УДК 517.929

А.В. Шатырко, Д.Я. Хусаинов, Б. Пужа, В. Новотна

ДИНАМИКА ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГОНКИ ВООРУЖЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Ключевые слова: динамика гонки вооружений, модель Ричардсона, запаздывающий аргумент, представление решений.

Введение

Существует множество методов и, соответственно, моделей анализа вооруженных конфликтов [1–8]. Одной из первых попыток прогнозирования динамики вооружений и, как следствие, возникновения вооруженных конфликтов стало создание Льюисом Ф. Ричардсоном математической модели, с помощью которой успешно выполнялась предсказательная функция, если между какими-то противоборствующими странами возникала или существовала гонка вооружений [1, 2]. Проанализировав с использованием этой модели характер гонки вооружений, можно было сделать довольно точный прогноз дальнейшего развития ситуации. И модель работала достаточно эффективно, в первую очередь, в случаях краткосрочных прогнозов. С интересной и достаточно полной ее историей и интерпретацией можно ознакомиться в работе [8]. Справедливость модели в долгосрочных временных рамках рассмотрена в [9] на примере конфликта 1972–2010 гг. между Индией и Пакистаном; интересные результаты получены в [10] при исследовании современного «гибридного» конфликта на востоке Украины с Российской федерацией. Но, конечно, следует отметить, что все же для общего случая она так и не в состоянии была охватить весь сложный комплекс причин гонки вооружений [11]. Так, в частности, оригинальные модели Ричардсона были видоизменены и откорректированы при рассмотрении времен «Cold War» — взаимоотношений между военными блоками США и СССР [12], гонки ядерных вооружений [13] и др.

С одной стороны, предложенная Ричардсоном модель достаточно проста, так как записывается в виде системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. С другой стороны, она достаточно универсальна, поскольку успешно применяется в совершенно иных, отличных от военных, областях, например экономике и социологии [14–17]. Актуальность рассмотрения этой математической модели подтверждается рядом

* Work is conducted under the Agreement on scientific cooperation between the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv and the Faculty of Business and Management, Brno University of Technology. This paper was supported by grant FP-S-20-6376 of the Internal Grant Agency at Brno University of Technology.

современных научных работ в этом направлении, развитием разнообразных подходов, как с позиций теории дифференциальных уравнений, так и теории игровых задач [18], современных генетических алгоритмов [19], математической теории управления [20, 21] и т.п. Однако авторам не известны какие-либо результаты, связанные с временным запаздыванием на ответную реакцию в подобных моделях, чем и вызвано написание данной статьи.

Уравнения Ричардсона гонки вооружений

Приведем основные сведения, используемые при моделировании динамики роста вооружения с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 7, 8, 16]. Одной из отличительных особенностей в области анализа и прогнозирования динамики вооружений является учет экономических и военно-политических аспектов. Модели стратегии вооружений ориентируются на описание военно-политических отношений между странами. Экономические факторы играют роль лимитирующих компонент.

Предпосылка 1. Каждая из двух сторон (блоков сторон) наращивает вооружение пропорционально объему вооружений соперника. Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — уровни вооруженности двух сторон, то динамика наращивания вооруженности может быть описана системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = kx_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = lx_1(t) \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\,,\ B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix},\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $k > 0$, $l > 0$ интерпретируются как параметры реакции каждой из сторон на вооруженность другой. Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\det\{B - \lambda E\} = \det\begin{vmatrix} -\lambda & k \\ l & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - kl = 0\,.$$

Собственные числа системы — $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{kl}$. И решение задачи Коши $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ записывается в виде

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[x_1^0 + \sqrt{k/l}\,x_2^0]e^{\sqrt{kl}t} + \frac{1}{2}[x_1^0 - \sqrt{k/l}\,x_2^0]e^{-\sqrt{kl}t}\,,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}[x_1^0\sqrt{l/k} + x_2^0]e^{\sqrt{kl}t} - \frac{1}{2}[x_1^0\sqrt{l/k} - x_2^0]e^{-\sqrt{kl}t}\,.$$

Положением равновесия системы дифференциальных уравнений является седло. Если начальные условия не лежат на устойчивых сепаратрисах, то частные решения растут по экспоненциальному закону. Таким образом, вооруженность сторон может наращиваться до бесконечности.

