УДК 517.977

И.С. Раппопорт

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ С РАЗЛИЧНОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Ключевые слова: управляемые объекты с различной инерционностью, квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

Введение

Работа посвящена изучению проблемы сближения управляемых объектов с различной инерционностью в игровых задачах динамики на основе метода разрешающих функций [1] и его современной версии [2]. Для управляемых объектов с различной инерционностью характерно, что на некотором интервале времени не выполняется условие Л. С. Понтрягина. Это существенно затрудняет применение метода разрешающих функций к этому классу игровых задач динамики. Примером может служить задача «мальчик и крокодил» [1]. А.А. Чикрий предложил один из способов привлечения терминального множества для расширения класса задач динамики, для которых применим метод разрешающих функций [1].

В настоящей публикации рассматривается случай, когда в основу общей схемы метода разрешающих функций положен аналог модифицированного условия Л.С. Понтрягина с учетом терминального множества [1]. Рассматриваются специальные многозначные отображения, порождающие верхние и нижние разрешающие функции двух типов, впервые введенные в [3]. С помощью этих функций получены некоторые достаточные условия разрешимости задачи сближения управляемых объектов с различной инерционностью за гарантированное время. Результаты иллюстрируются на модельном примере «мальчик и крокодил».

Работа продолжает исследования [1–4], примыкает к публикациям [5–28] и расширяет класс игровых задач сближения управляемых объектов, которые имеют решение.

Общая схема метода, разрешающие функции первого типа

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau\ , \ t \geq 0\ . \tag{1}$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [9] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени.

Кроме процесса (1), задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый (назовем его преследователем) пытается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а другой (назовем его убегающим) — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать встречи.

Примем сторону первого игрока и будем считать, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t будем выбирать на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то говорят, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [7], а контруправление [5] $u(t) = u(z_0, v(t))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [8].

Сформулируем необходимые факты из выпуклого [1, 10] анализа в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $X \in R^n$ — выпуклый компакт, $\omega(\tau)$ — неотрицательная ограниченная измеримая числовая функция. Тогда $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. Если $x(\tau) \in X$, $x(\tau)$ — измеримая функция, $\tau \in [0, T]$, $\int_0^T \omega(\tau) d\tau = 1$, то $\int_0^T \omega(\tau) x(\tau) d\tau \in X$. Если $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ и $\int_0^T \omega(\tau) d\tau \le 1$, то $\int_0^T f(\tau) d\tau \in X$, $f(\tau)$ — измеримая функция, $\tau \in [0, T]$.

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) \colon u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v),\ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$. Предположим, что многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ будет $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримой по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [9] при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ является $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Если выполнено условие Понтрягина, то на множестве Δ существует по крайней мере один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ отображения $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такой селектор называют селектор Понтрягина. Сформулируем условие Понтрягина в эквивалентной форме.

На множестве Δ существует селектор Понтрягина $\gamma_0(t, \tau)$, для которого справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, некоторая, почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$ для каждого $t > 0$ функция, которую назовем функцией сдвига. Пусть M_1 — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n такой, что если $m \in M_1$, то $-m \in M_1$, и $M_2 = M \,\underline{*}\, M_1 = \{m \in L : m + M_1 \subset M\} = \bigcap_{m \in M_1} (M - m) \ne \varnothing$, где $\underline{*}$ — геометрическая разность Минковского [1]. Будем называть допустимыми функцию $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливы указанные условия и свойства.

Рассмотрим при $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $v \in V$, для допустимых функции $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1 многозначное отображение $\Lambda(t, \tau, v) = \{\lambda \ge 0 : 0 \in W(t, \tau, v) + \lambda M_1 - \gamma(t, \tau)\}$.

Если на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие $\Lambda(t, \tau, v) \ne \varnothing$, то рассмотрим скалярную функцию $\lambda(t, \tau, v) = \inf\{\lambda : \lambda \in \Lambda(t, \tau, v)\}$, $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Можно показать [12], что многозначное отображение $\Lambda(t, \tau, v)$ замкнутозначно, $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримо по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а функция $\lambda(t, \tau, v)$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измерима по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, и поэтому суперпозиционно измерима [12], т.е. $\lambda(t, \tau, v(\tau))$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, со значениями из V. Отметим также, что функция $\lambda(t, \tau, v)$ полунепрерывна снизу по переменной v и функция $\sup_{v \in V} \lambda(t, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$.

Условие 1. На множестве Δ существуют допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множество M_1, для которых справедливы условие $\Lambda(t, \tau, v) \ne \varnothing$, $v \in V$, и включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) + \sup_{v \in V} \lambda(t, \tau, v) M_1 - \gamma(t, \tau)].$$

Условие 1 является аналогом модифицированного условия Понтрягина [1].

