УДК 519.1

М.Ф. Семенюта

ФИБОНАЧЧИ- И СУПЕР-ФИБОНАЧЧИ-ГРАЦИОЗНЫЕ РАЗМЕТКИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ГРАФОВ

Ключевые слова: Фибоначчи-грациозная разметка и супер-Фибоначчи-грациозная разметка, цикл, эйлеров граф, одноточечное соединение графов.

Введение

Под оптимальной нумерацией (или разметкой) конечного неориентированного графа понимают присвоение номеров его вершинам таким образом, чтобы сумма модулей разностей между номерами смежных вершин была минимальной. Задача построения такой нумерации относится к задачам комбинаторной оптимизации и для произвольного графа является NP-трудной. Существуют различные варианты оптимальной нумерации, среди которых предложенная А. Роса грациозная разметка. Инъективную функцию $f: V \to \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ называют грациозной разметкой графа $G = (V, E)$ размера $q,$ если она индуцирует такую реберную разметку $f^*: E \to \{1, 2, 3, \ldots, q\},$ что f^* — биекция и $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$ для любых смежных вершин $u, v \in V.$ Граф G — грациозный, если допускает грациозную разметку. Больше информации по этому вопросу можно найти в [1]. Естественным продолжением идеи грациозности графа $G = (V, E)$ является случай, когда реберная разметка представляет собой биекцию из множества ребер на первые $|E|$ чисел произвольной последовательности $\{a_i\}.$ Интерес вызывают структурные свойства графов, для которых эта последовательность состоит из чисел ряда Фибоначчи.

Такие научные направления, как «Теория чисел Фибоначчи» и «Теория разметок графов», начали активно развиваться во второй половине XX века. Появляется ряд публикаций, посвященных применению последовательности Фибоначчи, в том числе, в теории графов, криптографии, теории кодирования. Например, в [2] предложен оригинальный метод кодирования обобщением формулы Кассини (Cassini) для чисел Фибоначчи. С. Праджапат и др. нашли новый подход для безопасной передачи информации по каналу связи с концепцией изменчивости ключа в симметричных алгоритмах с использованием Q-матрицы Фибоначчи [3]. Недавно получен новый алгоритм кодирования/декодирования информации на основе матриц Фибоначчи [4]. Одним из объектов изучения теории разметок являются кубы Фибоначчи, которые введены в 1993 году как модели для межсоединений в мультикомпьютерных системах [5, 6] и представляют подкласс частичных кубов. Б. Бресаром и С. Клавзаром предложено понятие Θ-грациозной разметки на изометрических подграфах гиперкубов и показано, что кубы Фибоначчи обладают такой разметкой [7]. Ранее в этом контексте Я. Хорибе изучал разметки деревьев числами Фибоначчи [8], аналогичные исследования есть у К. Коха, Д. Ли и Т. Тана. Они, в свою очередь, под деревом Фибоначчи понимали дерево размера *n*, в котором вершины должны быть размечены различными первыми *n* + 1 числами ряда Фибоначчи так, чтобы индуцированные метки ребер образовывали ряд Фибоначчи $F_1 = F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ \ldots,\ F_n$ [9]. Д. Банже и А. Баркаускас модифицировали это определение, взяв в качестве меток вершин обычного графа размера n разные числа из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_n\}$, и соответствующую разметку назвали Фибоначчи-грациозной [10].

В данной работе введено понятие супер-Фибоначчи-грациозного графа, отличающееся от предложенного в [11] набором чисел в последовательности Фибоначчи. Рассмотрено решение задач существования и перечисления Фибоначчи- и/или супер-Фибоначчи-грациозных разметок для циклов, дизъюнктивного объединения циклов как одинакового, так и различных порядков, эйлеровых графов, одноточечного соединения графов.

1. Постановка задачи и необходимые теоретические сведения

Под обычным графом $G = (V, E)$ (в дальнейшем графом) со множеством вершин V и множеством ребер E понимаем конечный неориентированный граф, не содержащий кратных ребер и петель. Некоторые специальные графы имеют названия и обозначения. В настоящей работе это — цикл C_n и цепь P_n. Цикл C_n $(n \geq 3)$ представляет собой граф порядка $n,$ для которого множество ребер имеет вид $E = \{(u_1, u_n) \cup (u_i, u_{i+1}) : i = 1, 2, \ldots, n-1\},$ где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — вершины C_n. Цепь P_n порядка *n* — это граф со множеством вершин $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и множеством ребер $E = \{(u_i, u_{i+1}) : i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$ Под расстоянием между двумя вершинами связного графа подразумеваем длину кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, а под длиной цепи — число ребер в ней.