Предпосылка 2. Сдерживающим фактором является действие экономического фактора, которое вызывает уменьшение темпов вооружения на величину, пропорциональную существующему вооружению. Соответствующая модель динамики вооружений имеет вид

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t)\,,\ A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты $a > 0$, $b > 0$ называют коэффициентами «усталости» [1]. В этом случае характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\det\{(A+B)-\lambda E\} = \det\begin{vmatrix} -a-\lambda & k \\ l & -b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a+b)\lambda + (ab-lk) = 0 .$$

Собственными числами системы будут $\lambda_{1,2} = [-(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4lk}\,]/2$. Корни характеристического уравнения действительные. Положением равновесия является либо узел, либо прямая особых точек, либо седло. Если выполняется неравенство $ab > lk$, то положением равновесия будет устойчивый узел, если $ab = lk$ — прямая особых точек, если $ab < lk$ — седло.

Таким образом, если коэффициенты «усталости» больше, чем «претензии на вооружение», то вооруженность стремится к нулю.

Предпосылка 3. Наконец, если стороны постоянно наращивают вооружение, независимо от состояния конфликта и материальной базы, то система дифференциальных уравнений расширяется до линейной неоднородной системы

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t) + f(t)\,,\ f(t) = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь постоянные $g > 0$, $h > 0$ определяются экономическими возможностями вооружения каждой из сторон. В этом случае при выполнении условия $ab > lk$ устойчивым является уже не нулевое положение равновесия, а стационарное, которое определяется, как решение системы уравнений

$$kx_2(t) - ax_1(t) + g = 0\,,\ lx_1(t) - bx_2(t) + h = 0 .$$

Оно имеет вид

$$\bar{x}_1 = \frac{bg + kh}{ab - kb}\,,\ \bar{x}_2 = \frac{\lg + ah}{ab - kb}.$$

Как и в предыдущем случае, получаем либо узел, либо прямую особых точек, либо седло. В этой ситуации обе стороны стараются поддерживать такой уровень вооруженности, какой им позволяет экономика.

Фактор временного запаздывания в моделях гонки вооружений

Если учитывать время принятия решений при разработке и внедрении видов вооружений, а также технические задержки при их реализации, то более адекватной является система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. К сожалению, если решение линейной стационарной системы без запаздывания (1) в аналитическом виде можно получить с использованием обычной экспоненты, то для систем даже с одним постоянным запаздыванием нахождение общего решения усложняется. Модель Ричардсона с запаздыванием общего вида можно записать в виде системы дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + f(t)\,,\ \tau = const > 0 . \tag{2}$$

Рассмотрим частные случаи моделей системы с запаздыванием (2).

1. Простейшей моделью (по аналогии с первым предположением) является система с «чистым запаздыванием»

$$\dot{x}(t) = Bx(t-\tau) + f(t)\,,\ B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} . \tag{3}$$

2. Модель, при которой «претензии на вооружение у сторон» одинаковые. Она имеет вид системы (2) с перестановочными матрицами A и B, т.е. $AB = BA$. Перестановочность выполняется при $a = b$, т.е. в случае

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Модель общего вида в форме (2) будет представлять собой систему дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом, в общем случае с неперестановочными матрицами $AB \neq BA$.

В данной работе рассмотрен частный случай 1 моделей системы с запаздыванием, т.е. системы с «чистым запаздыванием».

Замечание 1. Систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием можно трактовать как систему дифференциальных уравнений в бесконечномерном банаховом пространстве, точками которого являются отрезки траекторий $x(t+s)$, $-\tau \le s \le 0$. В этом случае записать ее решение в таком же простом виде, как и для уравнений без запаздывания, проблематично [22–25].