Обозначим $\xi(t)=\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t \gamma(t,\tau)d\tau$ и рассмотрим множество $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\xi(t)\in M_2, \int_0^t \sup_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)d\tau=1\}$. Если соотношения в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}\in\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $v\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$, компактнозначное многозначное отображение

$$(U(\tau,v),M(\tau,v))=\{u\in U, m\in M_1:\pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi(u,v)+\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)m-\gamma(\mathrm{P},\tau)=0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) копактнозначное отображение $(U(\tau,v),M(\tau,v))$ $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$ -измеримо [12] при $v\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $(U(\tau,v),M(\tau,v))$ содержит $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$ -измеримый селектор $(u(\tau,v),m(\tau,v))$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $(u(\tau),m(\tau))=(u(\tau,v(\tau)),m(\tau,v(\tau)))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Принимая во внимание формулу (1), получим

$$\pi z(\mathrm{P})=-\int_0^{\mathrm{P}}\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)m(\tau)d\tau+$$

$$+\xi(\mathrm{P})+\int_0^{\mathrm{P}}(\pi\Omega(\mathrm{P},\tau)\varphi(u(\tau),v(\tau))+\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)m(\tau)-\gamma(\mathrm{P},\tau))d\tau .$$

В силу леммы 1 имеем $\int_0^{\mathrm{P}}\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)m(\tau)d\tau\in M_1$ и поэтому $-\int_0^{\mathrm{P}}\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)m(\tau)d\tau\in M_1$. Тогда с учетом закона выбора управления первым игроком получим $\pi z(\mathrm{P})\in M_1+\xi(\mathrm{P})\in M_1+M_2\subset M$ и, следовательно, $z(\mathrm{P})\in M^*$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема 1 является аналогом первого прямого метода Понтрягина [1] для управляемых объектов с различной инерционностью, когда на некотором интервале времени не выполняется условие Л.С. Понтрягина. Если условие Понтрягина выполнено на множестве Δ, то на множестве Δ $\sup_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)=0$ и условие 1 переходит в условие Л.С. Понтрягина.

Рассмотрим при $\tau\in[0,t]$, $t>0$, $v\in V$ многозначное отображение

$$\mathsf{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0:[W(t,\tau,v)+\sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P},\tau,v)M_1-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M_2-\xi(t)]\ne\varnothing\}. \quad (5)$$

Условие 2. На множестве Δ существуют допустимые функция $\gamma(t,\tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливо условие $\Lambda(t,\tau,v)\ne\varnothing$, $v\in V$, и включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t,\tau,v) + \sup_{v \in V} \lambda(t,\tau,v) M_1 - \gamma(t,\tau)] - \mathsf{A}(t,\tau,v)[M_2 - \xi(t)]\} .$$

Если выполнено условие 2, то рассмотрим верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции [3]:

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t,\tau,v)\},\ \alpha_*(t,\tau,v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathsf{A}(t,\tau,v)\},$$

$$\tau \in [0,t],\ v \in V .$$

Можно показать [12], что многозначное отображение $\mathsf{A}(t,\tau,v)$ замкнутозначное, $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримое по совокупности (τ, v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, поэтому они суперпозиционно измеримы [12], т.е. $\alpha^*(t,\tau,v(\tau))$ и $\alpha_*(t,\tau,v(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0,+\infty]$, со значениями из V. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной v и функции $\inf_{v \in V} \alpha^*(t,\tau,v)$ и $\sup_{v \in V} \alpha_*(t,\tau,v)$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge 0 : \xi(t) \in M_2,\ \int_0^t \sup_{v \in V} \lambda(t,\tau,v) d\tau = 1, \int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t,\tau,v) d\tau \le 1\} . \quad (6)$$

Если соотношения в фигурных скобках равенства (6) не выполняются ни для каких $t \ge 0$, положим $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^1 \in \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^1 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$, компактнозначное многозначное отображение

$$(U_*^1(\tau,v), M_*^1(\tau,v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(\mathrm{P}_*^1,\tau)\varphi(u,v) + \sup_{v \in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1,\tau,v)m - \gamma(\mathrm{P}_*^1,\tau) \in$$

$$\in \alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1)]\} .$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v)$ копактнозначное отображение $(U_*^1(\tau,v), M_*^1(\tau,v))$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримо [12] при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $(U_*^1(\tau,v), M_*^1(\tau,v))$ содержит $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримый селектор $(u_*^1(\tau,v), m_*^1(\tau,v))$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $(u_*^1(\tau), m_*^1(\tau)) = (u_*^1(\tau, v(\tau)),\ m_*^1(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Принимая во внимание формулу (1), получим

$$\pi z(\mathrm{P}_*^1) = -\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau +$$

$$+\xi(\mathrm{P}_*^1) + \int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)) d\tau . \qquad (7)$$

В силу леммы 1 имеем

$$\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau \in M_1, \text{ поэтому } -\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau \in M_1 .$$

В силу выбора управления и по определению момента P_*^1 получим

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1)] ,$$

$0 \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1)$, $\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{v\in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) d\tau \le 1$. Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V} \lambda(\mathrm{P}_*^1, \tau, v) m_*^1(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)) d\tau \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1) .$$

Таким образом, соотношение (7) дает $\pi z(\mathrm{P}_*^1) \in M_1 + \xi(\mathrm{P}_*^1) + M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^1) =$ $= M_1 + M_2 \subset M$, следовательно, $z(\mathrm{P}_*^1) \in M^*$, что и завершает доказательство теоремы.

