УДК 519.6

Т.В. Волошина, Дж.У. Байсалов

О МАТРИЧНОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, игровые задачи динамики, ряды Фурье, линейные методы суммирования.

Введение

Одной из основных проблем прикладной математики являются системы, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями. Задачи, в которых рассматривается управление объектом в целях получения желаемого результата, относятся к игровым задачам динамики [1–3]. На современном этапе идеи и методы игровых задач динамики [4–7] нашли применение в разных областях науки, в том числе в теории приближения функций, а именно в экстремальных задачах функционального анализа. Особое место среди этих экстремальных задач занимает задача отыскания наилучшего приближения, которая в свою очередь приводит к вопросам суммирования рядов. Проблемы суммирования рядов, в том числе рядов Фурье, возникли довольно давно. На протяжении многих десятилетий их решением занимались крупнейшие как зарубежные, так и отечественные математики.

Оказывается, что просуммировать любой тригонометрический ряд Фурье совсем не трудно. Но, во-первых, он не всегда сходится равномерно [8, с. 18] даже при сходимости в каждой точке. Во-вторых, если надо суммировать много членов тригонометрического ряда, то происходит накопление погрешности как входных данных какого-нибудь математически смоделированного естественного процесса, так и округления.

Для устранения указанных выше проблем в прикладной математике предложен новый подход, а именно метод прямоугольного линейного матричного суммирования рядов Фурье [8, с. 36; 9, 10]. Следует отметить, что прямоугольные линейные матричные методы суммирования рядов Фурье более устойчивы по отношению к погрешности приближения по сравнению с хорошо изученными треугольными линейными методами [8, с. 15], которые в большинстве случаев до сих пор используются в прикладной математике. Именно поэтому целью нашей работы есть исследование прямоугольных линейных матричных методов для более эффективного их применения в различных отраслях науки и техники.

Некоторые исторические сведения и постановка задачи

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная или же просто суммируемая функция, ряд Фурье которой имеет вид

$$S(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,, \tag{1}$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt,\ k=0,1,2,...,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt,\ k=1,2,..., \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье.

Сумму n первых членов ряда (1) принято называть частной суммой Фурье порядка n функции $f(x)$ и обозначать

$$S_n(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{3}$$

Следует отметить, что частные суммы Фурье $S_n(f;x)$ — наиболее естественный аппарат приближения периодических функций $f(x)$ [11, с. 279]. Первые результаты по оценкам отклонения частных сумм Фурье $S_n(f;x)$ от заданных непрерывных функций получены еще в 1909 году А. Лебегом в период становления теории приближения функций. А именно было показано, что

$$|f(x)-S_n(f;x)|\le(\ln n+3)E_n(f)\,,$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами $Q_n(x)$ порядка не выше n в равномерной метрике [12, с. 7]:

$$E_n(f)=\inf_{Q_n(x)}\|f(x)-Q_n(x)\|_C=\inf_{Q_n(x)}\max_x|f(x)-Q_n(x)|\,.$$

Далее в 1935 году А.Н. Колмогоров рассмотрел величину

$$\mathrm{E}_n(W^r;S_n)=\sup_{f\in W^r}\|f(x)-S_n(f;x)\|_C\,,$$

где W^r — класс 2π-периодических функций $f(x)$, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и почти всюду $|f^{(r)}(x)|\le 1$, и нашел асимптотически точное равенство

$$\mathrm{E}_n(W^r;S_n)=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O(\frac{1}{n^r}),\ n\to\infty.$$

Следующий существенный шаг в этом направлении сделан в 1945 году С.М. Никольским, который, во-первых, обобщил эти результаты на классы W^rH^α 2π-периодических функций $f(x)$, у которых существуют непрерывные производные до r-го порядка $(r\ge 0)$ включительно, причем $|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x')|\le$ $\le|x-x'|^\alpha$, $0<\alpha\le 1$. И, во-вторых, нашел асимптотически точные равенства для верхних граней отклонений сумм Фейера [12, с. 8] на этих классах. В частности, он доказал теорему, согласно которой для любых целых чисел $r\ge 0$ и для $0<\alpha\le 1$ имеет место равенство

$$\sup_{f\in W^rH^\alpha}\|f(x)-S_n(f;x)\|_C=\frac{2^{\alpha+1}\ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}}\int_0^{2\pi}t^\alpha\sin t\,dt+O(\frac{1}{n^{r+\alpha}})\,,$$

а также получил обобщение этих результатов на классы функций, которые определяются выпуклыми вверх модулями непрерывности.

