УДК 51: 330.4: 658

М.В. Дыха, Н.В. Грипинская, Г.Г. Цегелик, М.Я. Марко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЗАКАЗА ИЗ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ

Ключевые слова: оптимальный портфель заказа, покупка продукции, экономико-математическая модель, алгоритм, результаты моделирования.

Введение

Решение сложных задач относительно рационального ресурсного и институционального обеспечения устойчивого социально-экономического развития, обеспечения эффективного функционирования субъектов хозяйствования и удовлетворения потребностей потребителей, поиск способов, методов и организационно-экономических механизмов решения этих вопросов в самых различных отраслях (промышленность, сельское хозяйство, торговля, обслуживание и т.д.) должно опираться на научно обоснованные результаты исследований.

Одна из базовых задач прикладной математики в области оптимизации или исследовании операций — задача о назначении. Она заключается в нахождении минимальной (или максимальной) весомости/значимости между элементами двух конечных множеств.

Впервые задача о назначении была рассмотрена в геометрической форме Гаспаром Монжем в 1784 г. Однако в начале XX века была установлена некорректность ее решения. Следующие шаги в решении задачи о назначении сделаны Кенигом и Эгервари в первой трети XX века. Они рассматривали эту задачу как задачу поиска совершенного паросочетания минимального веса (значимости) во взвешенном двухдольном графе [1]. Их работы стали основой для венгерского метода, разработанного Куном [2] в 50-х гг. прошлого века. В 1947 г. Данциг предложил симплекс-метод для решения общей задачи линейного программирования, к которой легко сводится задача о назначении. Задача о назначении, поставленная Данцигом и Фалкерсоном, может также рассматриваться как задача о максимальном потоке минимальной стоимости. В 1961 г. Басакер и Гоуэн опубликовали алгоритм ее решения. Этот алгоритм для общей задачи, как и алгоритм симплекс-метода, имеет экспоненциальную сложность, а для задачи о назначении — полиномиальную. Теоретический анализ сложности алгоритмов показывает, что алгоритмы Куна и Басакера–Гоуэна имеют одинаковую теоретическую сложность, меньшую, чем алгоритм Гольдберга–Тарьяна.

Для решения линейной задачи о назначении могут применяться различные методы: от общих методов решения задач линейного программирования к специальным методам решения задач на графах, симплекс алгоритм и алгоритм аукциона.

В частности, в исследовании [3] в результате использования программного продукта, реализованного на языке программирования C Sharp, сформирована иерархически структурированная модель, которая показывает приоритетность влияния факторов (отображены в ориентированном графе) на энергетическую безопасность предприятия, т.е. решена многокритериальная задача с применением теории графов, что дало возможность получить информацию о влиянии (весомости) факторов, их взаимодействии, и в конечном результате обусловило разработку комплекса оптимальных/обоснованных управленческих решений предприятием.

Точные методы решения задачи о назначении существуют, но имеют высокую сложность для программной реализации. Поэтому в публикации [4] авторы рассматривают метод, с помощью которого можно приближенно решить эту задачу.

Изучив большое количество работ за последние десятилетия, следует отметить исследования математических моделей и методов, которые определяют процессы принятия решений [5–10], разработку условий существования [11] и эффективных алгоритмов поиска решений задач дискретной оптимизации со многими критериями и неполной информацией [12], построение алгоритма решения задачи о назначении [13]. Также следует отметить работу [14], в которой предложен метод решения комбинаторной задачи условной оптимизации на множестве размещений. В контексте исследования заслуживает внимания предложенный научно-методический подход суммарно максимально эффективного распределения денежных средств между m проектами при известных показателях эффективности определенного размера финансирования каждого проекта [15], а также работы, в которых решаются задачи оптимизации в разных сферах жизнедеятельности. В частности, задача оптимизации плана производства продукции при использовании метода идеальной точки, симплекс метода и метода множителей Лагранжа [16], оптимальный выбор параметров системы капельного орошения, что является важным в повышении эффективности грунтов [17], вычисление и значения оптимальных диаметров систем микроигл для эффективных инъекций [18].

