УДК 519.21

П.С. Кнопов, Е.И. Касицкая

СВОЙСТВА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ*

Ключевые слова: задача стохастического программирования, однородное в узком смысле случайное поле, условие сильного перемешивания, большие уклонения.

Введение

Задача стохастического программирования возникает при необходимости принятия решения в условиях стохастической неопределенности и риска. Оптимизируется среднее значение показателя качества управления, зависящего от случайного параметра.

Непрямые методы решения задач стохастического программирования состоят в аппроксимации стохастической задачи приближенной детерминированной задачей. Одним из основных непрямых методов стохастического программирования является так называемый метод эмпирических средних [1–4]. В данном методе показатели качества управления аппроксимируются их эмпирическими оценками. Поэтому одна из основных проблем — оценка точности и обоснование сходимости такой аппроксимации при увеличении числа наблюдений.

В настоящей работе рассматриваются наблюдения однородного в узком смысле случайного поля на прямоугольнике плоскости. Используются эргодические теоремы для случайных полей, а также теоремы о больших уклонениях.

Постановка задачи

Пусть $\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ — однородное в узком смысле случайное поле с непрерывными траекториями, определенное на полном вероятностном пространстве (Ω, G, P), принимающее значения в некотором метрическом пространстве (Y, ρ).

Рассмотрим задачу

$$F(x) = E f(x, \xi(0, 0)) \to \min, \ \ x \in X , \tag{1}$$

где X — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.

Аппроксимируем данную задачу следующей:

$$F_{T_1 T_2}(x) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} f(x, \xi(t_1, t_2)) dt_1 dt_2 \to \min, \ \ x \in X, \tag{2}$$

где $T_1 > 0, T_2 > 0$.

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда исследований Украины. Грант № 2020.02/0121.

В силу свойств непрерывных функций существует хотя бы одно решение $x(T_1, T_2)$ задачи (2), являющееся измеримой функцией от ω.

Предположим, что $E\max\{|f(x, \xi(t_1, t_2))|,\ x \in X\} < \infty$. Тогда функция $F(\cdot)$ непрерывна и найдется хотя бы одно решение x_0 для задачи (1). Предположим, что оно единственно.

Пусть поле $\xi(t_1, t_2)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания [3], т.е. существует такая функция $a(d), d \geq 0; a(d) \downarrow 0, d \to \infty$, что для любых $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^2$ имеем

$$\sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|; A \in \sigma(H_1), B \in \sigma(H_2)\} \leq a(d(H_1 H_2)),$$

где

$$\sigma(H) = \sigma\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in H\}, d(H_1, H_2) =$$

$$= \inf\{\|(t_1, t_2) - (s_1, s_2)\|; (t_1, t_2) \in H_1, (s_1, s_2) \in H_2\}.$$

Предположим также, что $a(d) = O(d^{-2-\varepsilon}),\ d \to \infty$, для некоторого $\varepsilon > 0$, и для некоторого $\delta > \frac{8}{\varepsilon}$

$$E\{|f(x, \xi(0,0))|^{4+\delta}\} < \infty,\ x \in X.$$

Если справедливы приведенные выше условия [3], то с вероятностью 1

$$x(T_1, T_2) \to x_0, F_{T_1T_2}(x(T_1, T_2)) \to F(x_0);\ T_1, T_2 \to \infty.$$

Рассмотрим вероятность больших уклонений $x(T_1, T_2)$ от x_0 и $F_{T_1T_2}(x(T_1, T_2))$ от $F(x_0)$.

При любом фиксированном y можно считать $f(\cdot, y)$ элементом пространства непрерывных функций $C(X)$. Предположим, что существует такое выпуклое компактное множество $K \subset C(X)$, что при всех $y \in Y$ имеем $f(\cdot, y) - F(\cdot) \in K$. Рассмотрим $F_{T_1T_2} - F$ как случайные элементы на (Ω, G, P) со значениями в K.

