УДК 519.6

К.Н. Жигалло

ПОЛНЫЕ АСИМПТОТИКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Ключевые слова: математическое моделирование, игровые задачи динамики, классы Липшица, сингулярные интегралы.

Введение

В свое время А.Н. Колмогоров инициировал задачу нахождения главного члена для величины приближения заданного подкласса периодических функций различными методами суммирования рядов Фурье. Позже более интересной стала задача о вычислении не только главного члена, но и второго, третьего и т.д., всех членов разложения величины этого приближения, т.е. более актуальна в настоящее время задача о нахождении так называемых полных асимптотических разложений [1, 2] верхних граней приближений заданного подкласса периодических функций определенными методами суммирования рядов Фурье.

Применение математических методов в прикладной математике вызвано необходимостью построения математических моделей сложных экологических, технических систем и др. Особого внимания в этом плане заслуживает метод разрешающих функций, который широко применяется в прикладных задачах, в том числе в игровых задачах динамики [3–9]. Параллельно с расширением сферы применимости данного метода возникает необходимость исследовать аппроксимативные свойства на хорошо известных в прикладной математике классах функций Липшица, так называемого обобщенного интеграла Пуассона [10], который есть решением дифференциальных уравнений в частных производных и напрямую связан с методами решений интегральных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Допустим, что ряд

$$\frac{a_0(f)}{2}\lambda_\rho(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{1}$$

при каждом $\lambda_\rho(k),\ 0 \le \rho < 1$, является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_\Lambda(\rho; f; x)$. Исходя из [11, с. 15], считают, что множество $\lambda_\rho(k)$ определяет конкретный λ-метод суммирования рядов Фурье. Вполне очевидно, что при каждом фиксированном ρ операторы $U_\Lambda(\rho; f; x)$ линейные. Именно поэтому λ-методы принято называть линейными методами [11, с. 15] (процессами) суммирования рядов Фурье. Приведем примеры некоторых конкретных λ-методов суммирования рядов Фурье. Так если в (1) положить $\lambda_\rho(k) = \rho^{k^2}$, то получим, что $U_\Lambda(\rho; f; x) = W(\rho; f; x)$ — так называемый интеграл Вейерштрасса, аппроксимативные свойства которого изучались в работах [12–14]. Если же в (1) положить $\lambda_\rho(k) = (1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k$, $0 \le s < \frac{1}{2}$, $q \ge 1$, то получим линейный метод так называемого обобщенного интеграла Пуассона, который согласно [10] принято обозначать

$$P_{s,q}(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_{s,q}(\rho; t)dt, \quad 0 \le \rho < 1, \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

где

$$K_{s,q}(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q]\rho^k \cos kt, \ 0 \le s \le \frac{1}{2}, \ q \ge 1. \tag{3}$$

Следует отметить, что в случае $s = 0$ из (2) и (3) получим (см., например, [15, 16]) интеграл Абеля–Пуассона

$$A(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt\right\}dt, \ 0 \le \rho < 1.$$

Если же в (2) и (3) положить $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$, то будем иметь (см., например, [17, 18]) бигармонический интеграл Пуассона

$$B(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)]\rho^k \cos kt\right\}dt, \ 0 \le \rho < 1.$$

Согласно [2], положив в (2) и (3) $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta > 0$, обобщений интеграл Пуассона и его ядро соответственно будем записывать в виде

$$P_{s,q}(\delta; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_{s,q}(\delta; t)dt, \ \delta > 0, \tag{4}$$

$$K_{s,q}(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + sk(1 + e^{-\frac{1}{\delta}})(1 - e^{-\frac{1}{\delta}})^q] e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt. \tag{5}$$

Определение 1 [11, с. 120]. Множество всех 2π-периодических непрерывных функций, которые равномерно на всей числовой оси удовлетворяют неравенству

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|, \tag{6}$$

называют классом Липшица и обозначают $\mathrm{Lip}1$.

В течение последних десятилетий наблюдается тесная взаимосвязь теории приближения с другими направлениями математики, особенно прикладного характера. В частности, интересным является вопрос о приближении одних математических объектов другими, как правило, более простой природы, характеристики которых легко вычисляются, или свойства которых известны, а также известны оценки погрешностей таких приближений.