Лемма 2. Для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1 тогда и только тогда, когда существуют допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливо условие 2 и $0 \in A(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$.

Доказательство. Пусть существуют допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливо условие 2 и $0 \in A(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$. Тогда нулевое значение α обеспечивает непустоту пересечения в выражении (5), поэтому $0 \in W(t, \tau, v) + \sup_{v\in V} \lambda(t, \tau, v) M_1 - \gamma(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$. Отсюда вытекает, что для $(t, \tau) \in \Delta$ имеем $0 \in \bigcap_{v\in V} [W(t, \tau, v) + \sup_{v\in V} \lambda(t, \tau, v) M_1 - \gamma(t, \tau)]$, т.е. справедливо условие 1. Рассуждая в обратном порядке, придем к нужному выводу.

Замечание 2. Если существуют допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых выполнено условие 1, то в силу леммы 1 $\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in A(t, \tau, v)\} = 0$ на множестве $\Delta \times V$.

Условие 3. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v\in V} \{[W(t, \tau, v) + \sup_{v\in V} \lambda(t, \tau, v) M_1 - \gamma(t, \tau)] - \sup_{v\in V} \alpha_*(t, \tau, v)[M_2 - \xi(t)]\} .$$

Замечание 3. Если существуют допустимые функция $\gamma(t, \tau)$ и множества M_1, M_2, для которых выполнено условие 1, то по аналогии с леммой 1 выполнено условие 3 и $\sup_{v\in V} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$.

ISSN 0572-2691

Рассмотрим множество

$$T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\int\limits_0^t\sup_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)d\tau=1,$$

$$\int\limits_0^t\inf_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)d\tau\ge 1,\int\limits_0^t\sup_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)d\tau<1\}. \qquad (8)$$

Если при некотором $t>0$ $\alpha^*(t,\tau,v)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках равенства (8) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливы другие соотношения в фигурных скобках равенства (8) . В случае, когда соотношения равенства (8) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 3, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T,g(T),\gamma(\cdot,\cdot))\notin M_2$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int\limits_0^t\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int\limits_t^T\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau,\ t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\int\limits_0^T\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\int\limits_0^T\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau\le 1-\int\limits_0^T\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau\le 0.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s):s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ будем называть «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$(U_1^*(\tau,v),M_1^*(\tau,v))=\{u\in U,m\in M_1:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)+$$

$$+\sup_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)m-\gamma(T,\tau))\in\alpha^*(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]\},\ \tau\in[0,t_*), \qquad (9)$$

$$(U_*^1(\tau,v),M_*^1(\tau,v))=\{u\in U,m\in M_1:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)+$$

$$+\sup_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)m-\gamma(T,\tau))\in\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]\},\ \tau\in[t_*,T]. \qquad (10)$$

Многозначные отображения $(U_1^*(\tau,v),M_1^*(\tau,v))$ и $(U_*^1(\tau,v),M_*^1(\tau,v))$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sup_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)$, $\alpha^*(T,\tau,v)$ и $\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)$ копактнозначные отображения $(U_1^*(\tau,v)$,

$M_1^*(\tau, v))$, $\tau \in [0, t_*)$, и $(U_1^*(\tau, v), M_1^*(\tau, v))$, $\tau \in [t_*, T]$, при $v \in V$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримы [4]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримому селектору $(u_1^*(\tau, v), m_1^*(\tau, v))$ и $(u_*^1(\tau, v), m_*^1(\tau, v))$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $(u_1^*(\tau), m_1^*(\tau)) = (u_1^*(\tau, v(\tau)), m_1^*(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $(u_*^1(\tau), m_*^1(\tau)) = (u_*^1(\tau, v(\tau)), m_*^1(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T) = -\left[\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_1^*(\tau) d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau\right] +$$

$$+\xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_1^*(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_1^*(\tau) - \gamma(T, \tau)) d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_*^1(\tau) - \gamma(T, \tau)) d\tau. \qquad (11)$$

В силу леммы 1 имеем $\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_1^*(\tau) d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau \in M_1$, поэтому $-[\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_1^*(\tau) d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m_*^1(\tau) d\tau] \in M_1$. Тогда с учетом леммы 1 соотношения (9)–(11) дают

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau))[M_2 - \xi(T)] d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M_2 - \xi(T)] d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau)) d\tau [M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau [M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T)[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau)) d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau] +$$

$$+[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$ и включение $M_1 + M_2 \subset M$.

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \in M_2$ достаточно применить теорему 2.