Известные результаты из функционального анализа

Используем известные утверждения из функционального анализа.

Определение 1 [3]. Пусть $(V, \|\ \|)$ — линейное нормированное пространство, $B(x, r)$ — замкнутый шар в нем радиуса r с центром x, $f: V \to [-\infty, +\infty]$ — некоторая функция, x_f — ее точка минимума на V. Улучшающей функцией ψ для f в точке x_f называется монотонно неубывающая функция $\psi: [0, +\infty) \to \to [0, +\infty]$, $\psi(0) = 0$, такая, что существует $r > 0$, для которого при любом $x \in B(x_f, r)$ $f(x) \geq f(x_f) + \psi(\|x - x_f\|)$.

Пусть $V_0 \subset V$. Обозначим

$$\delta_{V_0}(x) = 0,\ x \in V_0;\ \delta_{V_0}(x) = +\infty,\ x \notin V_0.$$

Теорема 1 [4]. Пусть $(V, \|\ \|)$ — линейное нормированное пространство, $V_0 \subset V$ замкнуто; $f_0, g_0 : V \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Предположим, что

$$\varepsilon = \sup\{|f_0(x) - g_0(x)|,\ x \in V_0\}.$$

Введем функции $f, g: V \to (-\infty, +\infty]; f = f_0 + \delta_{V_0}, g = g_0 + \delta_{V_0}$. Тогда

$$\left|\inf\{f(x), x \in V\} - \inf\{g(x), x \in V\}\right| \le \varepsilon .$$

Пусть x_f — точка минимума f на V, ψ — улучшающая функция для f в точке x_f с коэффициентом r. Если ε достаточно мало, так что

$$\psi(\|x - x_f\|) \le 2\varepsilon \Rightarrow \|x - x_f\| \le r ,$$

то имеем

$$\psi(\|x_f - x_g\|) \le 2\varepsilon \ \forall x_g \in \arg\min\{g(x), x \in B(x_f, r)\} .$$

При выпуклой и строго возрастающей на $[0, r]$ функции ψ получаем

$$\psi^{-1}(2\varepsilon) \le r \Rightarrow \|x_f - x_g\| \le \psi^{-1}(2\varepsilon) \ \forall x_g \in \arg\min\{g(x), x \in B(x_f, r)\} .$$

Вспомогательные утверждения из теории больших уклонений

Воспользуемся также утверждениями из теории больших уклонений.

Теорема 2 [5, с. 53]. Пусть $\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ — семейство вероятностных мер на H-замкнутом выпуклом подмножестве сепарабельного банахова пространства J. Предположим, что для любого $\lambda \in J^*$, сопряженному J пространству, существует

$$\Lambda(\lambda) \equiv \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Lambda_{\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right) \in [-\infty, +\infty],$$

где $\Lambda_\mu(\lambda) = \ln \int_J \exp\{\langle \lambda, x \rangle\} \mu(dx)$, $\langle \lambda, x \rangle$ — соотношение двойственности. Обозначим

$$\Lambda^*(q) = \sup\{\langle \lambda, q \rangle - \Lambda(\lambda), \lambda \in J^*\}, \ q \in H .$$

Тогда Λ^* неотрицательна, выпукла, полунепрерывна снизу и для любого компактного множества $A \subset H$

$$\limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ln(\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(A)) \le -\inf\{\Lambda^*(q), q \in A\}.$$

Определение 2 [5]. Пусть Σ — сепарабельное банахово пространство, $\{\zeta(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ — однородное в узком смысле случайное поле на (Ω, G, P) со значениями в Σ. При $\tau > 0$ случайные величины $\eta_1, ..., \eta_p$; $p \ge 2$, называются τ-измеримо отделенными, если η_j является $\sigma\{\zeta(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in H_j\}$-измеримой для всех $j \in \{1, ..., p\}$, где $d(H_i, H_j) \ge \tau$, $i \ne j$; $H_j, j = 1, ..., p$ — борелевские множества в $\mathbb{R}^2$; $d(\cdot, \cdot)$ — расстояние между множествами.

