МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.854.2

А.А. Павлов

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ МНОГОЦЕЛЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ключевые слова: многоцелевое линейное программирование, неопределенность, компромиссные критерии, компромиссные решения, вероятность, нечеткое множество, эмпирическая матрица парных сравнений.

Введение

В [1, 2] для класса задач комбинаторной оптимизации вида

$$\begin{matrix}\min \\ \max \\ \sigma\in\Omega\end{matrix} \sum_{i=1}^{s} \omega_i k_i(\sigma), \qquad (1)$$

где ω_i — положительные весовые коэффициенты, $k_i(\sigma)$ — произвольная числовая характеристика допустимого решения $\sigma, \forall\sigma \in \Omega$ — области допустимых решений, численные значения коэффициентов ω_i, $i=\overline{1, s}$, могут принимать одно из возможных значений $\{\omega_i^l,\ i=\overline{1, s}\}$, $l=\overline{1, L}$. Для такой постановки задачи приведены компромиссные критерии и соответствующие им эффективные алгоритмы получения оптимальных компромиссных решений. В [3] рассмотрен прикладной пример решения такой задачи. В [4, 5] использованы и модифицированы компромиссные критерии для решения однопродуктивных и многопродуктивных транспортных задач в условиях неопределенности. В данной статье показано, что полученные в [1, 2, 4, 5] результаты могут использоваться для нахождения новых свойств известных критериев, введения новых критериев и соответствующих им алгоритмов в задаче многоцелевого линейного программирования (ЛП) [6], а также позволяют сформулировать новую постановку задачи линейного целевого программирования в условиях неопределенности и предложить новые компромиссные критерии и соответствующие им эффективные алгоритмы нахождения оптимальных компромиссных решений.

Постановка задачи многоцелевого ЛП заключается в следующем [6]. Имеются линейные ограничения, которые для удобства дальнейшего изложения представим в стандартной форме

$$Ax = b,\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1, n}, \qquad (2)$$

где $A=(a_{ij}), i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n}$, $b=(b_1, ..., b_m)^{\mathrm{T}}, \forall a_{ij},\ b_i$ — известные действительные числа. x_j, $j=\overline{1, n}$ — переменные. Задано k линейных функционалов $\min\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x,\ l=\overline{1, L}$, $c_l^{\mathrm{T}}=(c_{l1}, ..., c_{ln})$, $\forall c_{li}$ — заданные действительные числа.

Примечание 1. Некоторые числа c_{li} могут тождественно равняться нулю, если они соответствуют неотрицательным переменным, превращающим неравенства в равенства. В классической постановке задачи многоцелевого ЛП требуется сформулировать критерии и соответствующие им алгоритмы нахождения компромиссного вектора x, которому соответствует оптимальное значение выбранного компромиссного критерия.

Примечание 2. Некоторые из функционалов могут иметь вид $\max\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x$. Это не сужает сформулированную задачу, так как $\max\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x = \min\limits_x (-c_l^{\mathrm{T}} x)$.

Рассмотрим наиболее распространенные подходы к решению этой задачи:

1) вводятся положительные весовые коэффициенты $\omega_l > 0$ важности критерия $\min\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x,\ \ l = \overline{1, L}$, и решается задача

$$\min_x \sum_{l=1}^{L} \omega_l c_l^{\mathrm{T}} x,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n};$$

2) пусть $\omega_{l_1} > \omega_{l_2} > \ldots > \omega_{l_L}$, решается задача $\min\limits_x c_{l_1}^{\mathrm{T}} x,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,$ $j = \overline{1, n}$.

Пусть оптимальное значение ее функционала равно f_{opt}^1. Решается вторая задача ЛП:

$$\min_x c_{l_2}^{\mathrm{T}} x,\ \ Ax = b,\ \ c_{l_1}^{\mathrm{T}} x = f_{\mathrm{opt}}^1,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

Описанная процедура продолжается. Последней задачей ЛП является

$$\min_x c_{l_L}^{\mathrm{T}} x,\ \ Ax = b,\ \ c_{l_i}^{\mathrm{T}} x = f_{\mathrm{opt}}^i,\ \ i = \overline{1, L-1},\ \ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Покажем, что для случая, когда $Ax = b, x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}$, выпуклым компактом является модификация результатов, приведенных в [1, 2, 4, 5]. Во-первых, это позволяет конкретизировать свойства компромиссного решения, полученного при использовании описанного выше первого подхода; во-вторых, ввести новые компромиссные критерии и соответствующие им оптимальные компромиссные решения.