В связи с этим представляет интерес приближение функций класса $\mathrm{Lip}1$ их обобщенными интегралами Пуассона (4), а именно, исследование асимптотического поведения величины

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}1; P_{s,q}(\delta))_C = \sup_{f \in \mathrm{Lip}1} \left\| P_{s,q}(\delta; f; \cdot) - f(\cdot) \right\|_C. \tag{7}$$

 ISSN 0572-2691

Определение 2 [11, с.198]. Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta)$ такая, что при $\delta \to \infty$ можно записать асимптотическое равенство

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1;\, P_{s,\,q}(\delta))_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для обобщенного интеграла Пуассона и класса $\mathrm{Lip}\,1$ в метрике пространства *C*.

Определение 3 [1]. Формальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(\delta)$ называется полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(\delta)$ при $\delta \to \infty$, если для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\left| g_{n+1}(\delta) \right| = o(|\, g_n(\delta)\,|)$$

и при любом $m \in \mathbb{N}$

$$f(\delta) = \sum_{n=0}^{m} g_n(\delta) + o(g_m(\delta)), \;\; \delta \to \infty.$$

Кратко запишем это следующим образом:

$$f(\delta) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\delta).$$

Отметим, что задача Колмогорова–Никольского как для интегралов Абеля-Пуассона, так и для бигармонических интегралов Пуассона, рассматривалась в свое время в работах [19–24] и [25–32] соответственно.

Таким образом, главная цель данной работы — нахождение полного асимптотического разложения для величины (7) по степеням $\dfrac{1}{\delta}$ при $\delta \to \infty$, которое позволяет выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольно высокого порядка малости.

Приближение функций класса Липшица обобщенными интегралами Пуассона

Теорема. Если $\zeta(z) := \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{1}{s^z}$ — дзета-функция Римана, $\{z : \mathrm{Re}\, z > 1\}$, то при $\delta \to \infty$ имеет место равенство

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1; P_{s,q}(\delta))_C = \frac{2}{\pi} s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q \left(\ln\frac{1}{2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\zeta(2k)(2-2^{2-2k})}{2k\pi^{2k}} \cdot \frac{1}{\delta^{2k}} \right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi\delta} \left(1 + \ln 2\delta + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \, \frac{\zeta(2k)(2-2^{2-2k})}{2k(2k+1)\pi^{2k}} \cdot \frac{1}{\delta^{2k}} \right).$$

Доказательство. Для дальнейшего удобства записи ядра обобщенного интеграла Пуассона положим

$$\gamma_{s,\,q}(\delta) = s(1+e^{-\frac{1}{\delta}})(1-e^{-\frac{1}{\delta}})^q\,. \tag{8}$$

Тогда соотношение (5) примет вид

$$K_{s,\,q}(\delta; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + k\gamma_{s,\,q}(\delta) k) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt. \tag{9}$$

Как показано в работе [10], $K_{s,q}(\delta, t) > 0 \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$ и, более того, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{s,q}(\delta; t)dt = \pi.$ Поэтому согласно (4) и (9) будет иметь место равенство

$$P_{s,q}(\delta; f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_{s,q}(\delta; t)dt.$$

Из последнего равенства и соотношений (7) и (6), с одной стороны, получим

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1; P_{s,q}(\delta))_C \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| K_{s,q}(\delta; t)dt. \tag{10}$$

С другой стороны, следуя [33], можем говорить, что функция g^*, которая является 2π-периодическим продолжением функции $g(t) = |t|,\ \forall t \in [-\pi, \pi),$ принадлежит множеству $\mathrm{Lip}\,1$ и

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1; P_{s,q}(\delta))_C \ge \left\| P_{s,q}(\delta; g^*; \cdot) - g^*(\cdot) \right\|_C \ge |P_{s,q}(\delta; g^*; 0) - g^*(0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| K_{s,q}(\delta; t)dt. \tag{11}$$

Далее, используя свойства определенного интеграла и объединяя (10) и (11), имеем

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1; P_{s,q}(\delta))_C = \sup_{f \in Lip1} \left\| P_{s,q}(\delta; f; x) - f(x) \right\|_C = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| K_{s,q}(\delta; t)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t K_{s,q}(\delta, t)dt. \tag{12}$$