Указанные выше исследования А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского положили начало новому направлению не только в теории приближения функций, но и в теории матричного суммирования рядов Фурье, которое играет важную роль в прикладной математике.

Таким образом, основная цель нашей работы — изучение теоретических основ матричного суммирования рядов Фурье, результатом которого являются так называемые прямоугольные линейные методы суммирования.

Матричное суммирование рядов Фурье

Исследования, относящиеся к линейным треугольным матричным методам суммирования рядов Фурье, занимают большую область теории приближения. Каждый из перечисленных в [8, 11, 12] линейных треугольных матричных методов является важным звеном в прикладной математике, и их различные свойства исследовались многими математиками. В данной работе внимание сосредоточено на изучении достаточно мало исследованных свойств линейных методов, которые задаются с помощью прямоугольных матриц.

Пусть $\Lambda = \| \lambda_k^{(n)} \|$, где $n = 0, 1, 2, ...,$ $k = 0, 1, 2, ...,$ — произвольная прямоугольная числовая матрица. Каждой непрерывной функции $f(x)$ с рядом Фурье (1) поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 0, 1, \dots . \tag{4}$$

Если ряд (4) при каждом $n \in N$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, то будем ее обозначать $U_n(f; x; \Lambda)$ [8, с. 36]. Таким образом каждая прямоугольная матрица Λ задает метод построения операторов $U_n(f; x; \Lambda)$. В этом случае говорят, что матрица Λ определяет прямоугольный λ-метод суммирования рядов Фурье.

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой имеет вид (1), то линейный прямоугольный λ-метод суммирования рядов Фурье можно представить в виде

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t; \Lambda)dt, \tag{5}$$

где

$$K(t; \Lambda) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \cos kt \tag{6}$$

— тригонометрический ряд, который будем называть ядром оператора (или прямоугольного метода) $U_n(f; x; \Lambda)$.

Для доказательства теоремы достаточно подставить значения коэффициентов Фурье a_k и b_k из (2) в соотношение (4) и провести несложные преобразования.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров конкретных прямоугольных матричных методов суммирования рядов Фурье. Для этого обратимся к решению следующей краевой задачи для m-гармонических [13] функций ($m \geq 1$ — целое).

Пусть $K_0^r \subset R^n$ — обобщенный шар радиуса r с центром в начале координат. Далее S^r обозначим границу шара, а Ω — внутреннюю часть K_0^r. Для m-гармонического оператора

$$\Delta^m := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^m$$

рассмотрим задачу Дирихле, а именно, найдем решение уравнения $\Delta^m U = 0$ в Ω с заданными граничными условиями

$$\left. \frac{\partial^k U}{\partial n^k} \right|_{S^r} = g_k, \; k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная на границе обобщенного шара $K_0^r \subset R^n$. Решение $U(x)$ этой задачи Дирихле [13] для $x \in \Omega$ можно представить в виде

$$P_m(x) := U(x) = \frac{(-1)^{m-1}(r^2 - |x|^2)^m}{(m-1)!\omega_n r^{n-1}} \int_{s^r} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left(\frac{\partial^{m-1-k}}{\partial (r^2)^{m-1-k}} \frac{r^{n-2}}{|x-y|^n} \right) d\mu(y), \quad (7)$$

где ω_n — мера единичного куска поверхности обобщенного шара $K_0^r \subset R^n$, $d\mu(y) = g_k(y)ds$. С помощью формулы (7) можно выписывать последовательно решения произвольных m-гармонических задач при произвольном $m \in N$.

Рассмотрим некоторые случаи.