Примечание 3. Условие, что $Ax = b, x_j \ge 0, j = \overline{1, n},$ — выпуклый компакт, не ограничивает область практического применения изложенных ниже результатов, поскольку ни в одной практической задаче реализуемый вектор решения не содержит не ограниченных по модулю компонент.

Компромиссные критерии для задачи многоцелевого линейного программирования в детерминированной постановке

Введем следующие компромиссные критерии.

Критерий 1. Найти вектор x_1^{opt}, которому соответствует

$$\min_x \sum_{l=1}^{L} \omega_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l),\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $\omega_l > 0,\ l = \overline{1, L},$ — известные экспертные коэффициенты, а

$$f_{\mathrm{opt}}^l = \min_x c_l^{\mathrm{T}} x,\ \ Ax = b, x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

 ISSN 0572-2691

Примечание 1. Далее будет показано, что решение задачи (3) является оптимальным компромиссным решением, реализующим описанный во введении известный первый подход.

Примечание 2. Для критерия 1 условие, что $Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}$, — выпуклый компакт, не является обязательным.

Критерий 2. Пусть $\omega_{l_1} > \forall \omega_l,\ l = \overline{1, L}, l \ne l_1$. Найти вектор x_2^{opt}, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x_2^{\text{opt}} = \arg\{\min_x c_{l_1}^{\text{T}} x,\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\}, \tag{4}$$

$$x_2^{\text{opt}} = \arg \min_{x \in \{x\}_{l_1}} \sum_{l=1,\, l \ne l_1}^{L} (c_l^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{l}), \tag{5}$$

где $\{x\}_{l_1}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (4).

Примечание. Аналогично задаются множества оптимальных решений $\{x\}_l,\ l = \overline{1, L}$.

Критерий 3 (обобщение критерия 2). Найти вектор x_3^{opt}, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x_3^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} (c_{t_j}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{t_j}),\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\right\}, \tag{6}$$

$$x_3^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_{x \in \{x\}_{k_1}} \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l} (c_{p_l}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{p_l})\right\},$$

где $\{t_j,\ j = \overline{1, k_1}\} \cap \{p_l,\ l = \overline{1, k_2}\} = \{\varnothing\},\ k_1 + k_2 = L$; $\{x\}_{k_1}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (6); $\omega_l > 0,\ l = \overline{1, L}$, — экспертные коэффициенты, заданные выше.

Примечание 1. Ограничения задачи ЛП (6) могут иметь вид

$$Ax = b, x_j \ge 0, j = \overline{1, n},\ c_p^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{p} + x_{n+p} = \hat{l}_p,\ \forall x_{n+p} \ge 0,\ p = \overline{1, L},$$

где $\hat{l}_p > 0$ — экспертные ограничения.

Примечание 2. Наиболее практичным является следующий частный случай критерия 3:

$$x_3^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{j=1}^{k} \omega_{l_j} (c_{l_j}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{l_j}),\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\right\}, \tag{7}$$

$$x_3^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_{x \in \{x\}_k} \sum_{j=k+1}^{L} \omega_{l_j} (c_{l_j}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{l_j})\right\}, \tag{8}$$

где $\{x\}_k$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (7); $\omega_j,\ j = \overline{1, L}$, удовлетворяют неравенствам $\omega_{l_1} > \omega_{l_2} > \ldots > \omega_{l_L}$.

Критерий 4. Для заданных экспертных чисел $\hat{l}_j > 0,\ j = \overline{1, L}$, найти вектор x_4^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_4^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{r=1}^{L} \omega_r^1 \max(0, \Delta_r - \hat{l}_r),\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\}, \tag{9}$$

где $\Delta_r = c_r^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^r$, $r = \overline{1, L}$; $\omega_r^1 > 0$, $r = \overline{1, L}$, — экспертные коэффициенты важности нарушения r-го ограничения; $c_r^{\text{T}} x \ge f_{\text{opt}}^r - \hat{l}_r$.