Общее представление решения неоднородной системы с запаздыванием

Приведем предварительно некоторые сведения из теории систем с запаздыванием. Рассмотрим линейную двумерную неоднородную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянным запаздыванием вида (2). Решение задачи Коши с начальными условиями $x(t) = \varphi(t)$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ $-\tau \le t \le 0$ для системы (2) имеет вид суммы двух решений

$$x = x_0(t) + \overline{x}(t), \tag{4}$$

где $x_0(t)$ — решение однородной системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{5}$$

удовлетворяющее заданным начальным условиям $x_0(t) = \varphi(t)$, $-\tau \le t \le 0$; и $\overline{x}(t)$ — решение неоднородной системы (2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\overline{x}(t) \equiv 0$, $-\tau \le t \le 0$.

Для системы однородных уравнений с «чистым запаздыванием», соответствующих случаю1, т.е.

$$\dot{x}(t) = Bx(t-\tau), \ x(t) = \varphi(t), \ -\tau \le t \le 0, \tag{6}$$

имеет место следующий результат.

Теорема 1 [22, с. 102]. Решение $x(t)$ задачи Коши системы (6) имеет вид

$$x(t) = \exp_\tau\{B, t\}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \exp_\tau\{B, t-\tau-s\}\varphi'(s)ds. \tag{7}$$

Здесь матричная функция $\exp_\tau\{B,t\}$, названная запаздывающим экспоненциалом, имеет вид

$$\exp_\tau\{B,t\} = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < t < -\tau, \\ I & , \quad -\tau \le t < 0, \\ I + B\dfrac{t}{1!} & , \quad 0 \le t < \tau, \\ I + B\dfrac{t}{1!} + B^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} & , \quad \tau \le t < 2\tau, \\ \dots & , \quad \dots \\ I + B\dfrac{t}{1!} + \dots + B^k\dfrac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!} & , \quad (k-1)\tau \le t < k\tau. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

При $\tau \to 0$ на промежутке $t \ge 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{\tau\to 0}\{\exp_\tau\{B, t\}\} = e^{Bt},$$

где

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!},$$

т.е. запаздывающий экспоненциал при $\tau \to 0$ совпадает с общепринятым определением матричного экспоненциала [24, 25].

Замечание 2. В начальных условиях интегрального представления (7) требуется непрерывная дифференцируемость начальной векторной функции $\varphi(t)$. Если взять интеграл по частям, то получим

$$x(t) = \exp_\tau\{B, t-\tau\}\varphi(0) + B\int_{-\tau}^{0} \exp_\tau\{B, t-2\tau-s\}\,\varphi(s)ds \tag{8}$$

— интегральное представление решения в предположении лишь непрерывности векторной функции $\varphi(t)$.

Для неоднородной системы с «чистым запаздыванием»

$$\dot{x}(t) = Bx(t-\tau) + f(t) \tag{9}$$

имеет место следующее.

Теорема 2 [22, с. 104]. Решение неоднородной системы (9), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $x(t) \equiv \theta$, θ — нулевой вектор, $-\tau \le t \le 0$, имеет вид

$$x_0(t) = \int_0^t \exp_\tau\{B, t-\tau-s\} f(s)ds. \tag{10}$$

На основании этих двух теорем решение задачи Коши неоднородной системы с ненулевыми начальными условиями и «чистым запаздыванием» можно записать в виде

$$x(t) = \exp_\tau\{B, t-\tau\}\varphi(0) + BI_1[\varphi(s)] + I_2[f(s)], \tag{11}$$

где

$$I_1[\varphi(s)] = \int_{-\tau}^{0} \exp_\tau\{B, t-2\tau-s\}\,\varphi(s)ds,\quad I_2[f(s)] = \int_0^t \exp_\tau\{B, t-\tau-s\}\, f(s)ds.$$

Замечание 3. Если известен промежуток времени $n\tau < t \le (n+1)\tau$, т.е. фактически число n, то можно получить более приемлемую для практического использования формулу представления решения задачи Коши, чем (11).

