A*. 1992. **170**, N 6. P. 421–428. doi.org/10.1016/0375-9601(92)90745-8.
11. Vieira de S.M., Lichtenberg A.J. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Phys. Rev. E*. 1996. **54**. P. 1200–1207. doi.org/10.1103/PhysRevE.54.1200.
12. Dmitrishin D., Khamitova A. Methods of harmonic analysis in nonlinear dynamics. *Comptes Rendus Mathematique*. 2013. **351**, N 9-10. P. 367–370. https://doi.org/10.1016/j.crma.2013.05.009.
13. Dmitrishin D., Skrinnik I., Lesaja G., Stokolos A. A new method for finding cycles by semilinear control. *Physics Letters A*. 2019. **383**. P. 1871–1878. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.03.013.
14. Polyak B.T. Stabilizing chaos with predictive control. *Automation and Remote Control*. 2005. **66**, N 11. P. 1791–1804. doi https://doi.org/10.1007/s10513-005-0213-z.
15. Dmitrishin D., Iacob E., Stokolos A. Average predictive control for nonlinear discrete dynamical systems. *Advances in systems science and applications*. 2020. **20**, N 1. P. 27–49. doi: 10.25728/assa.2020.20.1.775.
16. Ushio T., Yamamoto S. Prediction-based control of chaos. *Physics Letter A*. 1999. **264**. P. 30–35. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00782-3
17. Shalby L. Predictive feedback control method for stabilization of continuous time systems. *Advances in Systems Science and Applications*. 2017. **17**. P. 1–13. https://doi.org/10.25728/assa.2017.17.4.481
18. Dmitrishin D., Hagelstein P., Khamitova A., Stokolos A. Limitations of robust stability of a linear delayed feedback control. *SIAM J. Control Optim.* 2018. **56**. P. 148–157. https://doi.org/10.1137/16M1055980
19. Zhu J., Tian Y-P. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time systems via delayed feedback control. *Phys. Lett. A*. 2005. **343**. P. 95–107. doi: 10.1016/j.physleta.2005.06.007.
20. Ushio T. Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1996. **43**, N 9. P. 815-816. https://doi.org/10.1109/81.536757
21. Kuntsevich A.V., Kuntsevich V.M. Estimates of stable limit cycles of nonlinear discrete systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. **44**, N 9. P. 1–10. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i9.10.
22. Kuntsevich A.V., Kuntsevich V.M. Invariant sets for families of linear and nonlinear discrete systems with bounded disturbances. *Automation and Remote Control*. 2012. **73**, N 1. P. 83–96. https://doi.org/10.1134/S0005117912010067
23. Elaydi S. An introduction to difference equations. New York : Springer, 2005. 539 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3110-1.
24. Young L.S. Mathematical theory of Lyapunov exponents. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013. **46**. P. 2–17. doi:10.1088/1751-8113/46/25/254001.

Получено 27.04.2020