Критерий 5. Для заданных экспертных чисел $\omega_{t_j} > 0,\ j = \overline{1, k_1}$, $\hat{l}_{p_l} > 0,\ l = \overline{1, k_2}$, найти вектор x_5^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_5^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} (c_{t_j}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{t_j}), Ax = b, x_j \ge 0, j = \overline{1, n}, c_{p_l}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{p_l} \le \hat{l}_{p_l}, l = \overline{1, k_2}\right\}.$$

Критерий 6. Для заданных экспертных чисел $\omega_{t_j} > 0,\ j = \overline{1, k_1}$, $\omega_{p_l}^1 > 0,\ \hat{l}_{p_l} > 0, l = \overline{1, k_2}$, найти вектор x_6^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_5^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \left[\sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} (c_{t_j}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{t_j}) + \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l}^1 \max(0, \Delta_{p_l} - \hat{l}_{p_l})\right],\right.$$

$$\left. Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\right\}, \tag{10}$$

где $\Delta_{p_l} = c_{p_l}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{p_l}$, $l = \overline{1, k_2}$.

Построение оптимальных алгоритмов, реализующих компромиссные критерии 1–6, непосредственно вытекает из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. Рассмотрим многоцелевую задачу ЛП (2). Тогда для $\forall a_l > 0$, $l = \overline{1, L}$, имеет место равенство

$$\arg\min_{x \in \Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{l_j} x_j - f_{\text{opt}}^l)\right] = \arg\min_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l c_{l_j}\right) x_j, \tag{11}$$

где Ω — произвольное выпуклое множество относительно переменных x_j, $j = \overline{1, n}$, вектора x, $f_{\text{opt}}^l = \min_{x \in \Omega} c_l^{\text{T}} x$.

Примечание. Так как при построении оптимальных алгоритмов, реализующих компромиссные критерии 1–6, линейные ограничения используемых задач ЛП могут иметь различный вид, в утверждении 1 задается произвольное выпуклое множество Ω.

Доказательство. $\forall l,\ x \in \Omega,\ c_l^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^l \ge 0$. Таким образом, левая часть равенства (11) определяет вектор x, которому соответствует минимум суммы неотрицательных слагаемых. Следовательно,

$$\min_{x \in \Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{l_j} x_j - f_{\text{opt}}^l)\right] = \min_{x \in \Omega} \left\{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l c_{l_j}\right) x_j\right\} - \sum_{l=1}^{L} a_l f_{\text{opt}}^l \ge 0, \tag{12}$$

откуда очевидным образом следует справедливость утверждения 1.

Примечание. Утверждение 1 является частным случаем утверждения 5 [1]. Действительно, в данном примере $s = n$, а $k_i(\sigma) = x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Утверждение 2. Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации

$$\min_{x\in\Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l), \tag{13}$$

где $a_l > 0$, Ω — произвольный выпуклый компакт, образованный конечным числом линейных ограничений. Пусть коэффициенты $a_l, l = \overline{1, L},\ l \neq l_j$, фиксированные. Тогда существует такое конечное положительное число $a_{l_j}^* > 0$, что для всех $a_{l_j} \geq a_{l_j}^*$ для произвольного оптимального решения x_{opt} задачи комбинаторной оптимизации (13) выполняется

$$c_{l_j}^{\mathrm{T}} x_{\mathrm{opt}} - f_{\mathrm{opt}}^{l_j} = 0.$$

Доказательство. Множество вершин выпуклого компакта Ω конечно (обозначим его Ω^*). Для произвольного вектора c существует не менее одной вершины Ω (Ω — выпуклый компакт), на которой достигается

$$\min_{x\in\Omega} c^{\mathrm{T}} x.$$

В силу утверждения 1

$$\arg\min_{x\in\Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l) = \arg\min_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l c_{l_j} \right) x_j. \tag{14}$$