Для получения полных асимптотических разложений по степеням $\frac{1}{\delta}$ правой части (12) положим для $\forall r \in [0, \infty)$

$$F_{s,q}(\delta, v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} (1 + \gamma_{s,q}(\delta) r) e^{-\frac{r}{\delta}} \cos rt \, \cos rv \, dr$$

— косинус-преобразование Фурье [34] функции

$$(1 + \gamma_{s,q}(\delta) r) e^{-\frac{r}{\delta}} \cos rt\,.$$

Тогда $F_{s,q}(\delta, v)$ представим в виде

$$F_{s,q}(\delta, v) = F_{1,s,q}(\delta, v) + F_{2,s,q}(\delta, v)\,, \tag{13}$$

где

$$F_{1,s,q}(\delta, v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{r}{\delta}} \cos rt \cos rv \, dr\,, \tag{14}$$

$$F_{2,s,q}(\delta, v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \gamma_{s,q}(\delta) z e^{-\frac{r}{\delta}} \cos rt \cos rv \, dr\,. \tag{15}$$

Для вычисления косинус-преобразования Фурье $F_{2,s,q}(\delta, v)$ согласно (15) запишем

$$F_{2,s,q}(\delta, \nu) = \frac{\gamma_{s,q}(\delta)}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{\infty} r e^{-\frac{r}{\delta}} \cos r(\nu + t) dr + \int\limits_{0}^{\infty} r e^{-\frac{r}{\delta}} \cos r(v - t) dr \right). \tag{16}$$

Как и в [33], используя формулу (3) из [35], имеем

$$\int_0^\infty re^{-\frac{r}{\delta}}\cos r(v+t)dr = \frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2}\cos(2\operatorname{arctg}\delta(v+t)) = \frac{\frac{1}{\delta^2}-(v+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2\right)^2}. \quad (17)$$

$$\int_0^\infty re^{-\frac{r}{\delta}}\cos r(v-t)dz = \frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2}\cos(2\operatorname{arctg}\delta(v-t)) = \frac{\frac{1}{\delta^2}-(v-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2\right)^2}. \quad (18)$$

Подставляя соответственно (17) и (18) в правою часть равенства (16), получаем

$$F_{2,s,q}(\delta,v) = \frac{\gamma_{s,q}(\delta)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}-(v+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(v-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2\right)^2}\right). \quad (19)$$

Кроме того, следуя работе [34], имеем

$$F_{1,s,q}(\delta,v) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2}+\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2}\right). \quad (20)$$

Объединив соотношения (13), (19) и (20), запишем

$$F_{s,q}(\delta,v) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2}+\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma_{s,q}(\delta)\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}-(v+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v+t)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(v-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(v-t)^2\right)^2}\right)\right). \quad (21)$$

Используя формулу суммирования Пуассона [36, с. 82] для ядра обобщенного интеграла Пуассона (9), получаем

$$K_{s,q}(\delta;t) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}F_{s,q}(\delta,0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{s,q}(\delta,2\pi k)\right). \quad (22)$$

Далее, подставляя (22) в (4), имеем

$$P_{s,q}(\delta;f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}+\gamma_{s,q}(\delta)\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k-t)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k+t)^2}+\gamma_{s,q}(\delta)\left(\frac{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-(2\pi k-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k-t)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(2\pi k+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k+t)^2\right)^2}\right)\right)\right)dt.$$

Или, что тоже самое,

$$P_{s,q}(\delta;f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f(x+t))_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}+\gamma_{s,q}(\delta)\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\right)dt\,, \tag{23}$$

где $(f(\cdot))_{2\pi}$ — четное 2π-периодическое продолжение функции $f(\cdot)$ из $[-\pi,\pi]$ на всю числовую ось.