Случай I. Положив в (7) $m = 1,\; n = 2,\; \omega_2 = 2\pi r,\quad x = |x| e^{i\varphi},\quad y = re^{it}$, $ds = rdt$, получаем

$$P_1(|x| e^{i\varphi}) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_0(re^{it})}{|x - re^{it}|^2} rdt. \quad (8)$$

Так как

$$|x-y|^2 = ||x| e^{i\varphi} - re^{it}|^2 = (|x| e^{i\varphi} - re^{it})(|x| e^{-i\varphi} - re^{-it}) =$$

$$= |x|^2 - 2r|x| \frac{e^{i(\varphi - t)} + e^{-i(\varphi - t)}}{2} + r^2 = |x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2, \quad (9)$$

формулу (8) запишем в виде

$$P_1(|x| e^{i\varphi}) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_0(re^{it})}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2} dt.$$

Если рассмотреть случай единичного круга, т.е. взять $r = 1$, и ввести обозначение $|x| = \rho,\; 0 \le \rho < 1$, то получим

$$P_1(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_0(e^{it})}{\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - t) + 1} dt.$$

Положив $g_0(e^{it}) = f(t)$, где $f(t)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, имеем величину

$$P_1(\rho; f; \varphi) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\rho^2 - 2\rho\cos(\varphi - t) + 1} dt,$$

которую принято называть интегралом Пуассона [14, 15] (Абеля–Пуассона [16]) функции f.

Заменив переменную, запишем интеграл Пуассона в виде

$$P_1(\rho; f; x) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x)}{\rho^2 - 2\rho\cos t + 1} dt .$$

Величину

$$K_1(t; \rho) = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t + \rho^2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \tag{10}$$

в последнем соотношении принято называть ядром интеграла Пуассона [17].

Сопоставляя формулы (6) и (10), приходим к заключению, что если в соотношении (6) положить $\lambda_k^{(n)} = e^{-\frac{k}{n}}$, $n = -\frac{1}{\ln\rho}$, то из равенства (5) получаем $U_n(f; x; \Lambda) = P_1(n; f; x)$ — так называемый прямоугольный метод суммирования Абеля–Пуассона [10] (или Пуассона).

Случай II. Если в (7) положить $m = 2,\ n = 2,\quad \omega_2 = 2\pi r,\ x = |x| e^{i\varphi}$, $y = re^{it}$, $ds = rdt$, то имеем

$$P_2(|x|e^{i\varphi}) = \frac{(-1)(r^2 - |x|^2)^2}{2\pi r^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial(r^2)} \left(\frac{1}{|x-y|^2} \right) g_0(re^{it}) + \frac{1}{|x-y|^2} g_1(re^{it}) \right) rdt .$$

Используя в последней формуле ранее доказанное соотношение (9), получим

$$P_2(|x|e^{i\varphi}) = -\frac{(r^2 - |x|^2)^2}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial(r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times g_0(re^{it}) + \frac{g_1(re^{it})}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2} \right) dt . \tag{11}$$

Для упрощения правой части (11) сначала вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial(r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2} \right) = -\frac{-2|x| \frac{\partial r}{\partial(r^2)} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2)^2}. \tag{12}$$

Обозначив в правой части (12) $r^2 = \tau$, имеем $r = \sqrt{\tau}$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial r^2}(r) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\sqrt{\tau}) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} = \frac{1}{2r}.$$

Поэтому равенство (12) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial(r^2)} \left(\frac{1}{|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2} \right) = -\frac{-\frac{|x|}{r} \cos(\varphi - t) + 1}{(|x|^2 - 2|x| r\cos(\varphi - t) + r^2)^2} . \tag{13}$$

 ISSN 0572-2691

Применив соотношение (13) к правой части (11) и положив при этом $r=1$ и $|x|=\rho,\ \ 0\le\rho<1,$ (как в случае I), получим решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения $\Delta^2 U=0$ [18, 19] в единичном круге при заданных граничных условиях $U\big|_{\Gamma}=g_0,\ \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma}=g_1,$ а именно:

$$P_2(\rho e^{i\varphi})=\frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho\cos(\varphi-t)}{(\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1)^2}g_0(e^{it})dt-$$
$$-\frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g_1(e^{it})}{\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1}dt.$$

Аналогично случаю I, положив $g_0(e^{it})=f(t),\ g_1(e^{it})=0,$ где $f(t)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, а также заменив переменную, получим величину

$$P_2(\rho;f;x)=\frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\frac{1-\rho\cos t}{(\rho^2-2\rho\cos t+1)^2}dt\,, \tag{14}$$

которую принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции f.