Важной задачей для потребителя (конкретного индивидуума, субъектов хозяйствования, страны в целом как заказчика продукции, услуг и т.п.) является удовлетворение потребностей в продукции (услугах) максимально высокого качества по минимально возможным ценам, которую в рыночных условиях хозяйствования предлагает определенное количество производителей.

Актуальна и представляет новизну экономико-математическая модель, алгоритм определения оптимума, который, в отличие от существующих точных методов решения таких задач, сложных для программной реализации, целесообразно реализовывать программно.

Поэтому цель статьи — определение оптимального портфеля заказа из множества возможных (оптимальная рыночная покупка продукции/услуг) с использованием инструмента моделирования.

Постановка задачи. Алгоритм решения

Пусть n — количество необходимых видов продукции, условных единиц (кг, тонн, метров, штук); m — количество предприятий, которые изготовляют необходимую продукцию, единиц; α_{ij} — обобщенный показатель качества продукции i-го вида, которая изготовляется j-м предприятием; β_j — индекс выявленных сравнительных преимуществ в изготовлении продукции j-м предприятием; c_{ij} — стоимость изготовления единицы продукции i-го вида j-м предприятием, условных денежных единиц (грн); p_i — потребность в продукции i-го вида, условных единиц (кг, тонн, метров, штук); V — общий бюджет (средства для закупки продукции, финансирования заказа), условных денежных единиц (грн); x_{ij} — количество единиц продукции i-го вида на j-м предприятии, условных единиц (кг, тонн, метров, штук; искомые величины).

Тогда математическая модель задачи будет такой:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_j x_{ij} \to \max \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i, \; i = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \le V, \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = 1, 2, ..., n, \;\; j = 1, 2, ..., m. \tag{4}$$

Если обозначить $\alpha_{ij}\beta_j = a_{ij}$, то критерий оптимальности можно написать в таком виде:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \to \max. \tag{5}$$

Алгоритм решения задачи (5), (2)–(4).

Обозначим

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \; \{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм состоит из ряда шагов/этапов.

На первом этапе для каждого $i = 1, 2, ..., n$ находим $\max\limits_{1 \le j \le m} a_{ij}$.

Пусть $\max\limits_{1 \le j \le m} a_{ij} = a_{ij_i}$, $i = 1, 2, ..., n.$ Тогда $x_{ij_i} = p_i$, $i = 1, 2, ..., n,$ а все остальные x_{ij} равны 0. Затем проверяем условие (3). Если выполняется, то найденный набор на первом этапе является решением задачи. Если условие (3) не выполняется, то переходим на второй шаг.

На втором этапе ищем $\min\limits_{1 \le i \le n}(\min\limits_{(i,j) \ne (i,j_i)} (a_{ij_i} - a_{ij}))$. Пусть этот минимум достигается для $a_{kj_k} - a_{ks}$. Тогда $x_{kj_k} = x_{kj_k} - (a_{kj_k} - a_{ks})$, $x_{ks} = a_{kj_k} - a_{ks}$. После этого проверяем условие (3). Если это условие выполняется, то найденный набор x_{ij} является решением задачи. Если условие (3) не выполняется, то переходим на третий шаг.

На третьем этапе ищем $\min\limits_{1 \le i \le n}(\min\limits_{x_{ij_l} \ne 0} (a_{ij_l} - a_{ij}))$. Пусть этот минимум достигается для $a_{rj_l} - a_{rp}$. Тогда $x_{rj_l} = x_{rj_l} - (a_{rj_l} - a_{rp})$, $x_{rp} = a_{rj_l} - a_{rp}$. Проверяем условие (3). Если оно выполняется, то найденный набор x_{ij} является решением задачи. Если условие (3) не выполняется, то переходим на четвертый шаг. Все последующие шаги аналогичны третьему шагу.