Определение 3 [5]. Считают, что случайное поле из определения 2 удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания, если существуют $\tau_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и невозрастающая функция $\alpha: \{\tau > \tau_0\} \to [1, +\infty)$ такие, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\alpha(\tau)=1;\ \left\|\eta_1...\eta_p\right\|_{L^1}\le\prod_{j=1}^{p}\left\|\eta_j\right\|_{L^{\alpha(\tau)}}$$

при всех $p\ge 2,\tau>\tau_0$; $\eta_1,...,\eta_p$ τ -измеримо отделенных, где $\|\eta\|_{L^r}=(E\{|\eta|^r\})^{\frac{1}{r}}$.

Основные результаты

Предположим, что X — компактное подмножество □. Как известно [6], $(C(X))^*=M(X)$ — совокупность ограниченных знаковых мер на X, а также

$$\langle g,Q\rangle=\int_X g(x)Q(dx);\ g\in C(X), Q\in M(X).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\zeta(t_1,t_2),(t_1,t_2)\in R^2$ — однородное в узком смысле случайное поле с непрерывными траекториями, удовлетворяющее первой гипотезе гиперперемешивания на (Ω,G,P), со значениями в компактном выпуклом множестве $K\subset C(X)$. Тогда для всех $Q\in M(X)$ существует

$$\Lambda(Q)=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\ln\left(E\exp\int_X\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right)\in[-\infty,+\infty],$$

и для любого замкнутого $A\subset K$

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\ln P\left\{\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\in A\right\}\le-\inf\{\Lambda^*(g),g\in A\},$$

где $\Lambda^*(g)=\sup\left\{\int_X g(x)Q(dx)-\Lambda(Q),Q\in M(X)\right\}$ — неотрицательная выпуклая полунепрерывная снизу функция.

Доказательство. Зафиксируем $Q\in M(X)$. Пусть τ_0 — константа из условия гиперперемешивания. Предположим, что $\tau>\tau_0$; $S_i>\tau$, $S_i<T_i$, $i=1,2$. Имеем $T_i=N_{T_i}S_i+r_{T_i}$, $N_{T_i}\in$ □, $r_{T_i}<S_i$, $i=1,2$.

Обозначим

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\int_X\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right\}\right),$$

$$c=\max\{\|g\|,g\in K\},\ \|g\|=\max\{|g(x)|,x\in X\},\ g\in C(X). \quad (3)$$

Введем обозначение [6]

$$v(Q,X)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}|Q(H_i)|,H_i\cap H_j=\varnothing,i\ne j,H_i\in B(X),k\in N\right\}<\infty,$$

$$Q\in M(X).$$

Имеем

$$[0,T_1]\times[0,T_2]=\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{[j_1S_1,(j_1+1)S_1]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\left\{[j_1S_1,(j_1+1)S_1]\times[N_{T_2}S_2,T_2]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[N_{T_1}S_1,T_1\right]\times\left[j_2S_2,(j_2+1)S_2\right]\right\}\cup\left[N_{T_1}S_1,T_1\right]\times\left[N_{T_2}S_2,T_2\right]=$$

$$=\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau\right]\times\left[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau\right]\times\left[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1\right]\times\left[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1\right]\times\left[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\left\{\left[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau\right]\times\left[N_{T_2}S_2,T_2\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\left\{\left[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1\right]\times\left[N_{T_2}S_2,T_2\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[N_{T_1}S_1,T_1\right]\times\left[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau\right]\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left\{\left[N_{T_1}S_1,T_1\right]\times\left[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2\right]\right\}\cup\left[N_{T_1}S_1,T_1\right]\times\left[N_{T_2}S_2,T_2\right].$$