Пусть $\{\hat{x}\}_{l_j}$ — множество всех вершин Ω, каждая из которых является оптимальным решением задачи ЛП

$$\min_{x\in\Omega} c_{l_j}^{\mathrm{T}} x = f_{\mathrm{opt}}^{l_j}. \tag{15}$$

Тогда $\max\limits_{x\in\{\hat{x}\}_{l_j}} \sum\limits_{l=1}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l) > 0$ — конечное число, которое от значения коэффициента $a_{l_j} > 0$ не зависит. Следовательно, всегда существует такое положительное число $a_{l_j}^*$, что для всех $a_{l_j} \geq a_{l_j}^*$, при фиксированных конечных значениях $a_l \geq 0,\ l = \overline{1, L},\ l \neq l_j$, выполняется неравенство

$$\forall x \in \{\hat{x}\}_{l_j} \sum_{l=1}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l) < \min_{x\in\Omega^* \setminus \{\hat{x}\}_{l_j}} \sum_{l=1}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l).$$

Утверждение 2 доказано.

Примечание. $\forall a_{l_j} \geq a_{l_j}^*$, при фиксированных значениях коэффициентов $a_l,\ l = \overline{1, L},\ l \neq l_j$,

$$\arg\min_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l c_{l_j} \right) x_j \in \{x\}_{l_j}. \tag{16}$$

Тогда на произвольном оптимальном решении (16) в силу равенства (14) достигается

$$\min_{x\in\{x\}_{l_j}} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq l_j}}^{L} a_l (c_l^{\mathrm{T}} x - f_{\mathrm{opt}}^l). \tag{17}$$

Построение оптимальных компромиссных решений, соответствующих критериям 1–6

Критерий 1. Оптимальное компромиссное решение по критерию 1 в силу утверждения 1 является решением следующей задачи ЛП:

$$x_1^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{l=1}^{L} \omega_l c_l^{\text{T}} x,\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}\right\}.$$

Критерий 2. Необходимо подобрать такое достаточно большое положительное число $a_{l_1} > 0$, которое в силу утверждения 2 всегда существует, при этом оптимальное решение задачи ЛП

$$\arg\left\{\min_x \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l c_{l_j}\right) x_j,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\} \in \{x\}_{l_1}.$$

Это решение и является оптимальным компромиссным вектором x_2^{opt} в силу примечания к утверждению 2 (равенство (5) выполняется автоматически).

Критерий 3. Сначала решаем следующую задачу ЛП:

$$\min_x \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} c_{t_j, i}\right) x_i,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Затем подбираем такое достаточно большое положительное число $a_{k_1} > 0$, которое в силу утверждения 2 всегда существует, при этом оптимальное решение задачи ЛП

$$\arg\left\{\min_x \left[a_{k_1}\left(\sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} c_{t_j}^{\text{T}}\right) + \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l} c_{p_l}^{\text{T}}\right] x,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\}$$

является оптимальным решением задачи ЛП (18). Полученное решение — оптимальный компромиссный вектор x_3^{opt} в силу примечания к утверждению 2.

Критерий 4. Сначала находим числа f_{opt}^l — оптимальные значения функционалов следующих задач ЛП:

$$\min_x c_l^{\text{T}} x = f_{\text{opt}}^l,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

Оптимальное компромиссное решение x_4^{opt} по критерию 4 является решением следующей задачи ЛП:

$$\min_x \sum_{r=1}^{L} \omega_r^1 z_r,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n};\ c_r^{\text{T}} x - z_r \le f_{\text{opt}}^r + \hat{l}_r,\ \ z_r \ge 0,\ r = \overline{1, L}. \tag{19}$$

Критерий 5. Сначала решаются k_2 задач ЛП

$$\min_x c_{p_l}^{\text{T}} x = f_{\text{opt}}^{p_l},\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n},\ \ l = \overline{1, k_2}.$$

В силу утверждения 1 вектор x_5^{opt} — решение следующей задачи ЛП:

$$\min_x \sum_{r=1}^{k_1} \omega_{t_j} c_{t_j}^{\text{T}} x,\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n};\ c_{p_l}^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{p_l} \le \hat{l}_{p_l},\ \ l = \overline{1, k_2}. \tag{20}$$

Критерий 6. Сначала решаются k_2 задач ЛП:

$$\min_x c_{p_l}^{\mathrm{T}} x = f_{\mathrm{opt}}^{p_l},\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n},\ l = \overline{1, k_2}\ .$$