На каждом этапе/шаге алгоритма значение целевой функции уменьшается на минимальную величину, поэтому результат на последнем этапе/шаге является оптимальным (наилучшим из возможных предполагаемых, учитывая исходные данные). При уменьшении значения целевой функции уменьшается и $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$.

 ISSN 0572-2691

Если обозначить начальную искомую величину $X^* = \{x_{ij}^*\}$, то количество шагов алгоритма не превысит величины $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} - V$.

Результаты моделирования

Пример. Пусть $p_1 = 20,\ \ p_2 = 25,\ \ p_3 = 15,\ \ p_4 = 30,\ \ V = 1050$ и

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 5 & 10 & 9 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 15 & 6 \\ 7 & 9 & 12 & 11 & 5 \end{pmatrix},\ \{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 12 & 14 & 5 \\ 9 & 4 & 12 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 10 & 13 & 7 \\ 7 & 9 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

1-й шаг: $\max_j a_{1j} = a_{14},\ \max_j a_{2j} = a_{23}\ \max_j a_{3j} = a_{34}\ \max_j a_{4j} = a_{43}$, поэтому $x_{14} = 20,\ x_{23} = 25,\ x_{34} = 15,\ x_{43} = 30$. Значит,

$$\{x_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 1075,\ \ V \le 1075;$$

2-й шаг: $\min_{1\le i\le 4}(\min_{(i,j)\ne(i,j_i)}(a_{ij_i} - a_{ij})) = a_{23} - a_{24} = 1$, поэтому

$$\{x_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 1073,\ \ V \le 1073;$$

3-й шаг: $\min_{1\le i\le 4}(\min_{(i,j)\ne(i,j_i)}(a_{ij_i} - a_{ij})) = a_{43} - a_{44} = 1$, поэтому

$$\{x_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 1071,\ \ V \le 1071;$$

4-й шаг: $\min_{1\le i\le 4}(\min_{(i,j)\ne(i,j_i)}(a_{ij_i} - a_{ij})) = a_{14} - a_{15} = 2$, поэтому

$$\{x_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 1053,\ \ V \le 1053;$$

5-й шаг: $\min_{1\le i\le 4} M = a_{14} - a_{12} = 3$, поэтому

$$\{x_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 1038,\ \ V > 1038.$$

Итак, условие (3) выполняется. Найденный набор является решением данной задачи. Продукцию первого вида целесообразно купить (заказать изготовление) на втором предприятии — 3 условных единицы, на четвертом — 15 условных единиц, на пятом — 2 условных единицы.

Продукцию второго вида целесообразно купить (заказать изготовление): 24 условных единиц на третьем предприятии, одну на четвертом.

Продукцию третьего вида в количестве 15 условных единиц целесообразно купить (заказать изготовление) на четвертом предприятии.

Оптимальным решением о покупке продукции четвертого вида будет: покупка (заказ изготовления) 29 условных единиц на третьем предприятии, одной — на четвертом.

Итак, например, продукцию первого вида (детали) целесообразно купить 3 тыс. деталей на втором предприятии, 15 тыс. деталей на четвертом предприятии, 2 тыс. деталей на пятом предприятии и т.д.

Заключение

Сформулирована задача оптимального портфеля закупки продукции на конкретных предприятиях из множества возможных. Решение задачи дает ответ на вопрос оптимальной рыночной покупки продукции/услуг.

Разработана экономико-математическая модель задачи оптимального портфеля закупки, а также алгоритм ее решения. Процесс решения задачи состоит из ряда шагов, на каждом из которых проверяется соответствие/несоответствие выполнения условий покупки.

Результатом решения задачи является определение предприятий для покупки необходимых видов продукции, полуфабрикатов, деталей и т.п., которые максимально удовлетворят потребности покупателя (заказчика) по цене и качеству.