Величину

$$K_2(t;\rho)=\frac{(1-\rho^2)^2}{2}\cdot\frac{1-\rho\cos t}{(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos kt \tag{15}$$

в соотношении (14) принято называть ядром бигармонического интеграла Пуассона [20, 21].

Таким образом, сопоставляя формулы (6) и (15), можно утверждать, что, положив в (6) $\lambda_k^{(n)}=\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-\frac{2}{n}})\right)e^{-\frac{k}{n}},\ n=-\frac{1}{\ln\rho},$ из равенства (5) получим $U_n(f;x;\Lambda)=P_2(n;f;x)$ — так называемый прямоугольный метод суммирования бигармонического интеграла Пуассона [22–29].

Случай III. Положив в (7) $m=3,\ n=2,\ x=|x|e^{i\varphi},\ \ y=re^{it},\ \ \omega_2=2\pi r,$ $ds=rdt$, имеем

$$P_3(|x|e^{i\varphi})=\frac{(r^2-|x|^2)^3}{4\pi r^2}\times\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial(r^2)^2}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)g_0(re^{it})+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial(r^2)}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)g_1(re^{it})+\frac{1}{|x-y|^2}g_2(re^{it})\right)rdt\,. \tag{16}$$

Объединяя соотношения (9) и (13), запишем

$$\frac{\partial^2}{\partial(r^2)^2}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)=\frac{\partial}{\partial(r^2)}\left(-\frac{1-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^2}\right)=$$
$$=\frac{|x|\frac{\partial}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\varphi-t)(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^2}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)\right)2(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)\left(-2|x|\frac{\partial r}{\partial(r^2)}\cos(\varphi-t)+1\right)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^4}\,. \tag{17}$$

Учитывая полученное ранее, а именно в случае II, соотношение $\dfrac{\partial r}{\partial(r^2)}=\dfrac{1}{2r}$, вычислим

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial(r^2)}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(r^2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}r^{-3}=-\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}.$$

Применяя последнее соотношение к правой части равенства (17), получаем

$$\frac{\partial}{\partial(r^2)^2}\left(\frac{1}{|x-y|^2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}|x|\cos(\varphi-t)(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}+$$

$$+\frac{2\left(1-\frac{|x|}{r}\cos(\varphi-t)\right)^2}{(|x|^2-2|x|r\cos(\varphi-t)+r^2)^3}. \tag{18}$$

Подставив производные (13) и (18) в (16) и заменив $r=1$, $|x|=\rho$, получаем решение задачи Дирихле для тригармонического уравнения $\Delta^3U=0$ в единичном круге с граничными условиями $U\big|_\Gamma=g_0$, $\left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_\Gamma=g_1$, $\left.\dfrac{\partial^2U}{\partial r^2}\right|_\Gamma=g_2$:

$$P_3(\rho e^{i\varphi})=\frac{(1-\rho^2)^3}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho\cos(\varphi-t)(\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1)+2(1-\rho\cos(\varphi-t))^2}{(\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1)^3}\right)\times$$

$$\times g_0(e^{it})dt-\frac{(1-\rho^2)^3}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho\cos(\varphi-t)}{(\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1)^2}g_1(e^{it})dt+$$

$$+\frac{(1-\rho^2)^3}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{g_2(e^{it})}{\rho^2-2\rho\cos(\varphi-t)+1}dt.$$

Аналогично предыдущим случаям, положив $g_0(e^{it})=f(t)$, $g_1(e^{it})=0$, $g_2(e^{it})=0$, где $f(t)$ — 2π-периодическая суммируемая функция, а также заменив переменную, получим величину

$$P_3(\rho;f;x)=\frac{(1-\rho^2)^3}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho\cos t(\rho^2-2\rho\cos t+1)+2(1-\rho\cos t)^2}{(\rho^2-2\rho\cos t+1)^3}\right)dt,$$

которую называют тригармоническим интегралом Пуассона функции f [30–33].

Величину

$$K_3(t;\rho)=\frac{(1-\rho^2)^3}{4\pi}\frac{2(1-\rho\cos t)^2-\frac{1}{2}\rho\cos t(\rho^2-2\rho\cos t+1)}{(\rho^2-2\rho\cos t+1)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{4}(3-\rho^2)(1-\rho^2)+\frac{k^2}{8}(1-\rho^2)^2\right)\rho^k\cos kt \tag{19}$$

принято называть ядром тригармонического интеграла Пуассона [34].