Следовательно, для $f_{T_1T_2}$, определения (3), имеем

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\int_X\left[\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+\right.\right.\right.$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2\right]Q(dx)\right\}\right).\quad(4)$$

Имеют место оценки

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau^2\nu(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_X\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_2}\tau v(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2};$$

$$\int_X\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X);$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le c\left(S_1-\tau\right)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_2}.$$

Обозначим

$$A_1=\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx).$$

Аналогично введем обозначения для остальных слагаемых под знаком экспоненты в (4). Получаем

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\sum_{i=1}^{9}A_i\right\}\right)=\ln\left(E\prod_{i=1}^{9}\exp A_i\right)\le$$

$$\le\ln\Big(\exp\left\{c\tau\left(S_1-\tau\right)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\right\}\exp\left\{c\tau\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{c\tau^2v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\right\}\exp\left\{c\left(S_1-\tau\right)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}\right\}\exp\left\{c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{cr_{T_1}\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_2}\right\}\exp\left\{c\tau r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}\right\}\exp\left\{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)\right\}E\exp A_1\Big)=$$

$$=c\tau\left(S_1-\tau\right)v\left(Q,X\right)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau^2v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+$$

$$+c\left(S_1-\tau\right)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+cr_{T_1}\left(S_2-\tau\right)v(Q,X)N_{T_2}+$$

$$+cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2}+cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)+\ln\left(E\exp A_1\right).$$

Имеем

$$\exp A_1=\prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\exp\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx).$$

В силу первой гипотезы гиперперемешивания

$$E\exp A_1 \le \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left(E\left\{\left[\exp\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]^{\alpha(\tau)}\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}}=$$

$$=\prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int_X\int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}}=$$

$$=\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}}.$$

Далее, имеем

$$\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)=(\alpha(\tau)-1)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)+$$

$$+\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+$$

$$+\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx).$$

Справедлива оценка

$$\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2=\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2-\int_{S_1-\tau}^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2-$$

$$-\int_0^{S_1-\tau}\int_{S_2-\tau}^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2\le\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2+c\tau S_2+c(S_1-\tau)\tau.$$

Следовательно,

$$\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le\int_X\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)+$$

$$+c\tau S_2v(Q,X)+c(S_1-\tau)\tau v(x)(Q,X).$$

Получаем

$$\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\le\int_X\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)+$$

$$+c\tau S_2v(Q,X)+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X).$$

Тогда

ISSN 0572-2691

$$\exp\left[\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\le\exp\left[\int_X\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\times$$

$$\times\exp\left[c\tau S_2 v(Q,X)\right]\exp\left[c\left(S_1-\tau\right)\tau v(Q,X)\right]\times$$

$$\times\exp\left[(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)\right].$$

Имеем

$$\ln\left(E\exp A_1\right)\le\ln\left\{\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}}\right\}=$$

$$=\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha\left(\tau\right)}\ln\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int_X\int_0^{S_1-\tau}\int_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)\le$$

$$\le\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha\left(\tau\right)}\ln\left(\exp\left[c\tau S_2 v(Q,X)\right]\exp\left[c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)\right]\times\right.$$

$$\times\exp\left[\left(\alpha(\tau)-1\right)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)\right]E\times$$

$$\left.\times\exp\left[\int_X\int_0^{S_1}\int_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\right)=\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha\left(\tau\right)}\left(c\tau S_2 v(Q,X)+\right.$$

$$\left.+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+\left(\alpha(\tau)-1\right)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}\right).$$

Получаем

$$f_{T_1T_2}\le c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau^2 v(Q,X)\times$$

$$\times N_{T_1}N_{T_2}+c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+cr_{T_1}(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_2}+$$

$$+cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2}+cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)+\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}(c\tau S_2 v(Q,X)+$$