Вектор x_6^{opt} — решение следующей задачи ЛП:

$$\min_{\substack{x, z_{p_l} \\ l = \overline{1, k_2}}} \left\{ \sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} c_{t_j}^{\mathrm{T}} x + \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l}^1 z_{p_l} \right\},\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n};$$

$$c_{p_l}^{\mathrm{T}} x - z_{p_l} \le f_{\mathrm{opt}}^{p_l} + \hat{l}_{p_l},\ z_{p_l} \ge 0,\ l = \overline{1, k_2}\ . \tag{21}$$

Действительно, в силу очевидной модификации утверждения 1 ($\forall z_{p_l} \ge 0$, $\omega_{p_l}^1 \ge 0$ выражение $\sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l}^1 z_{p_l} \ge 0$) решение задачи ЛП (21) является компромиссным решением по критерию 6.

Многоцелевое линейное программирование в условиях неопределенности

Постановка задачи. Как было показано выше, задача многоцелевого ЛП в детерминированной постановке имеет следующий вид: имеются линейные ограничения, заданные в стандартной форме задачи ЛП $Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}$, которые являются выпуклым компактом, и L линейных функционалов $\min\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x,\ l = \overline{1, L}$ (функционал $\max\limits_x c_l^{\mathrm{T}} x = \min\limits_x (-c_l^{\mathrm{T}} x)$).

Постановка этой задачи в условиях неопределенности заключается в том, что значения коэффициентов векторов c_l (числа $c_{lj},\ j = \overline{1, n},\ l = \overline{1, L}$) не определены. Эта неопределенность в данной работе формализуется в терминах теории вероятностей либо в терминах теории нечетких множеств.

Задаются случайные величины

$$F^l = \min_x \sum_{j=1}^{n} \hat{c}_{lj}^{\mathrm{T}} x_j - \hat{f}_{\mathrm{opt}}^{l},\ l = \overline{1, L}\ , \tag{22}$$

где $n+1$-мерные дискретные случайные величины $\hat{c}_{l1}, \ldots, \hat{c}_{ln},\ \hat{f}_{\mathrm{opt}}^{l},\ l = \overline{1, L}$, задаются таблицами вида

$$\left\{ \begin{matrix} c_{l1}^m, \ldots, c_{ln}^m,\ f_{opt}^{lm} \\ P_l^m > 0,\ \sum\limits_{m=1}^{T_l} P_l^m = 1 \end{matrix} \right\},\ l = \overline{1, L},\ m = \overline{1, T_l}\ , \tag{23}$$

где

$$f_{\mathrm{opt}}^{lm} = \min_x \sum_{j=1}^{n} c_{lj}^m x_j,\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{24}$$

Задаются нечеткие дискретные множества

$$\left\{ \begin{matrix} c_{l1}^m, \ldots, c_{ln}^m,\ f_{\mathrm{opt}}^{lm} \\ 0 < \mu_l^m (c_{l1}^m, \ldots, c_{ln}^m,\ f_{\mathrm{opt}}^{lm}) \le 1 \end{matrix} \right\},\ l = \overline{1, L},\ m = \overline{1, T_l}\ , \tag{25}$$

где $\mu_l^m (c_{l1}^m, \ldots, c_{ln}^m,\ f_{\mathrm{opt}}^{lm}) = \mu_l^m$ — степень достоверности (значение функции принадлежности нечеткого множества) того, что коэффициенты l-го функционала примут значения $c_{l1}^m, \ldots, c_{ln}^m$, а f_{opt}^{lm} — оптимальное значение функционала задачи ЛП (24), соответствующего этим значениям.

Для такой постановки задачи многоцелевого ЛП в условиях неопределенности вводим следующие компромиссные критерии (всюду $\omega_j > 0,\ j = \overline{1, L}$, — известные экспертные коэффициенты).

Критерий 1а. Найти вектор x_{1a}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{1a}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{l=1}^{L} \omega_l MF^l,\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\},$$

где $MF^l = \sum_{m=1}^{T_l} P_l^m[(c_l^m)^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{lm}]$ — математическое ожидание случайной величины $F^l,\ l = \overline{1, L}$.