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Решение неоднородной системы (9) на промежутке $n\tau < t \le (n+1)\tau$, которое удовлетворяет начальным условиям $x(t) = \varphi(t)$, $-\tau \le t \le 0$, имеет вид

$$x(t) = \exp_\tau\{B, t-\tau\}\varphi(0) + BI_3[\varphi(s)] + I_4[f(s)], \tag{12}$$

где

$$I_3[\varphi(s)] = \int_{t-2\tau}^{(n-1)\tau} [I + \sum_{i=1}^{n-1} B^i \frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!}]\,\varphi(t-2\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{(n-1)\tau}^{t-\tau} B^n \frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!}\,\varphi(t-2\tau-\xi)d\xi.$$

$$I_4[f(s)] = \int\limits_{-\tau}^{0} f(t-\tau-\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(i-1)\tau}^{i\tau} [I + \sum_{j=1}^{i} B^j \frac{[\xi-(j-1)\tau]^j}{j!}] f(t-\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{n\tau}^{t} [I + \sum_{i=1}^{n} B^i \frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!}] f(t-\tau-\xi)d\xi .$$

Доказательство. Рассмотрим первый интеграл $I_3[\varphi(s)]$ зависимости (11). Произведем замену переменных

$$t - 2\tau - s = \xi .$$

Интегральные пределы в первом заменим следующим образом:

$$s = -\tau \Rightarrow \xi = t - \tau , \; s = 0 \Rightarrow \xi = t - 2\tau , \; s = t \Rightarrow \xi = -2\tau , \; ds = -d\xi .$$

Тогда первый интеграл можно будет записать в виде

$$I_3[\varphi(s)] = \int\limits_{-\tau}^{0} \exp_\tau\{B, t-2\tau-s\}\varphi(s)ds = \int\limits_{t-2\tau}^{t-\tau} \exp_\tau\{B, \xi\}\varphi(t-2\tau-\xi)d\xi .$$

Пусть $n\tau \le t < (n+1)\tau$. На промежутке $t-2\tau \le \xi < t-\tau$ матричная функция $\exp_\tau\{B, \xi\}$ имеет вид

$$\exp_\tau\{B, \xi\} = \begin{cases} I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + ... + B^{n-1}\frac{[\xi-(n-2)\tau]^{n-1}}{(n-1)!}, & t-2\tau \le \xi \le (n-1), \\ I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + ... + B^{n}\frac{[\xi-(n-1)\tau]^{n}}{n!}, & (n-1)\tau < \xi \le t-\tau. \end{cases}$$

Поэтому первый интеграл разбивается на два слагаемых

$$I_3[\varphi(s)] = \int\limits_{t-2\tau}^{t-\tau} \exp_\tau\{B, \xi\}\, \varphi(t-2\tau-\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{t-2\tau}^{(n-1)\tau} [I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + ... + B^{n-1}\frac{[\xi-(n-2)\tau]^{n-1}}{(n-1)!}]\varphi(t-2\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(n-1)\tau}^{t-\tau} \left\{ I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} + ... + B^{n-1}\frac{[\xi-(n-2)\tau]^{n-1}}{(n-1)!} + B^n\frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!} \right\} \times$$
$$\times \varphi(t-2\tau-\xi)d\xi.$$

Объединив одинаковые временные промежутки, получим

$$I_3[\varphi(s)] = \int\limits_{t-2\tau}^{(n-1)\tau} [I + \sum_{i=1}^{n-1} B^i \frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!}]\, \varphi(t-2\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(n-1)\tau}^{t-\tau} B^n \frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!} \phi(t-2\tau-\xi)d\xi .$$

Второй интеграл преобразуем аналогичным образом. Произведем замену $t - \tau - s = \xi$. Интегральные пределы заменим следующим образом:

$$s = t \Rightarrow \xi = -\tau , \; s = 0 \Rightarrow \xi = t - \tau , \; ds = -d\xi .$$

 ISSN 0572-2691

Поэтому

$$I_4[f(s)] = \int\limits_0^t \exp_\tau\{B, t-\tau-s\} f(s)ds = \int\limits_{-\tau}^{t-\tau} \exp_\tau\{B, \xi\} f(t-\tau-\xi)d\xi .$$