На примере продемонстрировано использование предложенного алгоритма. Приведенный пример позволяет говорить о практической значимости применения разработанного алгоритма. Количество шагов при разных исходных данных будет разным (до выполнения условий математической модели, т.е. выдвигаемых условий оптимального решения для предприятия/заказчика/инвестора).

Данный алгоритм целесообразно использовать в частной предпринимательской деятельности, на предприятиях разных сфер деятельности и форм собственности, а также на макроуровне экономики, в частности в процессе поиска оптимальных вариантов выполнения государственных программ.

В дальнейшем планируем разработать программную реализацию алгоритма.

М.В. Диха, Н.В. Грипинська, Г.Г. Цегелик, М.Я. Марко

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЗАМОВЛЕННЯ ІЗ БЕЗЛІЧІ МОЖЛИВИХ

Розглянуто задачу оптимального портфеля закупівлі продукції (послуг) на підприємствах з багатьох можливих. У такій постановці задача досліджується і розв'язується вперше з використанням інструменту моделювання. Побудовано математичну модель задачі та розроблено алгоритм її розв'язання. При побудові математичної моделі враховуються параметри: кількість видів продукції / послуг, що закуповуються; кількість підприємств, які виробляють необхідну продукцію; потреба в продукції певного виду; вартість виготовлення одиниці продукції кожного виду на кожному підприємстві; узагальнений показник якості виготовленої продукції кожного виду на кожному підприємстві; індекс виявлених порівняльних переваг у виготовленні продукції j-м підприємством; загальний бюджет коштів, що виділяється на покупку продукції (фінансування виго-

 ISSN 0572-2691

товлення продукції). Розроблена математична модель дає можливість за скінченну кількість кроків знайти оптимальний результат розподілу необхідного обсягу замовлень (покупок) кожного виду продукції на різних підприємствах (або на одному підприємстві), який забезпечує максимально пропонований рівень якості продукції, а витрати на закупівлю продукції не перевищують запланованого рівня. Для ілюстрації результатів розробленого алгоритму на прикладі наводиться пошук оптимального варіанта закупівлі продукції чотирьох видів (задоволення певної потреби) на кожному з п’яти підприємств, що пропонують дані види продукції. Запропонований алгоритм становить інтерес для практичного застосування, дає можливість визначити оптимальний портфель закупівлі продукції (напівфабрикатів, деталей), вирішувати завдання оптимальних «пакетних» закупівель/замовлень. Його доцільно використовувати в приватній підприємницькій діяльності, на підприємствах різних сфер діяльності і форм власності, а також на макрорівні економіки, зокрема, в процесі пошуку оптимальних варіантів виконання державних програм.

Ключові слова: оптимальний портфель замовлень, закупівля продукції, економіко-математична модель, алгоритм, результати моделювання.

M.V. Dykha, N.V. Hrypynska, H.H. Tsehelyk, M.Ya. Marko

DETERMINATION OF THE OPTIMAL ORDER PORTFOLIO FROM THE MANY OF POSSIBLE

The problem of optimal portfolio of purchase of products (services) at the enterprises from many possible ones is considered. In this setting, the problem is explored and solved for the first time using a simulation tool. A mathematical model of the problem is built and an algorithm for its solution is developed. When building a mathematical model, the following parameters are taken into account: the number of types of products / services purchased; the number of enterprises that produce the required products; the need for products of a certain type; the cost of manufacturing a unit of production of each type at each enterprise; generalized indicator of quality of manufactured products of each type at each enterprise; index of identified comparative advantages in the manufacture of products j-th enterprise; the general budget of funds allocated for the purchase of products (financing the manufacture of products). The developed mathematical model makes it possible to find the optimal result of distribution of the required volume of orders (purchases) of each type of products at different enterprises (or at one enterprise), which provides the maximum offered level of product quality, and product purchase costs do not exceed the planned level. To illustrate the results of the developed algorithm, the example shows the search for the best option for purchasing products of four types (meeting a specific need) at each of the five companies offering these types of products. The proposed algorithm is of interest for practical application, makes it possible to determine the optimal portfolio of purchases of products (semi-finished products, parts), to solve the problem of optimal "package" purchases / orders. It is advisable to use it in private business, in enterprises of various spheres of activity and forms of ownership, as well as at the macro level of the economy, in particular, in the process of finding optimal options for government programs.