Под дизъюнктивным объединением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ понимаем такой граф $G = G_1 \cup G_2,$ что $V = V_1 \cup V_2,$ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $E = E_1 \cup E_2.$ Эта операция выполняется над конечным числом графов, и ее можно обобщить на k графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Тогда результирующий граф обозначим $\bigcup_{i=1}^{k} G_i.$ Если G — связный граф, то под nG понимаем граф с n компонентами, каждая из которых изоморфна $G,$ т.е. nG — это дизъюнктивное объединение n копий графа $G.$

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k,$ где $k \geq 2$, — связные графы. В каждом из них произвольным образом выбираем вершину $u_i \in V(G_i),$ $i = 1, 2, \ldots, k.$ При одноточечном соединении графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$ получаем граф в результате отождествления вершин u_i для всех $i = 1, 2, \ldots, k.$

Пусть задано k циклов $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_k}$ $(k \geq 2)$ и произвольным образом выбраны две вершины $u_i, v_i \in V(C_{n_i}),$ где $u_i \neq v_i,$ $i = 1, 2, \ldots, k,$ в каждом из них. Граф, полученный отождествлением вершины v_i цикла C_{n_i} с вершиной u_{i+1} цикла $C_{n_{i+1}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$, назовем цепным соединением циклов. Если все циклы имеют порядок 3, то цепное соединение таких циклов называют треугольной змеей из k звеньев.

ISSN 0572-2691

Определение 1 [10]. Инъективная функция $f:V(G)\to\{0,1,2,3,4,\ldots,F_q\}$, где F_q — это q-е число Фибоначчи в последовательности $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, …, $F_q=F_{q-2}+F_{q-1}$, называется Фибоначчи-грациозной разметкой графа G размера q, если индуцированная ею реберная разметка $f^*(u,v)=|f(u)-f(v)|$, где $(u,v)\in E(G)$, является биекцией из $E(G)$ на множество $\{F_1,F_2,F_3,F_4,\ldots,F_q\}$. Граф, допускающий такую разметку, называется Фибоначчи-грациозным.

Очевидно, для Фибоначчи-грациозного графа G размера q ребро с меткой F_q инцидентно вершинам с метками 0 и F_q. Кроме того, вершинам, смежным с вершиной, имеющей метку 0, должны быть поставлены в соответствие числа Фибоначчи.

Автоморфизм графа $G=(V,E)$ можно рассматривать как биекцию $\lambda:V\cup E\to V\cup E$, сохраняющую структуру графа. Две Фибоначчи-грациозные разметки f_1 и f_2 графа G считаем эквивалентными, если выполняется одно из следующих условий:

1) существует автоморфизм λ графа G, при котором $f_1(u)=f_2(\lambda(u))$ для каждой вершины $u\in V(G)$;

2) λ — тождественное отображение, $f_1(u)\neq f_2(\lambda(u))$ для любого числа вершин $u\in V(G)$ и $f_1^*(u,v)=f_2^*(\lambda(u,v))$ для каждого ребра $(u,v)\in E(G)$, где f_1^* и f_2^* — соответствующие реберные разметки.

Пусть f — Фибоначчи-грациозная разметка графа $G=(V,E)$ порядка n, индуцирующая реберную разметку f^* и $f(v_1)=0$, $f(v_n)=F_q$, где $v_1,v_n\in V(G)$, $q=|E|$. Рассмотрим функцию φ, которая задается выражением $\varphi(v_i)=F_q-f(v_i)$ для всех $v_i\in V(G)$, $i=1,2,\ldots,n$. Функцию φ будем называть обратным преобразованием f. Порожденную φ реберную разметку обозначим φ^*. Реберные метки графа G останутся неизменными после перенумерации вершин

$$\varphi^*(v_i,v_j)=|\varphi(v_i)-\varphi(v_j)|=|F_q-f(v_i)-(F_q-f(v_j))|=|f(v_i)-f(v_j)|=f^*(v_i,v_j),$$

где $(v_i,v_j)\in E(G)$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Разметка φ удовлетворяет требованиям определения 1, а значит, является Фибоначчи-грациозной для графа G. Кроме того, f и φ — эквивалентные разметки.

Введем понятие супер-Фибоначчи-грациозной разметки, которое получаем из определения 1 в результате сужения множества вершинных меток.

Определение 2. Функцию f назовем супер-Фибоначчи-грациозной разметкой графа G размера q, если f — инъекция из $V(G)$ во множество $\{F_0,F_1,F_2,F_3,\ldots$ $\ldots,F_q\}$, где $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, …, $F_q=F_{q-2}+F_{q-1}$, а порожденная ею реберная разметка $f^*(u,v)=|f(u)-f(v)|$, где $(u,v)\in E(G)$, есть биекция из $E(G)$ на множество $\{F_1,F_2,F_3,\ldots,F_q\}$. Граф, допускающий такую разметку f, назовем супер-Фибоначчи-грациозным. В случае супер-Фибоначчи-грациозного дерева функция f биективная.

Аналогичный термин представлен в работе [11], где ряд Фибоначчи состоит из различных чисел $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, \ldots$. В соответствии с этой терминологией, С. Вайдья и В. Праджапат исследовали одноточечное соединение двух циклов C_{3m} и C_{3n}, а также k циклов C_n [12], Р. Шридеви и др. — одноточечное соединение таких специальных графов, как веер, цепь, звезда, цикл [13].

Из определений 1 и 2 следует, что супер-Фибоначчи-грациозный граф будет также Фибоначчи-грациозным, если в качестве вершинных меток одновременно не выступают числа $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$.