Пусть $n\tau \le t < (n+1)\tau$. На промежутке $-\tau \le \xi < t-\tau$ матричная функция $\exp_\tau\{B, \xi\}$ имеет вид

$$\exp_\tau\{B, t\} = \begin{cases} I, & -\tau \le \xi < 0, \\ I + B\dfrac{\xi}{1!}, & 0 \le \xi < \tau, \\ I + B\dfrac{\xi}{1!} + B^2\dfrac{(\xi-\tau)^2}{2!}, & \tau \le t < 2\tau, \\ I + B\dfrac{\xi}{1!} + B^2\dfrac{(\xi-\tau)^2}{2!} + B^3\dfrac{(\xi-2\tau)^3}{3!}, & 2\tau \le t < 3\tau, \\ \ldots & \ldots \\ I + B\dfrac{\xi}{1!} + \cdots + B^n\dfrac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!}, & (n-1)\tau \le t < n\tau, \\ I + B\dfrac{\xi}{1!} + \ldots + B^{n+1}\dfrac{(\xi-n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, & n\tau \le t < (n+1)\tau. \end{cases}$$

Поэтому второй интеграл будет иметь вид суммы интегралов

$$I_4[f(s)] = \int\limits_{-\tau}^{t-\tau} \exp_\tau\{B,\xi\} f(t-\tau-\xi)d\xi = \int\limits_{-\tau}^{0} If(t-\tau-\xi)d\xi + \int\limits_0^\tau (I + B\frac{\xi}{1!}) f(t-\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_\tau^{2\tau} (I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}) f(t-\tau-\xi)d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(n-1)\tau}^{n\tau} (I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} \ldots + B^n\frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!}) f(t-\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{n\tau}^{t} (I + B\frac{\xi}{1!} + B^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!} \ldots + B^n\frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!} + B^{n+1}\frac{(\xi-n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}) f(t-\tau-\xi)d\xi$$

или в виде

$$I_4[f(s)] = \int\limits_{-\tau}^{0} f(t-\tau-\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(i-1)\tau}^{i\tau} (I + \sum_{j=1}^{i} B^j \frac{[\xi-(j-1)\tau]^j}{j!}) f(t-\tau-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{n\tau}^{t} (I + \sum_{i=1}^{n} B^i \frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!})\, f(t-\tau-\xi)\, d\xi .$$

Учитывая все приведенные выше представления, получаем зависимость (12) теоремы 3.

Модель Ричардсона с запаздыванием

Используем приведенные в предыдущем разделе общие результаты представления решения неоднородной системы с запаздыванием применительно к системе, описываемой уравнениями Ричардсона с «чистым запаздыванием» (3) с постоянными начальными и внешними условиями.

Рассмотрим две возможности:

— постоянные начальные условия и постоянные внешние воздействия,

— запаздывание может находиться в четных и нечетных промежутках.

Сначала рассмотрим случай постоянных начальных условий и постоянных внешних воздействий. В этой ситуации интегралы могут быть вычислены. Получим следующий результат.

Теорема 4. Процессы динамики роста вооружения двух сторон, описываемые уравнениями с «чистым запаздыванием» (9), постоянными начальными условиями $x(t)=\varphi_0$, $-\tau \le t \le 0$, и постоянным внешним воздействием $f(t)=f_0$, $t \ge 0$, представляются зависимостями

$$x(t)=\exp_\tau\{B,t-\tau\}\varphi_0+B\,[I\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{B^i}{(i+1)!}[(t-i\tau)^{i+1}-(t-(i+1)\tau)^{i+1}]+\frac{B^n}{(n+1)!}[(t-n\tau)^{n+1}-(t-(n+1)\tau)^{n+1}]\varphi_0+$$

$$+\left\{I(n+1)\tau+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{B^j}{(j+1)!}[((i-j+1)\tau)^{j+1}-((i-j)\tau)^{j+1}]+I(t-n\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\frac{B^i}{(i+1)!}[(t-(i-1)\tau)^{i+1}-(n\tau-(i-1)\tau)^{i+1}]\right\}f_0. \qquad (13)$$