Таким образом, сопоставляя формулы (6) и (19), сделаем вывод, что если в (6) положить $\lambda_k^{(n)} = \left(1 + \frac{k}{4}(3 - e^{-\frac{2}{n}})(1 - e^{-\frac{2}{n}}) + \frac{k^2}{8}(1 - e^{-\frac{2}{n}})^2\right) e^{-\frac{k}{n}}$, $n = -\frac{1}{\ln\rho}$, то из равенства (5) получим $U_n(f; x; \Lambda) = P_3(n; f; x)$ — так называемый прямоугольный метод суммирования тригармонического интеграла Пуассона.

Во избежание ложного представления о том, что примерами прямоугольных линейных матричных методов суммирования рядов Фурье могут быть только перечисленные выше методы интеграла Пуассона, бигармонического интеграла Пуассона, тригармонического интеграла Пуассона, рассмотрим следующую краевую задачу в единичном круге для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0. \tag{20}$$

Решение уравнения (20), которое удовлетворяет граничному условию

$$U(\rho; x)|_{\rho=1} = f(x), \ -\pi \le x \le \pi, \tag{21}$$

где $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция, далее будем обозначать $W(\rho; f; x) := U(\rho; x)$. Тогда решение краевой задачи (20), (21) можно записать в виде

$$W(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2}\cos kt\right\}dt, \ 0 \le \rho < 1. \tag{22}$$

Интеграл (22) принято называть интегралом Вейерштрасса функции f [35–37].

По аналогии с предыдущими случаями величину

$$K_4(t; \rho) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2}\cos kt \tag{23}$$

называют ядром интеграла Вейерштрасса. Поэтому, сопоставляя формулы (6) и (23), приходим к заключению, что если в соотношении (6) положить $\lambda_k^{(n)} = e^{-\frac{k^2}{n}}$, $n = -\frac{1}{\ln\rho}$, то из равенства (5) получим, что $U_n(f; x; \Lambda) = W(n; f; x)$ — так называемый прямоугольный метод суммирования интеграла Вейерштрасса.

Заключение

С использованием единого методологического подхода, основанного на известных исследованиях многих как зарубежных, так и отечественных математиков, получены новые результаты, касающиеся суммирования рядов Фурье линейными прямоугольными матричными методами.

В процессе выполненных в данной работе исследований получены конкретные линейные прямоугольные матричные λ-методы, а именно: Абеля-Пуассона, Вейерштрасса, бигармонического и тригармонического интегралов Пуассона. Следует отметить, что перечисленные выше линейные прямоугольные матричные методы суммирования рядов Фурье есть решениями интегро-дифференциальных уравнений эллиптического типа. Следовательно, рассмотренные в работе методы могут быть использованы в прикладной математике, например, при решении игровых задач динамики.

Т.В. Волошина, Дж.У. Байсалов

ПРО МАТРИЧНЕ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є

Однією з найважливіших задач прикладної математики є підсумовування рядів, у тому числі лінійного матричного підсумовування рядів Фур'є. Дана проблема може виникати, наприклад, як при знаходженні найкращого наближення, так і при вирішенні ігрових задач динаміки, що ще більше підкреслює необхідність детального дослідження лінійних матричних методів підсумовування рядів Фур'є. Систематичні дослідження з теорії підсумовування рядів Фур'є за допомогою трикутних матриць розпочались під впливом робіт Б. Надя, С.М. Нікольського, С.О. Теляковського та інших математиків у середині XX століття та активно продовжуються і в наш час. Якщо говорити про дослідження прямокутних лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, то тут багато питань залишилось відкритими. Тому в роботі розглянуто базові теоретичні поняття в області малоописаних, як в науковій, так і зарубіжній літературі, лінійних прямокутних матричних методів підсумовування рядів Фур'є. В результаті отриманих досліджень сформульовано переваги лінійних прямокутних матричних методів підсумовування рядів Фур'є в порівнянні з лінійними трикутними матричними методами підсумовування щодо застосування перших до вирішення ігрових задач динаміки. Розглянута задача для n-гармонічного рівняння в одиничному крузі дає можливість послідовно виписувати конкретні лінійні прямокутні методи підсумовування рядів Фур'є, а саме метод Абеля–Пуассона, метод Вейєрштрасса, методи бігармонічного і тригармонічного інтегралів Пуассона. Крім того, кожен з перерахованих вище лінійних прямокутних матричних методів підсумовування рядів Фур'є є розв'язком відповідного диференціального рівняння в частинних похідних (еліптичного типу). Цей факт дозволяє істотно розширити клас ігрових задач динаміки, які досліджуються на основі викладених у даній роботі теоретичних аспектів лінійних прямокутних матричних методів підсумовування.