На рис. 1 изображены два графа. Каждой вершине поставлено в соответствие число из множества $\{F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots, F_q\}$, где q — размер соответствующего графа. Будем отождествлять вершины с их метками. T — дерево размера 9, граф G, полученный из цикла C_4 прибавлением ребра, имеет размер 5. Поскольку реберные метки, индуцированные вершинной разметкой, удовлетворяют требованиям определения 2, графы T и G супер-Фибоначчи-грациозные. Кроме того, разметка G является Фибоначчи-грациозной, в отличие от разметки T.

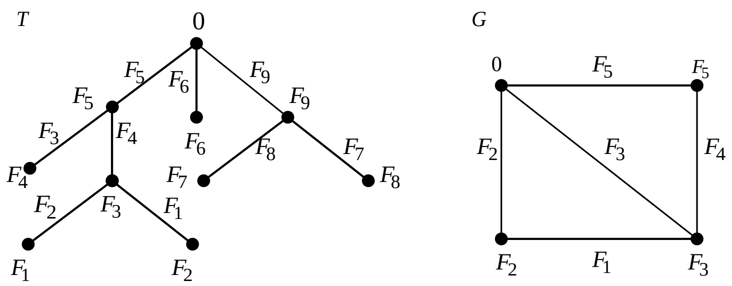

Рис. 1

Проблема характеристики всех Фибоначчи-грациозных графов, а также построения соответствующей разметки в общем виде остается открытой [12, 13]. Исследования проводились для отдельных случаев. Д. Банже и А. Баркаускас получили общие свойства Фибоначчи-грациозных графов циклической структуры для поиска запрещенных подграфов [10]. Также в [10] доказано, что почти все деревья Фибоначчи-грациозные. С. Вайдья и В. Праджапат [12] частично решили задачу Фибоначчи-грациозности для некоторых классов графов, содержащих циклы. В [14] продолжено изучение данной тематики.

В настоящей работе рассмотрены задачи, которые в общем виде можно сформулировать следующим образом.

1. Задача существования. Решается вопрос существования Фибоначчи- и/или супер-Фибоначчи-грациозной разметки графа $G = (V, E)$. Иными словами, существует ли граф $G = (V, E)$, допускающий определенный тип разметки, и при каких условиях это имеет место?

2. Задача построения. При заданной системе требований для графа $G = (V, E)$ построить хотя бы одну его разметку, которая этой системе удовлетворяет.

3. Задача перечисления. Для заданного графа $G = (V, E)$ определить число различных Фибоначчи- и/или супер-Фибоначчи-грациозных разметок. Это число будем обозначать $F(G)$ или $SF(G)$ соответственно.

4. Задача конструктивного перечисления. Задан граф $G = (V, E)$. Найти не только число его различных разметок заданного типа, но и построить все эти разметки.

Далее приведены необходимые теоретические результаты, которые нашли применение в решении поставленных задач.

Теорема 1 [10]. Пусть граф $G=(V,E)$ имеет Фибоначчи-грациозную разметку и C_i — цикл размера k в G. Тогда существует такая последовательность $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^{k}$ с $\delta_{ij}=\pm 1$ для всех $j=1,2,\ldots,k$, что $\sum\limits_{j=1}^{k}\delta_{ij}F_{ij}=0$, где $\{F_{ij}\}_{j=1}^{k}$ — множество чисел Фибоначчи для меток ребер в C_i.

Лемма 1 [10]. Предположим, что граф $G=(V,E)$ размера q имеет Фибоначчи-грациозную разметку и цикл C является подграфом G.

1. Если F_k — наибольшее число Фибоначчи, которое выступает в качестве реберной метки C, то F_{k-1} также появляется как метка ребра C.

2. Цикл C с наибольшей реберной меткой F_k должен содержать ребро с меткой F_{k-2} или F_{k-3}.

В теореме 1 и лемме 1 речь идет о свойствах реберных меток Фибоначчи-грациозного графа. Исходя из определения 2, эти свойства верны и для супер-Фибоначчи-грациозного графа.

Теорема 2 [10]. Если граф G размера q является эйлеровым и Фибоначчи-грациозным, то $q\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ или $q\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.

Теорема 3 [10]. Цикл C_n — Фибоначчи-грациозный граф тогда и только тогда, когда $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ или $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.

Обозначим $v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n$ вершины C_n. Зададим вершинную разметку f графа C_n следующим образом:
если $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, то

$$f(v_i)=\begin{cases}0 & \text{при } i=1,\\ F_i & \text{при } i\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ i\ge 3,\\ F_{i+1} & \text{при } i\equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\\ F_{i-1} & \text{при } i\equiv 2(\mathrm{mod}\,3),\end{cases}\tag{1}$$

если $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, то

$$f(v_i)=\begin{cases}0 & \text{при } i=1,\\ 1 & \text{при } i=2,\\ F_i & \text{при } i\equiv 2(\mathrm{mod}\,3),\ i>2,\\ F_{i-1} & \text{при } i\equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\ i>1,\\ F_{i+1} & \text{при } i\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\end{cases}\tag{2}$$

где $i=1,2,\ldots,n$.

В обоих случаях множество реберных меток будет иметь вид $\{F_1, F_2, F_3, F_4,\ldots$ $\ldots, F_n\}$. Таким образом, f — Фибоначчи-грациозная разметка.