Поскольку наши дальнейшие рассуждения будут совпадать з доказательством теоремы из работы [33], аналогичным образом, используя (23) и (22), равенство (12) можем записать в виде

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1;P_{s,q}(\delta))_C=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}+\gamma_{s,k}(\delta)\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt+\gamma_{s,k}(\delta)\int\limits_0^{\pi}t\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}dt+$$

$$+\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt+\gamma_{s,k}(\delta)\int\limits_{\pi}^{\infty}(t)_{2\pi}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}dt=I_1(\delta)+I_2(\delta)+I_3(\delta)+I_4(\delta)\,. \tag{24}$$

Легко видеть, что

$$I_1(\delta)=\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt=\frac{1}{\pi\delta}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}=\frac{1}{\pi\delta}\left(\ln\left(\frac{1}{\delta^2}+\pi^2\right)-\ln\frac{1}{\delta^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}(\ln\delta+\ln\pi)+\frac{1}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}. \tag{25}$$

Используя соотношения (14)–(16) работы [33], получаем

$$I_2(\delta)=\frac{2\gamma_{s,k}}{\pi}(\delta)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\pi^{2(k-1)}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2(k-1)}-\ln\delta-\ln\pi-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi^{2k}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\right). \tag{26}$$

Соответственно для интегралов $I_3(\delta)$ та $I_4(\delta)$ из работы [33] имеем

$$I_3(\delta)=\frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\delta^{2(k-1)}}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k}}dt, \tag{27}$$

$$I_4(\delta)=\frac{2\gamma_{s,k}(\delta)}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2k}{\delta^{2k}}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\delta^{2(k-1)}}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k}}dt\right). \tag{28}$$

Подставляя (25)–(28) в правую часть (24), имеем

$$\mathrm{E}(\mathrm{Lip}\,1;P_{s,q}(\delta))_C=\frac{2\gamma_{s,q}(\delta)}{\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(2k\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}\,dt}{t^{2k+2}}-\frac{1}{\pi^{2k}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\delta}-\gamma_{s,q}(\delta)\right)\left(\ln\pi\delta+\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}\,dt}{t^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k\pi^{2k}}-\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}\,dt}{t^{2k+2}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right). \tag{29}$$

И наконец, подставляя формулы (23) и (24) работы [33] вместо соответствующих интегралов правой части равенства (29), получаем утверждения теоремы.

Заключение

В ходе исследований изучены аппроксимативные свойства так называемых обобщенных интегралов Пуассона на классах Липшица, хорошо известных в прикладной математике. Более того, получены полные асимптотические разложения по степеням $\frac{1}{\delta}$, $\delta \to \infty$, верхней грани отклонения функций классов Липшица от этих обобщенных интегралов Пуассона. Записанное в теореме асимптотическое равенство позволяет выписывать так называемые константы Колмогорова–Никольского [37] при соответствующих слагаемых как угодно высокого порядка малости.

К.М. Жигалло

ПОВНІ АСИМПТОТИКИ НАБЛИЖЕНЬ ДЕЯКИМИ СИНГУЛЯРНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

При розв'язанні деяких типів задач прикладного характеру найбільш ефективними на даний час є методи теорії наближення функцій. На сучасному етапі розвитку в теорії наближення функцій в основному аналізуються наближення окремих функцій або цілих класів за допомогою заданих підпросторів функцій, які більш прості в обчисленнях порівняно з функціями, що апроксимуються. Найчастіше на практиці в ролі такого підпростору виступає множина алгебраїчних многочленів або ж множина тригонометричних поліномів заданого порядку. В результаті маємо новий тип задач, які в подальшому стали називатися екстремальними задачами теорії наближення функцій. У свою чергу серед усіх екстремальних задач теорії наближення функцій найцікавішими з точки зору математичного моделювання є так звані задачі Колмогорова–Нікольського. Їх суть полягає в знаходженні асимптотичних рівностей для величин наближення функцій з деяких класів конкретними методами підсумовування рядів Фур'є. Розглянуто питання про наближення неперервних 2π-періодичних функцій класу Ліпшиця деякими сингулярними інтегралами, яскравими прикладами яких виступають так звані узагальнені інтеграли Пуассона. В результаті досліджень були записані повні асимптотичні розклади за степенями $\frac{1}{\delta}$, $\delta \to \infty$, точних верхніх меж відхилень функцій з класу Ліпшиця від їх узагальнених інтегралів Пуассона. Отриманий в даній роботі результат дозволяє за допомогою ζ-функції Рімана виписувати не тільки головний член повного асимптотичного розкладу, а й другий, третій і т.д., що відповідно значно спрощує задачу алгоритмізації при розв'язанні поставленої прикладної проблеми. Крім того, узагальнені інтеграли Пуассона є розв'язками диференціальних рівнянь в частинних похідних і напряму пов'язані з методами розв'язання інтегральних, диференціально-різницевих і інтегро-диференціальних ігор, що мають безпосереднє відношення до ігрових задач динаміки.