Доказательство. Поскольку функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ постоянные, зависимость (12) можно привести к виду

$$x(t)=\exp_\tau\{B,t-\tau\}\varphi(0)+B\int_{t-2\tau}^{t-\tau}(I+\sum_{i=1}^{n-1}B^i\frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!})\varphi_0 d\xi+$$

$$+\int_{(n-1)\tau}^{t-\tau}B^{n+1}\frac{[\xi-(n-1)\tau]^n}{n!}\varphi_0 d\xi+f_0\int_{-\tau}^{0}d\xi+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}(I+\sum_{j=1}^{i}B^j\frac{[\xi-(j-1)\tau]^j}{j!})f_0 d\xi+\int_{n\tau}^{t}(I+\sum_{i=1}^{n}B^i\frac{[\xi-(i-1)\tau]^i}{i!})f_0 d\xi.$$

Вычислив интегралы, получаем

$$x(t)=\exp_\tau\{B,t-\tau\}\varphi_0+B\left[I\tau+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{B^i}{(i+1)!}[\xi-(i-1)\tau]^{i+1}\Big|_{t-2\tau}^{t-\tau}+\frac{B^n}{(n+1)!}\times\right.$$

$$\left.\times[\xi-(n-1)\tau]^{n+1}\Big|_{t-2\tau}^{t-\tau}\right]\varphi_0+\left[I\tau+\sum_{i=1}^{n}\left[I\tau+\sum_{j=1}^{i}\frac{B^j}{(j+1)!}[\xi-(j-1)\tau]^{j+1}\Big|_{(i-1)\tau}^{i\tau}\right]+\right.$$

$$\left.+I(t-n\tau)+\sum_{i=1}^{n}\frac{B^i}{(i+1)}[\xi-(i-1)\tau]^{i+1}\Big|_{n\tau}^{t}\right]f_0.$$

Подставив пределы, запишем

$$x(t)=\exp_\tau\{B,t-\tau\}\varphi_0+B\left\{I\tau+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{B^i}{(i+1)!}[(t-i\tau)^{i+1}-(t-(i+1)\tau)^{i+1}]+\right.$$

$$\left.+\frac{B^n}{(n+1)!}[(t-n\tau)^{i+1}-(t-(n+1)\tau)^{i+1}]\right\}\varphi_0+I(n+1)\tau+$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{B^j}{(j+1)!}[((i-j+1)\tau)^{j+1}-((i-j)\tau)^{j+1}]+I(t-n\tau)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{B^i}{(i+1)!}[(t-(i-1)\tau)^{i+1}-(n\tau-(i-1)\tau)^{i+1}]\Bigg\}f_0 .$$

Рассмотрим второе ограничение, когда известен промежуток интегрирования. В этом случае степень матрицы B может быть вычислена и приведена к «каноническому виду». Рассмотрим случаи «четного и нечетного промежутка времени».

Следствие. Процессы динамики вооружения двух сторон, описываемые уравнениями Ричардсона с «чистым запаздыванием» (9), постоянными начальными условиями $x(t)=\varphi_0$, $-\tau\le t\le 0$, постоянным внешним воздействием $f(t)=f_0$, $t\ge 0$, и заданными промежутками времени, описываются зависимостями (13), где для четного $2n$ и нечетного $2n+1$

$$B^{2n}=\begin{bmatrix} k^n l^n & 0 \\ 0 & k^n l^n \end{bmatrix},\ B^{2n+1}=\begin{bmatrix} 0 & k^{n+1} l^n \\ k^n l^{n+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для матрицы B будут иметь место следующие соотношения:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix},\ B^2=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kl & 0 \\ 0 & kl \end{bmatrix},\ B^3=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl & 0 \\ 0 & kl \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k^2 l \\ kl^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^4=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k^2 l \\ kl^2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^2 l^2 & 0 \\ 0 & k^2 l^2 \end{bmatrix},\ B^5=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^2 l^2 & 0 \\ 0 & k^2 l^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k^3 l^2 \\ k^2 l^3 & 0 \end{bmatrix},\ldots .$$

Таким образом, для четного $2n$ получаем

$$B^{2n}=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k^n l^{n-1} \\ k^{n-1} l^n & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^n l^n & 0 \\ 0 & k^n l^n \end{bmatrix},$$

а для нечетного $2n+1$

$$B^{2n+1}=\begin{bmatrix} 0 & k \\ l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k^n l^n \\ k^n l^n & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k^{n+1} l^n \\ k^n l^{n+1} & 0 \end{bmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Заключение

В статье продолжено изучение моделей динамики гонки вооружений типа Ричардсона. Отличительной особенностью является введение в рассмотрение фактора временного запаздывания, который возникает в случае принятия решений при разработке и внедрении новых видов вооружений. Это приводит к тому, что вместо простых систем обыкновенных дифференциальных уравнений возникает необходимость исследовать качественное поведение решений дифференциально-разностных уравнений в функциональных пространствах.