Ключові слова: диференціальні рівняння в частинних похідних, ігрові задачі динаміки, ряди Фур'є, лінійні методи підсумовування.

T.V. Voloshyna, Zh.U. Baysalov

ON THE MATRIX SUMMATION OF FOURIER SERIES

One of the most important problems of applied mathematics is the series summation, in particular, linear matrix summation of the Fourier series. This problem appears, e.g., in finding the best approximation as well as in solving game problems of dynamics, which even more highlights a necessity of the detailed investigation of linear matrix methods of summation of the Fourier series. Systematic research on the theory of summation of Fourier series using triangular matrices began under the influence of the works of B. Nagy, S.M. Nikol'skii, S.A. Telyakovskii and other mathematicians in the middle of the 20th century and are actively continuing in our time. If we talk about studies of rectangular linear methods of summation of the Fourier series, then many questions remain open. Therefore, in this work we consider the basic theoretical concepts in the field of linear rectangular matrix methods of summation of the Fourier series, such that are little discussed in scientific, including foreign, literature. The investigations gave us possibility to formulate advantages of linear rectangular matrix methods of summation of the Fourier series over linear triangular matrix methods of summation in the sense that first are applicable to solving game problems of dynamics. The problem considered in this paper for an n-harmonic equation in the unit circle enables us to write down successively specific linear rectangular methods of summation of the Fourier series, namely, the Abel–Poisson method, the Weierstrass method, and the methods of biharmonic and three-harmonic Poisson integrals. Moreover, each of the mentioned above linear rectangular matrix methods of summation of the Fourier series is a solution of a corresponding partial differential equation (elliptic-type). The latest novation could significantly expand the class of game problems of dynamics, such that can be investigated taking into account the theoretical aspects of linear rectangular matrix methods of summation of the Fourier series that are described in this paper.

Keywords: partial differential equations, game problems of dynamics, Fourier series, linear methods of summation.

1. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl. 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
2. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. Systems Anal.* 2014. **50,** N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
3. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
4. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
5. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl. 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In : Breton M., Szajowski K. (eds). *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games.* 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
7. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
8. Степанец А.И. Методы теории приближения. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427с.
9. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
10. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
11. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 602 с.
12. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев : Наук. думка, 1981. 340 с.
13. Edenhofer J. Eine integraldarstellung der losung der Dirichletschen aufgabe bei der polypotentialgleichung im falle eine hyperkugel. *Math. Nachr.* 1975. **69**. P. 149–162. DOI: 10.1002/mana.19750690115.
14. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
15. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
16. Zhyhallo T.V. Approximation in the mean of classes of the functions with fractional derivatives by their Abel-Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51,** N 8. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i8.50.
17. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
19. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
20. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.

21. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
24. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
26. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69,** N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
27. Zhyhallo K.M. Algorithmization of calculations of the Kolmogorov−Nikol'skii constants for values of approximations of conjugated differentiable functions by generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51,** N 10. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i10.50.
28. Абдуллаєв Ф.Г., Харкевич Ю.І. Наближення класів $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ бігармонічними інтегралами Пуассона. *Укр. мат. журн.* 2020. **72**, N 1. С. 20–35.
29. Zhyhallo K.M., Zhyhallo T.V. On the approximation of functions from the Hölder class given on a segment by their biharmonic Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2019. **71**, N 7. P. 1043–1051.
30. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2. P. 321–324. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321–334.
31. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2020. **246**, N 1. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4.
32. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 12. P. 57–70. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60.
33. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. P. 77–86. DOI: 10.1615/jautomainfscien.v50.i8.70.
34. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
35. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
36. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$. *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2018. **231,** N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
37. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.

Получено 27.04.2020