Keywords: optimal order portfolio, product purchase, economic-mathematical model, algorithm, modeling results.

1. Kőnig Dénes. Theory of finite and infinite graphs. Birkhäuser, 1990. 426 p.
2. Harold W. Kuhn. The Hungarian Method for the assignment problem. Naval Research Logistics Quarterly. *Kuhn’s original publication*. 1955. **2**. P. 83–97.
3. Voynarenko Mykhaylo, Dykha Mariia V., Mykoliuk Oksana, Yemchuk Ludmyla and Danilkova Anastasiia. Assessment of an enterprise’s energy security based on multi-criteria tasks modeling. *Problems and Perspectives in Management*. 2018. 16(4). P. 102–116. Retrieved from: http://dx.doi.org/10.21511/ppm.16(4).2018.10
4. Marko M.Y., Tsegelik H.H. An approximate method for solving assignment problem. Kyiv : Mathematical Modelingin Economy, 2017. P. 42.
5. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 336 с.

6. Квик М.Я. Математичні методи і моделі підтримки прийняття рішень в управлінні малими підприємствами: автореферат канд. екон. наук, спец.: 08.00.11 – математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. Черкаси: Східноєвропейський університет економіки та менеджменту. 2015. 20 с.
7. Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці. Київ : ЦУЛ. 2003. 200 с.
8. Клебанова Т.С., Кизим М.О., Черняхта О.І. та ін. Математичні методи і моделі ринкової економіки. Харків : ВД «ІНЖЕК». 2009. 456 с.
9. Добуляк Л.П. Економічно-математичне моделювання тенденцій розвитку малого бізнесу в Україні: автореферат канд. екон. наук, спец.: 08.00.11 – математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці. Черкаси: Східноєвропейський університет економіки та менеджменту. 2014. 20 с.
10. Sergienko I.V., Semenova N.V., Semenov V.V. Bilevel Optimization problems of distribution of interbudgetary transfers under given limitations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. **55**, N 6. P. 905–913.
11. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. **36**, N 6. P. 823–828.
12. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. **46**, N 2. P. 27–41.
13. Burkard R., Dell'Amico M., Martello S. Assignment problems. *Revised reprint.* Philadelphia, PA: SIAM – Society of Industrial and Applied Mathematics. 2012.
14. Kolechkina L.N., Nagornaya A.N., Semenov V.V. Method of solving problem of conditional optimization on combinatorial set of arrangements. *Journal ofAutomation and Information Sciences.* 2019. **51**, N 8. P. 31–42.
15. Hrypynska N.V., Dykha M.V., Korkuna N.M., Tsehelyk H.H. Applying dynamic programming method to solving the problem of optimal allocation of funds between projects. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. 52 (1), P. 56–64. http://www.dl.begellhouse.com/-ru/journals/2b6239406278e43e,75d55a6a64148f84,344c557a386fd328.html.
16. Dykha M., Hrypynska N., Tsehelyk H., Marko M. Optimization of the production plan by three-criterion modeling. *Technology audit and production reserves*. 2019. **5**, N 4 (49), P. 40–45. DOI: 10.15587/2312-8372.2019.181104.
17. Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Тимошенко А.А., Ляшко Н.И., Бондар Е.С. Оптимальное управление интенсивностью точечных источников воды в ненасыщенной пористой среде. *«Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2019. № 4. С. 26–35.
18. Сандраков Г.В., Ляшко С.И., Бондар Е.С., Ляшко Н.И. Моделирование и оптимизация систем микроигл. *«Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2019. № 3. С. 31–40.

Получено 05.11.2019
После доработки 10.06.2020