$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

Следовательно,

$$\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+$$

$$+\frac{c\tau^2 v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+\frac{c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}}{N_{T_1}S_1T_2}+\frac{c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}}{N_{T_1}S_1T_2}+$$

$$+\frac{c(S_2-\tau)r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}}{N_{T_2}S_2T_1}+\frac{c\tau r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}}{N_{T_2}S_2T_1}+\frac{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)}{T_2T_1}+$$

$$+\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha\left(\tau\right)N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}\left(c\tau S_2 v(Q,X)+\right.$$

$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2})=$$

$$=\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c\tau^2 v(Q,X)}{S_1S_2}+$$

$$+\frac{c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)}{S_1T_2}+\frac{c\tau r_{T_2}v(Q,X)}{S_1T_2}+\frac{c(S_2-\tau)r_{T_1}v(Q,X)}{S_2T_1}+$$

$$+\frac{c\tau r_{T_1}v(Q,X)}{S_2T_1}+\frac{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)}{T_2T_1}+\frac{1}{\alpha(\tau)S_1S_2}\big(c\tau S_2 v(Q,X)+$$

$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

Устремив T_1, T_2 к ∞, получим

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c\tau^2 v(Q,X)}{S_1S_2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha(\tau)S_1S_2}\big(c\tau S_2 v(Q,X)+$$

$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+\big(\alpha(\tau)-1\big)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

При $S_1, S_2\to\infty$ имеем

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(\alpha(\tau)-1)v(Q,X)}{\alpha(\tau)}+\frac{1}{\alpha(\tau)}\liminf_{S_1,S_2\to\infty}\frac{f_{S_1S_2}}{S_1S_2}.$$

Устремив τ к ∞, имеем

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\liminf_{S_1,S_2\to\infty}\frac{f_{S_1S_2}}{S_1S_2}.$$

Следовательно, существует

$$\Lambda(Q)=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\in[-\infty,+\infty].$$

Применив теорему 2, имеем

$$H=K, J=C\big(X\big), J^*=M(X), \langle Q,g\rangle=\int_X g(x)Q(dx),\ \varepsilon_1=\frac{1}{T_1},\ \varepsilon_2=\frac{1}{T_2}.$$

Далее, $\mu\left(\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2}\right)$ — вероятностная мера на $C(X)$, задаваемая распределением

$$\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\varepsilon_1\varepsilon_2\Lambda_{\mu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\left(\frac{Q}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)=$$

$$=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\ln\left(\int_{C(X)}\exp\left\{\int_X g(x)T_1T_2Q(dx)\right\}\mu\left(\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2}\right)(dg)\right)=$$

ISSN 0572-2691

$$= \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln\left(E\exp\left\{ \int_X \left(\frac{1}{T_1T_2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \zeta(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right)(x)T_1T_2Q(dx) \right\} \right) =$$

$$= \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2} = \Lambda(Q).$$

Теорема доказана.

Вернемся к задачам (1), (2).

Теорема 4. Пусть $\xi(t_1,t_2)$ удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln P\left\{ \left\| F_{T_1T_2} - F \right\| \ge \varepsilon \right\} \le -\inf\left\{ I(z),\, z\in A_\varepsilon \right\},$$

где $I(z) = \Lambda^*(z) = \sup\left\{ \int_X z(x)Q(dx) - \Lambda(Q),\, Q\in M(X) \right\}$ — неотрицательная полунепрерывная снизу выпуклая функция,

$$\Lambda(Q) = \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln\left(E\exp\left\{ \int_X \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \left[f(x,\xi(t_1,t_2)) - F(x) \right] dt_1dt_2Q(dx) \right\} \right),$$

$A_\varepsilon = \{z\in K : \|z\| \ge \varepsilon\}$.