Описанный способ построения Фибоначчи-грациозной разметки цикла позволяет получить следствие из теоремы 3.

Следствие 1. Для цикла C_n число неэквивалентных Фибоначчи-грациозных разметок равно единице, т.е. $F(G)=1$.

Доказательство. Рассмотрим определяемую формулами (1) или (2) Фибоначчи-грациозную разметку f цикла C_n, которая порождает реберную разметку f'. Предположим, что существует неэквивалентная f Фибоначчи-грациозная разметка φ цикла C_n, индуцирующая реберную разметку φ'.

Пусть

$$f'(u_i, u_{i+1}) = | f(u_i) - f(u_{i+1}) | = | F_{q+1} - F_{q-1} | = F_q$$

и

$$\varphi'(u_s, u_{s+1}) = | \varphi(u_s) - \varphi(u_{s+1}) | = F_q,$$

где $(u_i, u_{i+1}), (u_s, u_{s+1}) \in E(C_n)$. Таким образом, $| \varphi(u_s) - \varphi(u_{s+1}) | = | f(u_i) - f(u_{i+1}) |$. Это равенство выполняется, если

$$| \varphi(u_s) - \varphi(u_{s+1}) | = | F_{q+1} + k_1 - (F_{q-1} + k_1) |$$

или

$$| \varphi(u_s) - \varphi(u_{s+1}) | = | F_{q+2} + k_2 - (F_{q+1} + k_2) |,$$

где $k_1, k_2 = \text{const}$ и $F_{q-1} + k_1, F_{q+1} + k_1, F_{q+1} + k_2, F_{q+2} + k_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$.

Для случая, когда $\varphi'(u_s, u_{s+1}) = F_n$, получим $\varphi(u_s) = 0 + k_i$ и $\varphi(u_{s+1}) = F_n + k_i$, $i = 1, 2$. Так как $F_n + k_i$ не может выступать в качестве вершинной метки при $k_i \neq 0$, то предположение неверно и $F(G) = 1$.

Следствие доказано.

Теорема 4. Цикл C_n — супер-Фибоначчи-грациозный граф тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 (\bmod 3)$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть C_n — супер-Фибоначчи-грациозный граф. Из теоремы 1 сумма всех реберных меток должна быть четной, т.е. $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_n$ — четное число. Из тождества $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots$ $\ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ имеем F_{n+2} — нечетное число. Таким образом, $n \equiv 0 (\bmod 3)$ или $n \equiv 2 (\bmod 3)$. Но при $n \equiv 2 (\bmod 3)$ любая комбинация вершинных меток приводит, как минимум, к двум ребрам с одинаковыми метками. Следовательно, $n \equiv 0 (\bmod 3)$.

Достаточность. При $n \equiv 0 (\bmod 3)$ вершинная разметка f, заданная формулой (1), является супер-Фибоначчи-грациозной для C_n.

Теорема доказана.

В качестве иллюстрации выполним разметку цикла C_9, используя формулу (1) (рис. 2, *а*). Так как $F_1 = F_2$, существует другой вариант этой разметки (рис. 2, *б*). Супер-Фибоначчи-грациозные разметки цикла C_9 на рис. 2 считаем эквивалентными, что позволяет сформулировать следствие из теоремы 4, доказательство которого очевидно.

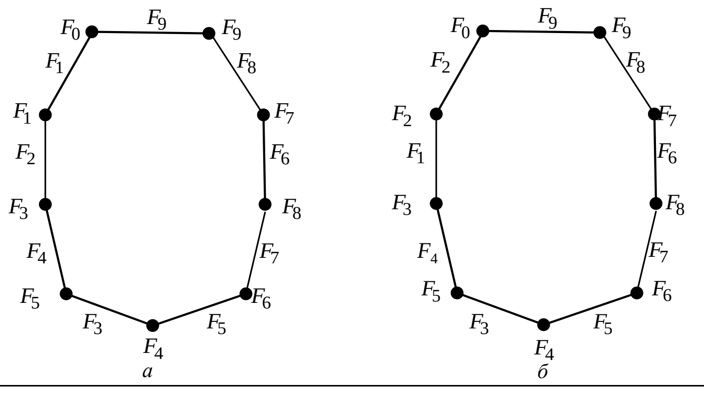

Рис. 2

Следствие 2. Для цикла C_n имеем $SF(G)=1.$

Таким образом, все супер-Фибоначчи-грациозные разметки цикла C_n эквивалентны разметке f, определяемой по формуле (1).