Критерий 1b. Найти вектор x_{1b}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{1b}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{l=1}^{L} \omega_l \sum_{m=1}^{T_l} \mu_l^m[(c_l^m)^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{lm}],\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\}.$$

В дальнейшем для сокращения записи будем обозначать символом $\overline{\mu}(\Delta_l^{fuz})$ нечеткий аналог MF^l:

$$\overline{\mu}(\Delta_l^{fuz}) = \sum_{m=1}^{T_l} \mu_l^m[(c_l^m)^{\text{T}} x - f_{\text{opt}}^{lm}],\ \ l = \overline{1, L}.$$

Пусть $\omega_{l_1} > \omega_{l_2} > \ldots > \omega_{l_L} > 0$.

Критерий 2а. Найти вектор x_{2a}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{2a}^{opt} = \arg\{\min_x MF^{l_1},\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\}, \tag{26}$$

$$x_{2a}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_{x \in \{x\}_{l_1(F)}} \sum_{l=1, l \ne l_1}^{L} MF^l\right\},$$

где $\{x\}_{l_1(F)}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (26).

Критерий 2b. Найти вектор x_{2b}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{2b}^{opt} = \arg\{\min_x \overline{\mu}(\Delta_{l_1}^{fuz}),\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\}, \tag{27}$$

$$x_{2b}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_{x \in \{x\}_{l_1(\Delta^{fuz})}} \sum_{l=1, l \ne l_1}^{L} \overline{\mu}(\Delta_l^{fuz})\right\},$$

где $\{x\}_{l_1(\Delta^{fuz})}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (27).

Критерий 3а. Найти вектор x_{3a}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{3a}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} MF^{t_j},\ \ Ax = b,\ \ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}\right\}, \tag{28}$$

$$x_{3a}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_{x \in \{x\}_{k_1(F)}} \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l} MF^{p_l}\right\},$$

 ISSN 0572-2691

где $\{x\}_{k_1(F)}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (28); $\{t_j,\ j=\overline{1,k_1}\}\bigcap\{p_l,\ l=\overline{1,k_2}\}=\{\varnothing\},\ k_1+k_2=L$.

Критерий 3b. Найти вектор x_{3b}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{3b}^{\text{opt}}=\arg\left\{\min_x\sum_{j=1}^{k_1}\omega_{t_j}\overline{\mu}(\Delta_{t_j}^{fuz}),\ Ax=b,\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\right\},\tag{29}$$

$$x_{3b}^{\text{opt}}=\arg\left\{\min_{x\in\{x\}_{k_1(\Delta^{fuz})}}\sum_{l=1}^{k_2}\omega_{p_l}\overline{\mu}(\Delta_{p_l}^{fuz})\right\},$$

где $\{x\}_{k_1(\Delta^{fuz})}$ — множество оптимальных решений задачи ЛП (29); $\{t_j,\ j=\overline{1,k_1}\}\bigcap\{p_l,\ l=\overline{1,k_2}\}=\{\varnothing\},\ k_1+k_2=L$.

Многоцелевое линейное программирование в условиях неопределенности. Смешанные модели

Постановка задачи. Рассматривается следующая модификация условий (23), (25). Условия (23), (25) относятся только к критериям с номерами $t_j,\ j=\overline{1,k_1}$. Множество критериев с номерами $p_l,\ l=\overline{1,k_2}$, $\{t_j,\ j=\overline{1,k_1}\}\bigcap\{p_l,\ l=\overline{1,k_2}\}=\{\varnothing\}$, $k_1+k_2=L$, соответствуют детерминированной постановке задачи многоцелевого ЛП. Такая ситуация возможна, когда множество критериев $\{t_j,\ j=\overline{1,k_1}\}$ определяет эффективность в отдаленной перспективе.

Для такой постановки задачи модификация критерия 4 (детерминированная постановка) теряет смысл.