Доказательство. Как известно, A_ε — замкнутое подмножество K. Поле

$$\zeta(t_1,t_2) = f\left(\cdot,\xi(t_1,t_2)\right) - F(\cdot),$$

принимающее значения в K, является непрерывной функцией от $\xi(t_1,t_2)$, и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы 3. Таким образом, данная теорема вытекает из теоремы 3.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln P\left\{ \left| \min\left\{ F(x), x\in X \right\} - \min\left\{ F_{T_1T_2}(x),\, x\in X \right\} \right| \ge \varepsilon \right\} \le$$

$$\le -\inf\left\{ I(z),\, z\in A_\varepsilon \right\}, \tag{5}$$

где $I(\cdot)$ и A_ε определены в теореме 4.

Предположим, что существует улучшающая функция ψ для F в точке x_0 с некоторорй постоянной r. Пусть $x(T_1,T_2)$ — точка минимума (2) по $B(x_0,r)$. Если ε достаточно мало, так что выполнено условие

$$\psi(|x-x_0|) \le 2\varepsilon \Rightarrow |x-x_0| \le r,$$

то имеем

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln P\{\psi(\left|x(T_1,T_2) - x_0\right|) \ge 2\varepsilon\} \le -\inf\{I(z),\, z\in A_\varepsilon\}. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 при всех ω

$$\left| \min\left\{ F(x),\, x\in X \right\} - \min\left\{ F_{T_1T_2}(x),\, x\in X \right\} \right| \le \left\| F_{T_1T_2} - F \right\|.$$

Тогда из теоремы 4 вытекает (5).

Далее, по теореме 1 при всех ω

$$\psi(|x_0 - x(T_1, T_2)|) \le 2\|F_{T_1T_2} - F\|,$$

и из теоремы 4 следует (6).

Замечание. Если, кроме условий теоремы 5, ψ выпукла и строго возрастает на $[0, r]$, то

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{T_1T_2} \ln P\{|x(T_1, T_2) - x_0| \ge \psi^{-1}(2\varepsilon)\} \le -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\}. \qquad (7)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 при всех ω

$$|x_0 - x(T_1, T_2)| \le \psi^{-1}(2\|F_{T_1T_2} - F\|).$$

Тогда

$$P\{|x(T_1, T_2) - x_0| \ge \psi^{-1}(2\varepsilon)\} \le P\{\psi^{-1}(2\|F_{T_1T_2} - F\|) \ge \psi^{-1}(2\varepsilon)\} =$$

$$= P\{\|F_{T_1T_2} - F\| \ge \varepsilon\}$$

и справедливость (7) следует из теоремы 4.

Заключение

Резюмируя полученные результаты, отметим, что их можно использовать при решении различных задач стохастической оптимизации, которые возникают в теории распознавания, регрессионном анализе, где появляется необходимость нахождения оптимальных решений при наблюдениях однородного случайного поля.

П.С. Кнопов, Є.Й. Касіцька

ВЛАСТИВОСТІ ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ЕМПІРИЧНИХ ОЦІНОК У ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

Розглядається задача стохастичного програмування, де випадковим чинником є однорідне у вузькому розумінні випадкове поле, що задовольняє умові сильного перемішування з відповідним коефіцієнтом. Вихідна проблема апроксимується задачею мінімізації емпіричної функції, побудованої за спостереженнями однорідного випадкового поля. Наведено умови, за яких емпірична оцінка є консистентною, зокрема, накладаються обмеження на моменти мінімізуємої функції. При дослідженні великих відхилень використовуються теореми з функціонального аналізу, що дозволяють з оцінки великих відхилень емпіричної функції від первинної вивести оцінку великих відхилень точки мінімуму та мінімального значення емпіричної функції від відповідних характеристик первинної задачі. Зокрема, використовується поняття покращуючої функції, що характеризує поведінку мінімізовної функції в околі точки мінімуму. Використовується той факт, що функцію під знаком математичного сподівання при фіксованому другому аргументі можна вважати елементом простору неперервних функцій. Для спрощення задачі припускається, що дана функція належить опуклій компактній підмножині відповідного функціонального простору. Використовується теорія лінійних операторів, співвідношення двоїстості. Зокрема, використовується той факт, що спряженим до простору неперервних функцій є простір обмежених знакових мір. Використовуються відомі результати з теорії великих відхилень, зокрема, теорема про достатню ознаку оцінки верхньої границі великих відхилень. Використовуються поняття вимірно відокремлених випадкових величин та першої гіпотези гіперперемішування для однорідного поля. Доводиться допоміжне твердження про великі відхилення емпіричної оцінки в абстрактному просторі. При його доведенні прямокутник на площині розбивається на підмножини, відокремлені одна від одної. Потім з однорідності поля у вузькому розумінні та першої гіпотези гіперперемішування виводиться існування границі, що є достатньою умовою для оцінки великих відхилень.