Теорема 5. Пусть граф $G=(V, E)$ размера q имеет супер-Фибоначчи-грациозную разметку и цикл C_n является порожденным подграфом G с $n<q.$ Если C_n не содержит вершину с меткой 0, то $n=3.$

Доказательство. Из условия теоремы граф $G=(V, E)$ размера q допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку. Пусть цикл C_n со множеством вершин V^* является порожденным подграфом $G,$ где $n<q,$ не содержащим вершину с меткой 0. Предположим, что $n>3$ и F_k — наибольшее число Фибоначчи, которое выступает в качестве вершинной метки $C_n.$ Учитывая способ задания чисел Фибоначчи, каждой вершине из V^* должно присваиваться число Фибоначчи из множества $F=\{F_k, F_{k-1}, F_{k-2}, \ldots, F_{k-(n-1)}\}.$ Таким образом, между V^* и F устанавливается взаимно-однозначное соответствие. При $n>3,$ чтобы реберные метки не повторялись, упорядоченная последовательность вершинных меток цикла C_n должна иметь вид

$$F_k, F_{k-2}, F_{k-1}, F_{k-3}, F_{k-5}, F_{k-4}, F_{k-6}, F_{k-8}, F_{k-7}, ..., F_{k-2}, ..., F_{k-(n-1)}, F_{k-(n-2)}.$$

В этом случае не существует числа Фибоначчи, которое могло бы выступать в качестве метки ребра, соединяющего первую и последнюю вершины в указанной последовательности.

Следовательно, предположение теоремы неверно, поэтому $n=3.$

Теорема доказана.

Теоремы 4 и 5 демонстрируют связь графов циклической структуры с рекуррентным способом задания чисел Фибоначчи.

2. Необходимое и достаточное условия существования Фибоначчи-грациозной разметки дизъюнктивного объединения циклов

Ниже представлены необходимые и достаточные условия существования Фибоначчи-грациозной разметки для дизъюнктивного объединения циклов, а также найден способ построения этой разметки.

Теорема 6. Граф $nC_m,$ где n — произвольное натуральное число, $n\neq 1,$ является Фибоначчи-грациозным тогда и только тогда, когда $m\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3).$

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, nC_m — Фибоначчи-грациозный граф, $n>1.$ Докажем, что $m\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3).$ Рассмотрим компоненту данного графа, которую обозначим $C,$ а соответствующие ей вершины — $v_1,$ $v_2, \ldots,$ $v_m.$ Граф C — цикл, изоморфный $C_m.$ Пусть C содержит ребро с наибольшей меткой $F_{mn}.$ В соответствии с теоремой 3 и следствием 1 имеем $m\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ или $m\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3).$ Но для всех компонент графа $nC_m,$ отличных от $C,$ при $m\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ не существует разметки вершин, которая удовлетворяла бы условию определения 1.

Кроме того, из теоремы 1 сумма чисел Фибоначчи, являющихся метками ребер любого цикла, должна быть четной. Поэтому F_{mn+2} — нечетное число и $mn+2\equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\, 3).$ Из этого следует, что $mn\equiv 0, 2 (\mathrm{mod}\, 3).$

Из одновременного выполнения условий $m \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ и $mn \equiv 0, 2(\mathrm{mod}\, 3)$ следует, что $m \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, n — произвольное натуральное число.

Достаточность. Предположим, $m \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$. Докажем, что nC_m — Фибоначчи-грациозный граф, где $n > 1$. Пусть $i = 1, 2, \dots, n$, обозначим v_1^i, v_2^i, …, v_m^i вершины i-й компоненты C_m^i графа nC_m. Зададим вершинную разметку f графа nC_m следующим образом:

$$f(v_1^i) = k_i, \tag{3}$$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} F_{(i-1)m+j} + k_i & \text{при } j \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3), \\ F_{(i-1)m+j+1} + k_i & \text{при } j \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3), \quad j \neq 1, \\ F_{(i-1)m+j-1} + k_i & \text{при } j \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3), \end{cases} \tag{4}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, \dots, m$, $k_n = 0, k_{n-1} = 4, k_{n-2} = 6, \dots$ — различные неотрицательные целые числа, такие, что $k_i \notin \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{mn}\}$, $k_n = 0$ и $k_i < F_{mn}$.

Отображение f представляет собой инъекцию из множества вершин nC_m во множество чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, F_{mn}\}$ и порождает реберную разметку f^*, равную модулю разностей меток смежных вершин. Запишем множество меток ребер для каждого цикла C_m^i :

$C_m^1 : F_m, F_{m-1}, F_{m-3}, F_{m-2}, F_{m-4}, F_{m-6}, F_{m-5}, F_{m-7}, F_{m-9}, \dots, F_6, F_5, F_3, F_4, F_2, F_1$;

$C_m^2 : F_{2m}, F_{2m-1}, F_{2m-3}, F_{2m-2}, F_{2m-4}, F_{2m-6}, F_{2m-5}, F_{2m-7}, F_{2m-9}, \dots, F_{m+6}, F_{m+5}, F_{m+3}, F_{m+4}, F_{m+2}, F_{m+1}$;

………………..………………………………………………………………………

$C_m^n : F_{nm}, F_{nm-1}, F_{nm-3}, F_{nm-2}, F_{nm-4}, F_{nm-6}, F_{nm-5}, F_{nm-7}, F_{nm-9}, \dots, F_{(n-1)m+6}, F_{(n-1)m+5}, F_{(n-1)m+3}, F_{(n-1)m+4}, F_{(n-1)m+2}, F_{(n-1)m+1}$.

Реберная разметка f^* — биекция из множества ребер $E(nC_m)$ на множество чисел $\{F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{mn}\}$. Следовательно, разметка f является Фибоначчи-грациозной для графа nC_m.

Теорема доказана.