Условие 4. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t, \tau, v) + \sup_{v \in V} \lambda(t, \tau, v) M_1 - \gamma(t, \tau)] - \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 3, 4, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot, \cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot) \notin M_2$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v) d\tau - \int_t^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau, \ t \in [0, T].$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau > 0, \ h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v) d\tau \le 0.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ будем называть «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$(\tilde{U}_1^*(\tau, v), \tilde{M}_1^*(\tau, v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \tag{12}$$

$$(\tilde{U}_*^1(\tau, v), \tilde{M}_*^1(\tau, v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) m - \gamma(T, \tau) \in$$

$$\in \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M_2 - \xi(T)]\}, \ \tau \in [t_*, T]. \tag{13}$$

Многозначные отображения $(\tilde{U}_1^*(\tau, v), \tilde{M}_1^*(\tau, v))$ и $(\tilde{U}_*^1(\tau, v), \tilde{M}_*^1(\tau, v))$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1) функций $\inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)$ и $\sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)$ копактнозначные отображения $(\tilde{U}_1^*(\tau, v), \ \tilde{M}_1^*(\tau, v))$, $\tau \in [0, t_*)$, и $(\tilde{U}_*^1(\tau, v), \tilde{M}_*^1(\tau, v))$, $\tau \in [t_*, T]$, при $v \in V$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримому селектору $(\tilde{u}_1^*(\tau, v), \tilde{m}_1^*(\tau, v))$ и $(\tilde{u}_*^1(\tau, v), \tilde{m}_*^1(\tau, v))$, которые являеются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $(\tilde{u}_1^*(\tau), \tilde{m}_1^*(\tau)) = (\tilde{u}_1^*(\tau, v(\tau)), \tilde{m}_1^*(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $(\tilde{u}_*^1(\tau), \tilde{m}_*^1(\tau)) = (\tilde{u}_*^1(\tau, v(\tau)), \tilde{m}_*^1(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получим

$$\pi z(T) = -[\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) \tilde{m}_1^*(\tau) d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) \tilde{m}_*^1(\tau) d\tau] +$$

$$+\xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\tilde{u}_1^*(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) \tilde{m}_1^*(\tau) - \gamma(T, \tau)) d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\tilde{u}_*^1(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(T, \tau, v) \tilde{m}_*^1(\tau) - \gamma(T, \tau)) d\tau. \tag{14}$$

В силу леммы 1 имеем $\int\limits_0^{t_*}\sup\limits_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)\tilde m_1^*(\tau)d\tau+\int\limits_{t_*}^{T}\sup\limits_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)\tilde m_*^1(\tau)d\tau\in M_1$, поэтому $-[\int\limits_0^{t_*}\sup\limits_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)\tilde m_1^*(\tau)d\tau+\int\limits_{t_*}^{T}\sup\limits_{v\in V}\lambda(T,\tau,v)\tilde m_*^1(\tau)d\tau]\in M_1$. Тогда с учетом леммы 1 соотношения (12)–(14) дают

$$\pi z(T)\in M_1+\xi(T)+\int\limits_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]d\tau+\int\limits_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]d\tau=$$

$$=M_1+\xi(T)+\int\limits_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau[M_2-\xi(T)]+\int\limits_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau[M_2-\xi(T)]=$$

$$=M_1+\xi(T)[1-\int\limits_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau-\int\limits_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau]+$$

$$+[\int\limits_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau+\int\limits_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau]M_2=M_1+M_2\subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$ и включение $M_1+M_2\subset M$.

Для случая $\xi\big(T,g(T),\gamma(T,\cdot)\big)\in M_2$ достаточно применить теорему 2.

Модификация метода, разрешающие функции второго типа

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathsf{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}\mathsf{A}(t,\tau,v),\ (t,\tau)\in\Delta. \tag{15}$$

Условие 5. На множестве Δ существуют допустимые функция $\gamma(t,\tau)$ и множества M_1, M_2, для которых справедливы условие $\Lambda(t,\tau,v)\neq\varnothing$, $v\in V$, и включение

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(t,\tau,v)+\sup_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)M_1-\gamma(t,\tau)]-\mathsf{A}(t,\tau)[M_2-\xi(t)]\}.$$

Если выполнено условие 5, то многозначное отображение $\mathsf{A}(t,\tau)$ не пусто на множестве Δ и порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathsf{A}(t,\tau)\},\ \alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathsf{A}(t,\tau)\},\ \tau\in[0,t].$$

Можно показать [12], что многозначное отображение $\mathsf{A}(t,\tau)$ замкнутозначно, L-измеримо по τ, $\tau\in[0,t]$, а верхняя $\alpha^*(t,\tau)$ и нижняя $\alpha_*(t,\tau)$ разрешающие функции L-измеримы по переменной τ, при фиксированном t.

Замечание 4. Если для некоторых допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 3, то $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)\in\mathsf{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)=\alpha_*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Если для некоторых допустимых функции $\gamma(t,\tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 4, то $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)\in\mathsf{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge 0 : \xi(t) \in M_2,\ \int_0^t \sup_{v\in V} \lambda(t,\tau,v)d\tau = 1, \int_0^t \alpha_*(t,\tau)\,d\tau \le 1\}. \qquad (16)$$

Если соотношения в фигурных скобках равенства (16) не выполняются ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^2 \in \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^2 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$, компактнозначное многозначное отображение

$$(U_*^2(\tau,v), M_*^2(\tau,v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u,v) + \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau) \in$$

$$\in \alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)$ компактнозначное отображение $(U_*^2(\tau,v), M_*^2(\tau,v))$ $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$ -измеримо [12] при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $(U_*^2(\tau,v), M_*^2(\tau,v))$ содержит $\mathsf{L}\otimes\mathsf{B}$ -измеримый селектор $(u_*^2(\tau,v), m_*^2(\tau,v))$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $(u_*^2(\tau), m_*^2(\tau)) = (u_*^2(\tau, v(\tau)), m_*^2(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Принимая во внимание формулу (1), получим

$$\pi z(\mathrm{P}_*^2) = -\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau)d\tau + \xi(\mathrm{P}_*^2) +$$