Критерий 5a. Для заданных экспертных чисел $\hat{l}_{p_l}>0,\ l=\overline{1,k_2}$, найти вектор x_{5a}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{5a}^{\text{opt}}=\arg\left\{\min_x\sum_{j=1}^{k_1}\omega_{t_j}MF^{t_j},\ Ax=b,\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},\ c_{p_l}^{\text{T}}x-f_{opt}^{p_l}\leq\hat{l}_{p_l},\ l=\overline{1,k_2}\right\}.$$

Критерий 5b. Для заданных экспертных чисел $\hat{l}_{p_l}>0,\ l=\overline{1,k_2}$, найти вектор x_{5b}^{opt}, удовлетворяющий условиям

$$x_{5b}^{\text{opt}}=\arg\left\{\min_x\sum_{j=1}^{k_1}\omega_{t_j}\overline{\mu}(\Delta_{t_j}^{fuz}),\ Ax=b,\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n},\ c_{p_l}^{\text{T}}x-f_{\text{opt}}^{p_l}\leq\hat{l}_{p_l},\ l=\overline{1,k_2}\right\}.$$

Критерий 6a. Для заданных экспертных чисел $\omega_{t_j}>0,\ j=\overline{1,k_1}$, $\omega_{p_l}^1>0,\ \hat{l}_{p_l}>0,\ l=\overline{1,k_2}$, найти вектор x_{6a}^{opt}, удовлетворяющий условиям:

$$x_{6a}^{\text{opt}}=\arg\left\{\min_x\left[\sum_{j=1}^{k_1}\omega_{t_j}MF^{t_j}+\sum_{l=1}^{k_2}\omega_{p_l}^1\max(0,\Delta_{p_l}-\hat{l}_{p_l})\right],\ Ax=b,\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\right\},$$

где $\Delta_{p_l}=c_{p_l}^{\text{T}}x-f_{\text{opt}}^{p_l},\ l=\overline{1,k_2}$.

Критерий 6b. Найти вектор x_{6b}^{opt}, удовлетворяющий условиям:

$$x_{6b}^{\text{opt}} = \arg\left\{\min_x \left[\sum_{j=1}^{k_1} \omega_{t_j} \overline{\mu}(\Delta_{t_j}^{fuz}) + \sum_{l=1}^{k_2} \omega_{p_l}^1 \max(0, \Delta_{p_l} - \hat{l}_{p_l})\right], Ax = b, x_j \geq 0, j = \overline{1, n}\right\}.$$

В силу утверждений 1, 2 алгоритмы построения оптимальных компромиссных решений по критериям 1a–3a, 5a, 6a, 1b–3b, 5b, 6b являются очевидной модификацией алгоритмов построения оптимальных компромиссных решений для критериев с номерами 1, 2, 3, 5, 6.

В заключение отметим, что предложенные линейные модели содержат экспертные веса. В [2] автор систематизировал полученные им и его учениками результаты для нахождения экспертных весов по эмпирической матрице парных сравнений. В [2] приведены статистически подтвержденные эффективные модели оптимизации для нахождения оценок экспертных весов, обоснованный критерий выбора наилучших оценок, а также критерий оценки достоверности полученных результирующих оценок экспертных весов. Эффективность предложенных моделей, критериев и методов существенно не зависят от размерности эмпирической матрицы парных сравнений и возможной ее неполной заполненности (значения ее некоторых элементов могут отсутствовать).

Заключение

На основе теоретических результатов, ранее полученных автором при исследовании одного класса задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, получены новые критерии и соответствующие им алгоритмы оптимальных компромиссных решений для следующих задач:

1) многоцелевого ЛП в детерминированной постановке;
2) многоцелевого ЛП в условиях неопределенности;
3) многоцелевого ЛП в смешанной постановке.

Формальные модели многоцелевого ЛП в условиях неопределенности приведены как в терминах теории вероятностей, так и в терминах нечетких множеств.