Результаты доказательства теоремы 6 проиллюстрируем на примере графа C_6^3 (рис. 3). Вершинная разметка графа C_6^3, выполненная по формулам (3), (4), удовлетворяет требованиям определения 1, поэтому является Фибоначчи-грациозной.

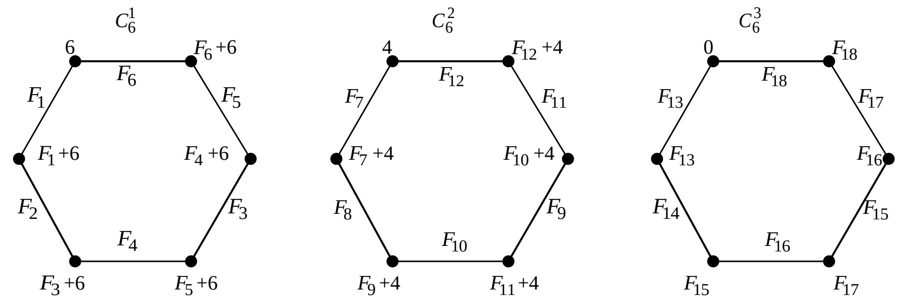

Рис. 3

Рассмотрим циклы, которые могут иметь различный порядок. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Граф $\bigcup_{i=1}^{n} C_{m_i}$, где n — произвольное натуральное число, $n \neq 1$, является Фибоначчи-грациозным тогда и только тогда, когда $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, или, не нарушая общности, будем полагать $m_1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ и $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 2, 3, 4, \ldots, n$.

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, граф $\bigcup_{i=1}^{n} C_{m_i}$ является Фибоначчи-грациозным, где $n > 1$. Рассуждения, аналогичные тем, которые приведены при доказательстве теоремы 3 [10] и необходимого условия теоремы 6, позволяют заключить, что

1) при $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, необходимое условие теоремы 7 справедливо;

2) не нарушая общности, будем полагать $m_1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогда при $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, необходимое условие теоремы 7 справедливо;

3) для всех значений m_i, отличных от тех, что описаны в пп. 1 и 2, необходимое условие теоремы 7 не является справедливым.

Достаточность. Если $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, то можно задать вершинную разметку f по аналогии с тем, как предложено в теореме 6. Она будет Фибоначчи-грациозной для графа $\bigcup_{i=1}^{n} C_{m_i}$, $n > 1$.

Рассмотрим случай, когда $m_1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, $m_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, где $i = 2, 3, 4, \ldots$. Для $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ обозначим v_1^i, v_2^i, …, $v_{m_i}^i$ вершины цикла C_{m_i}. Зададим вершинную разметку f. Сначала это сделаем для цикла C_{m_1}:

$$f(v_j^1) = \begin{cases} k_1 & \text{при } j = 1, \\ k_1 + 1 & \text{при } j = 2, \\ F_j + k_1 & \text{при } j \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3),\ j > 2, \\ F_{j-1} + k_1 & \text{при } j \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3),\ j > 1, \\ F_{j+1} + k_1 & \text{при } j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3), \end{cases} \tag{5}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m_1$, $k_1 \notin \{F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m\}$ и $k_1 < F_m$, $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Обозначим $s_i = \sum_{l=1}^{i} m_l$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Для графа $\bigcup_{i=2}^{n} C_{m_i}$ метки вершин определим следующим образом:

$$f(v_1^i) = k_i, \tag{6}$$

$$
f(v_j^i)=\begin{cases} F_{s_{i-1}+j}+k_i & \text{при } j\equiv 0(\operatorname{mod}3),\\ F_{s_{i-1}+j+1}+k_i & \text{при } j\equiv 1(\operatorname{mod}3),\\ F_{s_{i-1}+j-1}+k_i & \text{при } j\equiv 2(\operatorname{mod}3),\end{cases} \tag{7}
$$

где $i=2,3,4,\ldots,n$, $j=2,3,\ldots,m_i$, $k_m=0, k_{m-1}=4, k_{m-2}=6,\ldots$ — различные неотрицательные целые числа, такие, что $k_i\notin\{F_1,F_2,F_3,\ldots,F_n\}$, $k_m=0$ и $k_i<F_m$, $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$.

Отображение f представляет собой инъекцию из множества вершин графа $\bigcup_{i=1}^{n}C_{m_i}$ во множество чисел $\{0,1,2,3,4,5,\ldots,F_m\}$ и порождает реберную разметку f^*, равную модулю разности меток смежных вершин. Запишем множество меток ребер для каждого цикла C_{m_i}:

$C_{m_1}: F_{m_1}, F_{m_1-1}, F_{m_1-3}, F_{m_1-2}, F_{m_1-4}, F_{m_1-6},\ldots,F_4, F_2, F_3, F_1$;

$C_{m_2}: F_{s_1+m_2}, F_{s_1+m_2-1}, F_{s_1+m_2-3}, F_{s_1+m_2-2}, F_{s_1+m_2-4},\ldots,F_{s_1+5}, F_{s_1+3}, F_{s_1+4}, F_{s_1+2}, F_{s_1+1}$;

……………………………………………………………………………………………

$C_{m_n}: F_{s_{n-1}+m_n}, F_{s_{n-1}+m_n-1}, F_{s_{n-1}+m_n-3}, F_{s_{n-1}+m_n-2}, F_{s_{n-1}+m_n-4},\ldots,F_{s_{n-1}+5}, F_{s_{n-1}+3}, F_{s_{n-1}+4}, F_{s_{n-1}+2}, F_{s_{n-1}+1}$.