$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^2} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau))d\tau. \qquad (17)$$

В силу леммы 1 имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau)d\tau \in M_1, \text{ поэтому } -\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau)d\tau \in M_1.$$

В силу выбора управления и по определению момента P_*^2 получим

$$\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau) \in \alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)[M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2)],$$

$0 \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2)$, $\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)d\tau \le 1$. Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) + \sup_{v\in V}\lambda(\mathrm{P}_*^2,\tau,v)m_*^2(\tau) - \gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau))d\tau \in M_2 - \xi(\mathrm{P}_*^2).$$

Таким образом, равенство (17) дает $\pi z(P_*^2) \in M_1 + \xi(P_*^2) + M_2 - \xi(P_*^2) = = M_1 + M_2 \subset M$, следовательно, $z(P_*^2) \in M^*$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 5. Если для некоторых допустимых функции $\gamma(t, \tau)$ и множеств M_1, M_2 на множестве Δ выполнено условие 1, то $0 \in A(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$.Тогда выполнены условия 3, 5 и справедливо равенство

$$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*(t, \tau) = 0 \,, \ \tau \in [0, t] \,.$$

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \geq 0 : \int_0^t \sup_{v \in V} \lambda(t, \tau, v) d\tau = 1, \ \int_0^t \alpha^*(t, \tau) d\tau \geq 1, \ \int_0^t \alpha_*(t, \tau) d\tau < 1\}. \quad (18)$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках равенства (18) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot))$, если для этого t справедливы другие соотношения в фигурных скобках равенства (18) . В случае, когда соотношения равенства (18) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot, \cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V , $\tau \in [0, \Theta]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot, \cdot) \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\Theta, \tau) d\tau - \int_t^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau) d\tau \,, \ t \in [0, \Theta] \,.$$

По определению Θ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau > 0 \,, \ h(\Theta) = 1 - \int_0^\Theta \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau \leq 0 \,.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, \Theta]$ будем называть «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения:

$$(\tilde{U}_2^*(\tau, v), \tilde{M}_2^*(\tau, v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(\Theta, \tau)\, \varphi(u, v) + \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v) m - \gamma(\Theta, \tau) \in$$

$$\in \alpha^*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\} \,, \ \tau \in [0, t_*) \,, \quad (19)$$

$$(\tilde{U}_*^2(\tau, v), \tilde{M}_*^2(\tau, v)) = \{u \in U, m \in M_1 : \pi\Omega(\Theta, \tau)\, \varphi(u, v) + \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v) m - \gamma(\Theta, \tau) \in$$

$$\in \alpha_*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]\} \,, \ \tau \in [t_*, \Theta] \,. \quad (20)$$

Многозначные отображения $(\tilde{U}_2^*(\tau, v), \tilde{M}_2^*(\tau, v))$ и $(\tilde{U}_*^2(\tau, v), \tilde{M}_*^2(\tau, v))$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\alpha^*(\Theta, \tau)$ и $\alpha_*(\Theta, \tau)$ копактнозначные отображения $(\tilde{U}_2^*(\tau, v), \tilde{M}_2^*(\tau, v))$, $\tau \in [0, t_*)$, и $(\tilde{U}_*^2(\tau, v), \tilde{M}_*^2(\tau, v))$, $\tau \in [t_*, \Theta]$ при $v \in V$ $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathsf{L} \otimes \mathsf{B}$ -измеримому селектору $(\tilde{u}_2^*(\tau, v), \tilde{m}_2^*(\tau, v))$ и $(\tilde{u}_*^2(\tau, v), \tilde{m}_*^2(\tau, v))$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $(\tilde{u}_2^*(\tau), \tilde{m}_2^*(\tau)) = (\tilde{u}_2^*(\tau, v(\tau)), \tilde{m}_2^*(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» — равным $(\tilde{u}_*^2(\tau), \tilde{m}_*^2(\tau)) = (\tilde{u}_*^2(\tau, v(\tau)), \tilde{m}_*^2(\tau, v(\tau)))$, $\tau \in [t_*, \Theta]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получим

$$\pi z(\Theta) = -\left[\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_2^*(\tau)d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_*^2(\tau)d\tau\right] +$$

$$+ \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\tilde{u}_2^*(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_2^*(\tau) - \gamma(\Theta, \tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{\Theta} (\pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(\tilde{u}_*^2(\tau), v(\tau)) + \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_*^2(\tau) - \gamma(\Theta, \tau))d\tau. \quad (21)$$

В силу леммы 1 имеем $\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta,\tau,v)\tilde{m}_1^*(\tau)d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta,\tau,v)\tilde{m}_*^1(\tau)d\tau \in M_1$,