О.А. Павлов

МОДЕЛІ ТА АЛГОРИТМИ БАГАТОЦІЛЬОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Досліджено окремий випадок постановки задачі векторної оптимізації — задачу багатоцільового лінійного програмування (ЛП), наведено її постановку, а також два найбільш поширені підходи до її розв'язання. Автор, використовуючи свої результати в області знаходження компромісних розв'язків для одного класу задач комбінаторної оптимізації за умов невизначеності, модифікував їх для розв'язання задачі багатоцільового ЛП, обмеження якої задаються у вигляді опуклого компакту. В результаті цієї модифікації доведено два твердження, які дозволили отримати наступні результати: (а) для задачі багатоцільового ЛП в детермінованій постановці: знайдено нову властивість компромісного критерію, який є лінійною зваженою згорткою лінійних критеріїв; наведено п'ять нових критеріїв отримання компромісного розв'язку. Для кожного з наведених компромісних критеріїв сформульовано задачі ЛП, розв'язки яких є оптимальним компромісним розв'язком за відповідним критерієм; (б) сформульовано задачі багатоцільового ЛП в умовах невизначеності (при цьому невизначеність формалізується як в термінах теорії ймовірностей шляхом введення багатовимірних дискретних випадкових величин, так і в термінах теорії нечітких множин шляхом введення відповідних функцій приналежності нечітких дискретних множин). Наведено компромісні критерії та алгоритми отримання компромісних розв'язків як розв'язки відповідних задач ЛП для невизначеності обох типів; (в) наведено також змішані моделі багатоцільового ЛП для випадку, коли частина лінійних критеріїв детермінована, а решта задана в умовах невизначеності. У розглянутих критеріях використовуються експертні ваги, які запропоновано знаходити за емпіричною матрицею парних порівнянь за допомогою моделей оптимізації та відповідних критеріїв знаходження найкращого рішення, розроблених автором та його учнями.

Ключові слова: багатоцільове лінійне програмування, невизначеність, компромісні критерії, компромісні розв'язки, ймовірність, нечітка множина, емпірична матриця парних порівнянь.

A.A. Pavlov

MODELS AND ALGORITHMS OF MULTIPURPOSE LINEAR PROGRAMMING

This paper examines a special case of the vector optimization problem formulation, the multipurpose linear programming (LP) problem. Its formulation is provided, as well as two most common approaches to its solution. The author uses his results in the field of finding compromise solutions for one class of combinatorial optimization problems under uncertainty. He has modified the results to solve the multipurpose LP problem with the constraints given in the form of a convex compact. As a result of this modification, two statements were proved, which made it possible to obtain the following results: (a) for the multipurpose LP problem in a deterministic formulation: a new property was found of the compromise criterion which is a linear weighted convolution of linear criteria; five new criteria for obtaining a compromise solution are provided; for each of the given compromise criteria, the LP problems are formulated, their solution is the optimal compromise solution for the corresponding criterion; (b) the problems of a multipurpose LP under uncertainty are formulated (the uncertainty is formalized both in terms of probability theory by introducing multidimensional discrete random variables, and in terms of fuzzy sets theory by introducing the corresponding membership functions of fuzzy discrete sets); compromise criteria and algorithms for obtaining compromise solutions by solving the corresponding LP problems for both types of uncertainty are presented; (c) mixed models of multipurpose LP are also given for the case when some of the linear criteria are deterministic, and the rest are specified uncertainly. The proposed criteria use expert weights, which are proposed to be found by the empirical matrix of paired comparisons using optimization models and the corresponding criteria for finding the best solution developed by the author and his students.

Keywords: multipurpose linear programming, uncertainty, compromise criteria, compromise solutions, probability, fuzzy set, empirical matrix of pairwise comparisons.

1. Pavlov A.A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2019. **1**. N 34. С. 81–89. DOI: 10.20535/1560-8956.1.2019.178233.
2. Pavlov A.A. Combinatorial optimization under uncertainty and formal models of expert estimation. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології*. 2019. № 1. С. 3–7. DOI: 10.20998/2079-0023.2019.01.01.
3. Pavlov A.A. Long-term operational planning of a small-series production under uncertainty (theory and practice). The Third International Conference on Computer Science, Engineering and Education Applications (ICCSEEA 2020). 2021. P. 167–180. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_15.
4. Павлов А.А., Жданова Е.Г. Транспортная задача в условиях неопределенности. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2020. № 2. С. 34–45. [Pavlov A.A., Zhdanova E.G. The Transportation Problem under Uncertainty. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 4. P. 1–13. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v52.i4.10.]
5. Pavlov A.A., Zhdanova E.G. Finding a compromise solution to the transportation problem under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2020. **1**. № 36. С. 60–72. DOI: 10.20535/1560-8956.36.2020.209764.
6. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М. : Вильямс, 2005. 912 с.

Получено 21.09.2020