Реберная разметка f^* представляет собой биекцию из множества ребер графа $\bigcup_{i=1}^{n}C_{m_i}$ на множество $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$, где $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$. Следовательно, f — Фибоначчи-грациозная разметка $\bigcup_{i=1}^{n}C_{m_i}$.

Теорема доказана.

Пример Фибоначчи-грациозной разметки графа $C_8\cup C_6\cup C_9$, выполненной с использованием формул (5)–(7), представлен на рис. 4.

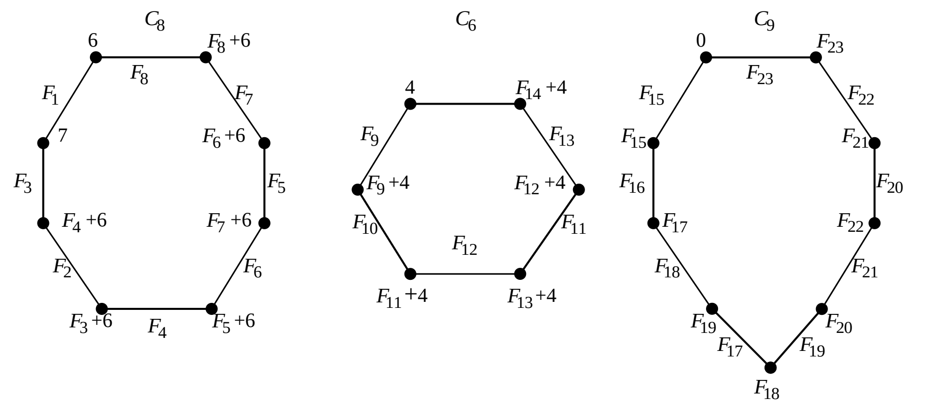

Рис. 4

3. Супер-Фибоначчи-грациозная разметка эйлеровых графов

Результаты относительно представления конечного графа четной степени в виде объединения непересекающихся циклов получил О. Веблен. Но в случае связности такого графа он будет эйлеровым. Кроме того, в терминах циклических структур Ш. Тойда предложил необходимое условие существования эйлеровых графов, а Т. Макки — достаточное. Все эти свойства графов можно описать так: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда G разложим в попарно пореберно непересекающиеся циклы, такие, что каждое ребро G принадлежит одному из этих циклов; нетривиальный связный граф G эйлеров тогда и только тогда, когда каждое его ребро принадлежит нечетному числу циклов [15]. Далее в этом разделе найдены структуры эйлеровых супер-Фибоначчи-грациозных графов с использованием изложенных выше характеристик эйлеровых графов.

Лемма 2. Граф $G=(V, E)$, полученный одноточечным соединением циклов C_{m_i}, где $i=1, 2, \dots, n$, является супер-Фибоначчи-грациозным тогда и только тогда, когда порядок каждого из циклов равен числу, кратному трем, т.е. $m_i \equiv 0(\text{mod}\, 3)$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть одноточечное соединение циклов C_{m_i}, где $i=1, 2, \dots, n$, допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку f. Если хотя бы одно из чисел m_i такое, что $m_i > 3$, и u — общая для всех циклов вершина, то, согласно теоремам 4 и 5, $f(u)=0$ и любая другая супер-Фибоначчи-грациозная разметка C_{m_i} эквивалентна f. Таким образом, все $m_i \equiv 0(\text{mod}\, 3)$.

Достаточность. Рассмотрим граф $G=(V, E)$, представляющий собой одноточечное соединение циклов C_{m_i}, где $m_i \equiv 0(\text{mod}\, 3)$, $i=1, 2, \dots, n$. Докажем, что G — супер-Фибоначчи-грациозный.

Обозначим $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{m_i}^i$ вершины цикла C_{m_i}, где v_1^i — общая вершина в G для каждого цикла, $i=1, 2, \dots, n$. Для графа G определим вершинную разметку f следующим образом:

$$f(v_1^i)=0, \tag{8}$$

$$f(v_j^i)=\begin{cases} F_{s_{i-1}+j} & \text{при } j \equiv 0(\text{mod}\, 3), \\ F_{s_{i-1}+j+1} & \text{при } j \equiv 1(\text{mod}\, 3),\ \ j>1, \\ F_{s_{i-1}+j-1} & \text{при } j \equiv 2(\text{mod}\, 3), \end{cases} \tag{9}$$

где $s_0=0$, $s_i=\sum_{l=1}^{i} m_l$, $j=2, 3, \dots, m_i$.

Функция f, заданная формулами (8), (9), удовлетворяет требованиям определения 2. Следовательно, f — супер-Фибоначчи-грациозная разметка G.

Лемма доказана.