поэтому $-\left[\int_0^{t_*} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_1^*(\tau)d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \sup_{v \in V} \lambda(\Theta, \tau, v)\tilde{m}_*^1(\tau)d\tau\right] \in M_1$. Тогда с учетом леммы 1 соотношения (19)–(21) дают

$$\pi z(\Theta) \in M_1 + \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta, \tau)[M_2 - \xi(\Theta)]d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(\Theta) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta, \tau)d\tau[M_2 - \xi(\Theta)] + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta, \tau)d\tau[M_2 - \xi(\Theta)] =$$

$$= M_1 + \xi(\Theta)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta, \tau)d\tau - \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta, \tau)d\tau\right] + \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(\Theta, \tau)d\tau +\right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*(\Theta, \tau)d\tau\right]M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$ и включение $M_1 + M_2 \subset M$.

Для случая $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot, \cdot)) \in M_2$ достаточно применить теорему 5.

Сравнение гарантированных времен

Лемма 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot, \cdot)$ и множеств M_1, M_2 выполнено условие 5, причем $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \notin M_2$. Тогда имеют место неравенства

$$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \leq \alpha_*(t, \tau), \; (t, \tau) \in \Delta, \quad (22)$$

$$\inf_{v\in V} \alpha^*(t,\tau,v) \geq \alpha^*(t,\tau)\,,\ (t,\tau)\in\Delta\,. \tag{23}$$

Если к тому же выполнено условие 3, то неравенство (22) превращается в равенство. Если же справедливо условие 4, то в равенство превращается неравенство (23). При этом если многозначное отображение $A(t,\tau,v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, то справедливы условия 3 и 4 и в соотношениях (22), (23) имеет место равенство.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 выполнено условие 5. Тогда имеют место включения

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}^2_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}^1_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\supset \mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\,.$$

При этом, если к тому же выполнены условия 3 и 4, или если многозначное отображение $A(t,\tau,v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, справедливы равенства

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\,,\ \mathrm{P}^2_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\mathrm{P}^1_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)).$$

Доказательство леммы 3 и теоремы 7 непосредственно следует из конструкций соответствующих определений, замечаний и теорем.

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, для некоторых допустимых функции $\gamma(\cdot,\cdot)$ и множеств M_1, M_2 множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и многозначное отображение $A(T,\tau,v)$ принимает выпуклые значения для всех (τ,v), $\tau\in[0,T]$, $v\in V$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство автоматически вытекает из леммы 3 и теорем 6 и 7.

Замечание 6. Если существует такой измеримый по τ, $\tau\in[0,t]$, селектор $\omega(t,\tau)\in\Lambda(t,\tau,v)$, что $\int_0^t \omega(t,\tau)d\tau=1$, то в формулировке условий и теорем можно заменить $\sup_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)$ на $\omega(t,\tau)$, причем доказательство соответствующих результатов не изменится.

Пример

«Мальчик и крокодил». Динамика преследователя и убегающего задается уравнениями соответственно

$$\ddot{x}=u,\ \ x\in R^s,\ s\geq 2,\ \|u\|\leq\rho,\ \rho>0,$$

$$\dot{y}=v,\ \ y\in R^s,\ s\geq 2,\ \|v\|\leq\sigma,\ \sigma>0\,. \tag{24}$$

Преследование считается завершенным, если $\|x-y\|\leq l$.

Исходная задача (24) может быть сведена к конфликтно-управляемому процессу следующим образом. Введем новые переменные $(z_1,z_2)=z$:

$$z_1=x-y\,,\ \dot{z}_2=\dot{x}\,. \tag{25}$$

Продифференцируем по времени соотношения (25). С учетом исходных уравнений (24) получим

$$\dot{z}_1=z_2-v\,,\ \dot{z}_2=u\,. \tag{26}$$

 ISSN 0572-2691

Терминальное множество

$$M^* = \{z : \|z_1\| \le l\},\ M_0 = \{z : z_1 = 0\},\ M = \{z : \|z_1\| \le l,\ z_2 = 0\}.$$

Тогда

$$L = \{z : z_2 = 0\},\ \pi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \pi z = z_1,\ A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Области управлений имеют вид

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : \|u\| \le \rho \right\},\ V = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} : \|v\| \le \sigma \right\}.$$

Фундаментальная матрица однородной системы (26) $e^{At} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда получим $\pi e^{At} U = \rho t S$, $\pi e^{At} V = \sigma S$, $M = lS$, где S — единичный шар подпространства L с центром в нуле.

Условие Понтрягина не выполнено на интервале $[0, \sigma/\rho)$:

$$\pi e^{At} U \,\underline{*}\, \pi e^{At} V = \rho t S \,\underline{*}\, \sigma S = (\rho t - \sigma) S = \varnothing,\ t \in [0, \sigma/\rho).$$

Обозначим $M_1 = l_1 S, M_2 = l_2 S = M \,\underline{*}\, M_1 = lS \,\underline{*}\, l_1 S = (l - l_1) S, l_2 = l - l_1,\ l > l_1$.

Выберем функцию сдвига $\gamma(t) \equiv 0$. Тогда $\xi(t) = \pi e^{At} z = z_1 + t z_2$.