Ключові слова: задача стохастичного програмування, однорідне у вузькому розумінні випадкове поле, умова сильного перемішування, великі відхилення.

P.S. Knopov, E.J. Kasitskaya

PROPERTIES OF LARGE DEVIATIONS OF EMPIRICAL ESTIMATES IN A STOCHASTIC OPTIMIZATION PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD

The paper is devoted to the consideration of a stochastic programming problem where the random factor is a homogeneous in a strict sense random field satisfying the strong mixing condition with the appropriate mixing coefficient. The first problem is approximated by the problem of minimization of the empirical function constructed on observations of the homogeneous random field. The conditions under which the empirical estimate is consistent are given, in particular, we have limits on the moments of the empirical function. When large deviations are investigated, some theorems from the functional analysis are used. In the theorems the estimate of large deviations of the empirical function from the former one implies the estimate of large deviations of the minimum point and the minimal value of the empirical function from analogous characteristics of the former problem. In particular, the notion of the conditioning function which describes the behavior of the minimized function in a neighborhood of a minimum point, is used. The fact that when the second argument is fixed, the function under the expectation sign can be considered as the element of the space of continuous functions, is used. For simplicity it assumes that the given function belongs to a convex compact subset of the appropriate functional space. The linear operators theory and the duality relation are used. In particular, the fact that a space of limited signed measures is dual to a space of continuous functions is used. The well-known results from large deviations theory, in particular, the theorem of a sufficient condition of the upper bound estimate for large deviations are applied. Notions of measurably separated random variables and the first hypermixing hypothesis for a homogeneous field are used. The auxiliary assertion on large deviations of empirical estimates in an abstract space is proved. In the proof the rectangle on the plane is divided on the subsets separated one from each other. Then the homogeneity of the field in a strict sense and the first hypermixing hypothesis imply the existence of the limit which is a sufficient condition for large deviations estimate.

Keywords: stochastic programming problem, a homogeneous in a strict sense random field, strong mixing condition, large deviations.

1. Ermoliev Yu.M., Knopov P.S. Method of empirical means in stochastic programming problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006. **42**(6). P. 773–785.
2. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of m-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. **33**(4). P. 468–481
3. Knopov, P.S., Kasitskaya, E.I. Large deviations of empirical estimates in stochastic programming problems. *Kibernetika i Sistemnyj Analiz*. 2004. 40(4). P. 52–60.
4. Knopov, P.S., Kasitskaya On large deviations of empirical estimates in a stochastic programming problem with time-dependent observations. Cybernetics and Systems Analysis. 2010. 46(5), P. 724–728
5. Касицкая Е.И. Аппроксимация решения задачи стохастического программирования с помехой, являющейся однородным случайным полем. Мат. методы принятия решений в условиях неопределенности. Киев. 1990. С. 23–27.
6. Kaniovski Yu.M., King A.J. Wets R.J-B. Probabilistic bounds (via large deviations) for the solutions of stochastic programming problems. *Ann. Oper. Res*., 1995, 56, P. 189-208.
7. Deuschel J.–D., Stroock D.W. Large deviations. Boston.: Academic Press. 1989. 310 p.
8. Dunford N., Schwartz J. Linear operators. P.I: General theory. New York: Interscience, 1957. 896 p.

Получено 30.07.2020