Изучен случай общей системы уравнений с «чистым запаздыванием», для которой доказан результат, дающий более приемлемую для практического использования формулу представления решения соответствующей задачи Коши, чем известные ранее. На основании этого результата для моделей Ричардсона с «чистым запаздыванием» и постоянными начальными и внешними условиями построены аналитические выражения для зависимостей динамики роста вооружений противостоящих сторон.

В дальнейшем работа будет направлена на изучение качественного поведения решений моделей гонки вооружений, которые описываются более общими системами уравнений, чем системы с «чистым запаздыванием».

А.В. Шатирко, Д.Я. Хусаінов, Б. Пужа, В. Новотна

ДИНАМІКА ОДНІЄЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ГОНКИ ОЗБРОЄНЬ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Дану роботу присвячено подальшому вивченню моделей гонки озброєнь типу Річардсона. Проаналізовано простоту та універсальність основної моделі, продемонстровано успішні випадки її застосування. Обговорено певні передумови застосування подібних моделей. Відзначено, що раніше в таких моделях не враховувався фактор часового запізнювання, пов'язаний із прийняттям рішень на розробку і впровадження нових видів озброєнь. У зв'язку з цим запропоновано розглядати моделі даних процесів у вигляді систем функціонально-диференціальних рівнянь. Вказано кілька окремих випадків подібних моделей: моделі з «чистим запізненням», моделі з однаковими претензіями сторін, загальні моделі. Детально розглянуто випадок систем з «чистим запізненням». Спочатку результати отримано для загального вигляду систем функціонально-диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється. Потім ці результати зведено до систем типу Річардсона. Побудовано аналітичні вирази розв'язків відповідних задач Коші в залежності від виду аргументу, що запізнюється. Отримані результати для систем з «чистим запізненням» досить конструктивні з точки зору практичних обчислень і в подальшому можуть бути поширені на випадок загальних моделей динаміки гонки озброєнь з відхиленням аргументу. Розглянуто модель, що враховує фактор часового запізнення, пов'язаний із прийняттям рішень на розробку та впровадження нових видів озброєнь. Тому моделі представлено у вигляді систем рівнянь з відхиленням аргументу. Для систем з «чистим запізненням» (загального вигляду та типу Річардсона) доведено результати, що дають аналітичні вирази представлення розв'язків відповідних задач Коші.

Ключові слова: динаміка гонки озброєнь, модель Річардсона, запізнювальний аргумент, представлення розв'язків.

A.V. Shatyrko, D.Ya. Khusainov, B. Puza, V. Novotna

THE DYNAMICS OF ONE ARMS RACE MATHEMATICAL MODEL WITH DELAY

This work is devoted to the further development of the study of the arms race models, such as Richardson type models. The simplicity and universality of the basic model are analyzed, successful cases of its application are specified. Certain preconditions for the use of such models are discussed. It is noted that previously such models did not take into account the factor of time delay, which is associated with decision-making on the development and implementation of new weapons. In this regard, the authors propose to consider models of these processes in the form of systems of functional-differential equations. There are several separate cases of such models: models with a pure delay, models with the equal claims of the parties, general models. The case of systems with pure delay is considered in detail. Initially, the results are obtained for the general form of systems of functional-differential equations with a time-delay argument. Then these results are reduced to Richardson type systems. Analytical expressions for the solutions of the corresponding Cauchy problems depending on the type of the delayed argument are constructed. The results obtained for systems with a pure delay are quite constructive in sence of practical calculations and can be further extended to the case of general models of the dynamics of the arms race with a deviating argument.This work is devoted to the further development of the study of arms race models in the Richardson-type. The model that takes into account the time delay factor related to decision-making on the development and implementation of new types of weapons is considered. Therefore, the models have the form of systems of differential-difference equations. For systems with pure time delay (general form and Richardson-type), the results are proved, which give analytical expressions for the representation of solutions of the corresponding Cauchy problems.