Простые вычисления дают

$$\Lambda(t, v) = \begin{cases} [\lambda \ge 0 : 0 \in [\rho t S - \sigma v + \lambda l_1 S],\ 0 \le t \le \sigma/\rho,\ v \in S, \\ \{0\}, \qquad t > \sigma/\rho. \end{cases},$$

$$\lambda(t, v) = \inf\{\lambda : \lambda \in \Lambda(t, v)\},$$

$$\lambda(t, v) = \begin{cases} \dfrac{\|v\|\sigma - \rho t}{l_1},\ 0 \le t \le (\|v\|\sigma)/\rho,\ v \in S, \\ 0, \qquad t > (\|v\|\sigma)/\rho, \end{cases} \quad \max_{v \in S} \lambda(t, v) = \begin{cases} \dfrac{\sigma - \rho t}{l_1},\ t \in [0, \sigma/\rho], \\ 0, \qquad t > \sigma/\rho. \end{cases}$$

Имеем

$$(\rho t S + \max_{v \in S} \lambda(t, v) l_1 S) \,\underline{*}\, \sigma S = (\rho t + \max_{v \in S} \lambda(t, v) l_1 - \sigma) S = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \sigma/\rho, \\ (\rho t - \sigma) S, & t > \sigma/\rho. \end{cases}$$

Таким образом, условие 1 выполнено.

Если $l_1 = \sigma^2/2\rho$, то при $t \ge \sigma/\rho$ $\int\limits_0^t \max\limits_{v \in S} \lambda(\tau, v) d\tau = 1$ и можно искать время окончания игры на интервале $[\sigma/\rho, +\infty)$.

Пусть $\xi(t) = \pi e^{At} z = z_1 + t z_2 \ne 0$. Так как выполнено условие 1, то справедливы условия 2, 3 и $\alpha_*(t, \tau, v) = \sup\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$. Если $\xi(t) \in l_2 S$, в силу теоремы 1 или теоремы 2 игра может быть закончена в момент t с использованием управления вида (4).

Пусть $\xi(t) \notin l_2 S$.Тогда верхняя разрешающая функция $\alpha^*(t, \tau, v)$ определяется из соотношения $\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha \ge 0 : \|\sigma v - \alpha \xi(t)\| = \alpha l_2 + \rho(t - \tau) + \max\limits_{v \in S} \lambda(t - \tau, v) l_1\}$, $v \in S$. Поэтому функция $\alpha^*(t, \tau, v)$ является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|\xi(t)\|^2-(l_2)^2)\alpha^2-2[\sigma(v,\xi(t))+[\rho(t-\tau)+\max_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)l_1]l_2]\alpha-$$

$$-[[\rho(t-\tau)+\max_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)l_1)]^2-\sigma^2\|v\|^2]=0$$

относительно α, если $\xi(t)\notin l_2S$, $v\in S$.

После вычислений получим $\min\limits_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)=\dfrac{\rho(t-\tau)+\max\limits_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)l_1-\sigma}{\|\xi(t)\|-l_2}$.

Соотношение $\int\limits_0^t \dfrac{\rho(t-\tau)+\max\limits_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)l_1-\sigma}{\|\xi(t)\|-l_2}d\tau=1$ эквивалентно уравнению

$$\|z_1+tz_2\|=(\rho t^2/2)-\sigma t+l. \tag{27}$$

Наименьший положительный корень уравнения (27) является моментом окончания игры в силу теоремы 3 с использованием управления вида (3). Легко проверить, что справедливо условие 4 и наименьший положительный корень уравнения (27) — момент окончания игры в силу теоремы 4 с использованием управления вида (4).

При $t=0$ левая часть уравнения (27) равна $\|z_1\|$ и с ростом t растет линейно, а правая часть равна l и растет квадратично. Так как $\|z_1\|>l$, то для любых z_1 и z_2 момент окончания игры конечен.

Равенство $z_1+tz_2=0$ может быть выполнено только позже равенства (27). Потому этот случай рассматривать не следует.

Если $l_1\geq\sigma^2/2\rho$, то при всех $t\geq 0$ справедливо неравенство

$$(\rho t^2/2)-\sigma t+l_1\geq 0. \tag{28}$$

Пусть $l_1\geq\sigma^2/2\rho$ и $t<\sigma/\rho$. Положим $\omega(t,\tau)=\dfrac{-\rho(t-\tau)+\sigma}{\sigma t-(\rho t^2/2)}$. Тогда в силу неравенства (28) получим

$$\max_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)\leq\omega(t,\tau),\ \omega(t,\tau)\in\Lambda(t-\tau,v)\ \text{и}\ \int\limits_0^t\omega(t,\tau)d\tau=1.$$

С учетом замечания 6 соответствующая верхняя разрешающая функция совпадает с построенной выше функцией $\alpha^*(t,\tau,v)$, если в последней $\max\limits_{v\in S}\lambda(t-\tau,v)$ заменить на $\omega(t,\tau)$. Тогда

$$\min_{v\in S}\alpha^*(t,\tau,v)=\frac{\rho(t-\tau)+\omega(t,\tau)l_1-\sigma}{\|\xi(t)\|-l_2}. \tag{29}$$

Аналогично предыдущему случаю с учетом равенства (29) получим уравнение (27) для определения момента окончания игры в силу теорем 3 и 4.