Ключові слова: математичне моделювання, ігрові задачі динаміки, класи Ліпшиця, сингулярні інтеграли.

K.N. Zhyhallo

COMPLETE ASYMPTOTICS OF APPROXIMATIONS BY CERTAIN SINGULAR INTEGRALS IN THE MATHEMATICAL MODELING

In solving some types of applied problems, the most effective nowadays are methods of the theory of approximation of functions. In a modern stage of development of the theory of approximation of functions, one merely deals with either an approximation of individual functions or whole function classes by a preset subsets of functions that appear in a certain sense more convenient to deal with in calculations in comparison to the functions that should be approximated. In practice one often chooses a set of algebraic polynomials of a defined order as such subspace. As a result, a new type of problems appeared, that further was called the extremal problems of the theory of approximation. In turn, among all of the extremal problems of the theory of approximation the most interesting from the mathematical modelling point of view are the so-called Kolmogorov-Nikol'skii problems. The main goal of the Kolmogorov-Nikol'skii problem is to find the asymptotic equalities for the values of the approximation of functions of certain classes of specific methods of summation of Fourier series. In the paper a problem is considered of an approximation of 2π-periodic functions from the Lipshitz class by certain singular integrals. The most prominent examples of such integrals are the so-called generalized Poisson integrals. As a result, we wrote down the complete asymptotic expansions in terms of $\frac{1}{\delta}$, $\delta \to \infty$, of the least upper borders of deviations of functions from the Lipshitz class from their generalized Poisson integrals. The obtained result allows us to write down not only the main term of the asymptotic expansion, but also using the Riemann ζ-function write down its second, third terms, etc., that, respectively, much simplifies the problem of algorithmization in solving of the stated applied problem. Moreover, the generalized Poisson integrals are the solutions of partial differential equations they are directly connected to the methods of solving of integral, difference-differential and integro-differential games, that are related to the game problems of dynamics.

Keywords: mathematical modeling, game dynamics problems, Lipschitz classes, singular integrals.

1. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
2. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
3. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Game problems of approach for quasilinear systems of general form. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2019. **304** (Suppl 1). P. 44–58. DOI: 10.1134/ S0081543819020068.
4. Chikrii A.A. An analytic method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **271**, N 1. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073.
5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
6. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Comput. Math. Appl.* 2002. **44**, N 7. P. 835–851. DOI: 10.1016/S0898-1221(02)00197-9.
7. Chikrij A.A., Ejdel'man S.D. Game problems of control for quasilinear systems with fractional Riemann-Liouville derivatives. *Kibernet. Sistem. Anal.* 2001, N 6. P. 66–99.
8. Chikrii A.A.,Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56-65. **DOI:** 10.1134/S0081543815090047.
9. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
10. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
11. Степанец А. И. Методы теории приближения: В 2-х ч. Киев: Ин-т математики НАН Украны, 2002. Ч.I. 427 с.
12. KharkevychYu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
13. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
14. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2018. **231,** N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
15. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.

16. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
17. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
18. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^{\Psi}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69,** N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
20. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
21. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_\beta^\Psi H^\alpha$. *Math. Notes.* 2014. **96**, N 5-6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/ s0001434614110406.
22. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
23. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C_{\beta,\infty}^{\Psi}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
24. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
26. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
27. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\Psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
29. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
30. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^{\Psi}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
32. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson-Chebyshev integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.40.
33. Hembars'ka S.B., Zhyhallo K.M. Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69,** N 7. P. 1075–1084. DOI: 10.1007/s11253-017-1416-5.
34. Baskakov V. A. Some properties of operators of Abel-Poisson type. *Math. Notes*. 1975. **17**, N 2. P. 101–107. DOI: 10.1007/BF01161864.
35. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.
36. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 460 с.
37. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.

Получено 27.12.2019