Keywords: dynamics of the arms race, Richardson model, time-delay argument, solution representation.

1. Richardson L.F. Generalized foreign politics: A study in group psychology. *British Journal of Psychology, Monograph Supplement*. Cambridge : Cambridge University Press, 1939. N 23. 99 p.
2. Richardson L.F. Arms and insecurity: A mathematical study of the causes and origins of war. Edited by N. Rashevsky and E. Trucco. Pittsburgh : Boxwood Press, 1960. 249 p.
3. Rapoport A., Lewis F. Richardsons mathematical theory of war. *Journal of Conflict Resolution.* 1957. **1**, N 3. P. 249–299.
4. Rapoport A. Mathematical models in the social and behavioral science. N.Y. : Wiley, 1983. 507 p.
5. Olinick M. An introduction to mathematical models in social and life scince. New York : Addison-Wesley. 1978. 466 p.
6. Shatyrko A., Puzha B., Novotna V. Comparative analysis and new field of application of Lanchester's combat models. Post-conference proceedings of selected papers extended version Conference MITAV–2018. Czech Republic : Brno, 2018. P. 118–133. http://mitav.unob.cz/data/MITAV2018.pdf
7. Саати Т.П. Математические модели конфликтных ситуаций. М. : Сов. радио, 1977. 304 с.
8. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. М. : Логос, 2001. 296 с.
9. Ron P. Smith. The influence of the richardson arms race model. In Nils Petter Gleditsch Lewis Fry Richardson: His Intellectual Legacy and Influence in the Social Sciences Cham : Springer, 2019. P. 25–34. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-31589-4
10. Muhammad Ramzan Sheikh, Muhammad Aslam. Is there an arms race between Pakistan and India? An application of GMM. *The Lahore Journal of Economics*. 2015. **20**, N 2. P. 35–51.
11. Геселева Н.В., Новик А.С. Тенденції витрат на оборону у протистоянні Росія–Україна (за моделлю гонки озброєнь Річардсона). *Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці*. 2019. Вип. 27. С. 375–381.
12. Мангейм Дж., Рич Р.К. Политология: методы исследования. М. : Мир, 1997. 544 с.
13. Intrihgator M.D., Brito D.L. Non-armageddon solutions to the arms race. *Arms Control*. 1985. **6**. P. 41–57.
14. Li Anpeng. Nuclear Arms Race and Environment**.** https://mpra.ub.uni-muenchen.de/43883/ MPRA Paper N 43883
15. Прасолов А.В. Математические модели динамики в экономике. СПб. : Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та экономики и финансов, 2000. 247 с.
16. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М. : Физматлит, 2005. 320 с.
17. Miltiadis Chalikias. Implementation of Richardson's arms race model in advertising expenditure of two competitive firms. *Applied Mathematical Sciences*. 2014, **8**, N 81. P. 4013–4023. http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.45336
18. Atsushi ISHIDA. An initial condition game of Richardson's arms race model. *Sociological Theory and Methods*. 2015. **30**, N 1. P. 37–50.
19. Timothy Hackworth. A G-A based approach to arms races. Ph.D. Thethis. Univ. of London, 2003. 249 p.
20. Никольский М.С. Некоторые задачи оптимального управления, связанные с моделью Л. Ричардсона гонки вооружений государств. *Проблемы динамического управления:* 2009, Вып. 4. С.113–123.
21. Никольский М.С. Об управляемых вариантах модели Л. Ричардсона в политологии. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2011. **17**, № 1. С. 121–128.
22. Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Ружичкова М. Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. Киев : ГП Информ.-аналит. агентство, 2015. 252с.
23. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296с.
24. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984. 421 с.
25. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М :. Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 211 с.
26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1969. 368 с.

Получено 29.07.2020