Заключение

В настоящей работе рассматривается проблема сближения управляемых объектов с различной инерционностью в игровых задачах динамики. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции специального типа и на их основе предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса в классе квазистратегий и контруправлений. Сравниваются гарантированные времена окончания игры для разных схем сближения управляемых объектов с различной инерционностью. Приведен пример.

Й.С. Раппопорт

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів з різною інерційністю в ігрових задачах динаміки на основі сучасної версії методу розв'язувальних функцій. Для керованих об'єктів з різною інерційністю характерно, що на деякому інтервалі часу не виконується умова Л.С. Понтрягіна, що істотно ускладнює застосування методу розв'язувальних функцій до цього класу ігрових задач динаміки. Розглянуто випадок, коли в основу загальної схеми методу розв'язувальних функцій покладено аналог модифікованої умови Л.С. Понтрягіна з урахуванням термінальної множини. Запропоновано метод вирішення таких задач, пов'язаний з побудовою деяких скалярних функцій, що якісно характеризують хід зближення керованих об'єктів з різною інерційністю і ефективністю прийнятих рішень. Такі функції називаються розв'язувальними функціями. Привабливість методу розв'язувальних функцій полягає в тому, що він дозволяє ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень в обґрунтуваннях ігрових конструкцій і отримувати на їх основі змістовні результати. У будь-яких формах методу розв'язувальних функцій головним є накопичувальний принцип, який використовується в поточному підсумовуванні роздільної функції для оцінки якості гри першого гравця аж до досягнення деякого порогового значення. Порівнюються гарантовані часи закінчення гри для розглянутих схем зближення керованих об'єктів з різною інерційністю. Наведено приклад.

Ключові слова: керовані об'єкти з різною інерційністю, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

I.S. Rappoport

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE APPROACH OF CONTROLLED OBJECTS WITH VARIOUS INERTIA IN GAME DYNAMICS PROBLEMS

The paper considers the problem of convergence of controlled objects with different inertia in game dynamics problems based on the modern version of the method of resolving functions. For controlled objects with different inertia it is characteristic that on a certain time interval the condition of L.S. Pontryagin is not satisfied, which significantly complicates the application of the method of resolving functions to this class of game dynamics problems. We consider the case when the general scheme of the method of resolving functions is based on an analogue of the modified L.S. Pontryagin condition taking into account the terminal set. A method for solving such problems is proposed, associated with the construction of some scalar functions that qualitatively characterize the course of convergence of controlled objects and the efficiency of the decisions made. Such functions are called permissive functions. The attractiveness of the method of resolving functions lies in the fact that it makes it possible to use effectively the modern technique of multivalued mappings in substantiating game constructions and obtaining meaningful results on their basis. In any form of the method of resolving functions, the main principle is the accumulative principle, which is used in the current summation of the resolving function to assess the quality of the game of the first player until a certain threshold is reached. A comparison is made of the guaranteed end times of the game for the considered schemes of approaching controlled objects with different inertia. An example is given.

Keywords: controlled objects with different inertia, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Springer Science and Business Media. 2013. 424 p.
2. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. **271**. P. 69–85.
3. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35.
4. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. **23**, № 1. С. 293–305. DOI:https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.
6. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука. 1988. **2**. 576 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г.Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit Games. New York: Academic Press. 1975. **12**. 266 p.
9. Aubin J.–P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser. 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. **48**, № 4. С. 40–64.
13. Chikrii A. A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
14. Pittsyk M. V., Chikrii A. A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. **46**, N 5. P. 584–589.
15. Чикрий А. А., Дзюбенко К. Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. // *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 1. С. 92–107.
16. Eidelman S. D., Chikrii A. A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. . 2000. **52**, N 11. P. 1787–1806.
17. Chikrii A. A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. **17**. P. 349–387.
18. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные кофликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика.* 1993. **57**, № 3. С. 3–14.
19. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical sciences*. 1996. **80**, N 3. P. 1489–1518.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems *Optimization Methods and Software*. 2008. **23**, N 1. P. 39–72.
22. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия. 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
25. Rappoport I. S. On Guaranteed result in game problems of controlled objects approach. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 3. P. 48–64. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v52.i3.40.
26. Belousov A.A., Kuleshyn V.V., Vyshenskiy V. I. Real–time algorithm for calculation of the distance of the interrupted take-off. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 4, P. 38–46. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v52.i4.40.
27. Chikriy A.A., Chikrii G.T., Volyanskiy K.Yu. Quasilinear positional integral games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2001. **33**, N 10, P. 31–43. DOI: 10.1615/ JAutomatInfScien.v33.i10.40.
28. Chikrii G.T. Principle of time stretching in evolutionary games of approach *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 5. P. 12–26. DOI: 10.1615/ JAutomatInfScien.v48.i5.20.

Получено 29.07.2020
После доработки 10.09.2020