Теорема 8. Если эйлеров граф $G=(V, E)$ размера n допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку, тогда G изоморфен одному из графов:

— циклу размера n, где $n \equiv 0(\text{mod}\, 3)$;

— одноточечному соединению циклов, порядок каждого из которых равен числу, кратному трем;

— треугольной змее из трех или четырех звеньев;

— цепному соединению трех циклов C_{m_1}, C_{m_2} и C_{m_3}, где $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ с вершиной u, общей для C_{m_1}, C_{m_2}, и v — для C_{m_2}, C_{m_3};

— цепному соединению трех циклов C_{m_1}, C_{m_2} и C_{m_3}, где $m_1 = m_3 = 3$, $m_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ с вершиной u, общей для C_{m_1}, C_{m_2}, v — для C_{m_2}, C_{m_3}, и $(u, v) \in E(C_{m_2})$.

Доказательство. Рассмотрим эйлеров граф G размера n. Предположим, что он допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку f. В связи с необходимым условием Ш. Тойда существования эйлерова графа, каждое ребро G принадлежит k_i циклам, где k_i — нечетное число, $i = 1, 2, \dots, n$.

Случай 1. Хотя бы одно из $k_i \geq 3$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $k_1 = 3$ и ребро (u, v) графа G принадлежит трем циклам C, C', C''.

Если $f(u) \neq 0$, $f(v) \neq 0$, то возможны следующие варианты:

а) только в одном из циклов C, C', C'' есть вершина с меткой 0;

б) ни в одном из циклов C, C', C'' нет вершины с меткой 0.

Рассмотрим вариант а). Пусть в C есть вершина с меткой 0. Из теоремы 5 оба цикла C', C'' должны иметь порядок, равный трем. Это невозможно.

На основании результатов, полученных при доказательстве теоремы 5, в варианте б) также приходим к противоречию с предположением.

Если $f(u) = 0$ и F_q — наибольшая вершинная метка в цикле C порядка m, то в качестве меток вершин C не используется только одно из чисел $F_{q-(m-3)}$ или $F_{q-(m-2)}$. Это не позволяет задать разметку C' и C'', удовлетворяющую требованиям определения 2. Следовательно, предположение о существовании супер-Фибоначчи-грациозной разметки для G неверно.

Случай 2. Все $k_i = 1$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Согласно необходимому условию О. Веблена существования эйлерова графа, имеем граф G, разложимый в попарно пореберно непересекающиеся циклы C_{m_j}, где $j = 1, 2, 3, \dots, s$, такие, что каждое ребро G принадлежит только одному из этих циклов.

Случай 2.1. Граф G состоит из одного цикла C_m. Из теоремы 4 $m \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

Случай 2.2. Все циклы C_{m_j}, где $j = 1, 2, 3, \dots, s$, $s \geq 2$, — компоненты разложения графа G, имеют только одну общую вершину, т.е. G представляет собой одноточечное соединение этих циклов. Из леммы 2 G допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку, если порядок каждого из циклов равен числу, кратному трем.

Случай 2.3. Граф G — треугольная змея, т.е. является цепным соединением циклов C_{m_j}, где $m_j = 3$ для всех $j = 1, 2, 3, \dots, s$, $s > 2$.

При $s = 3$ и $s = 4$ разметки G, представленные на рис. 6, *а*, *б*, являются супер-Фибоначчи-грациозными.

ISSN 0572-2691

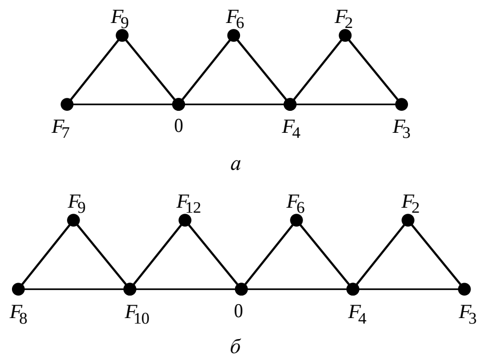

Рис. 6

Пусть $s > 4$. Если в G количество звеньев справа или слева от вершины с меткой 0 больше трех, то любая комбинация различных вершинных меток приведет к повторению реберных меток. Следовательно, предположение о существовании супер-Фибоначчи-грациозной разметки для такого графа G неверно.

Случай 2.4. Граф G представляет собой цепное соединение s циклов C_{m_j}, где $j = 1, 2, 3, \ldots, s,$ $s \geq 3,$ и хотя бы один из циклов имеет порядок больше трех.

Сначала в качестве графа G рассмотрим цепное соединение трех циклов C_{m_1}, C_{m_2} и C_{m_3}, где $m_1 = m_2 = 3,$ $m_3 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ с вершиной $u,$ общей для C_{m_1}, C_{m_2}, и v — для C_{m_2}, C_{m_3}. Пусть $f(v) = 0.$ Для меток вершин C_{m_3}, отличных от $v,$ используем упорядоченную последовательность чисел Фибоначчи: $F_{m_1+m_2+m_3}$, $F_{m_1+m_2+m_3-2}$, $F_{m_1+m_2+m_3-1}, \ldots, F_{11}, F_9, F_8,$ а для вершин C_{m_2} — F_6 и F_4, где $f(u) = F_4.$ Тогда оставшиеся вершины C_{m_1} получат метки F_3 и F_2. Реберными метками графа G являются различные числа из множества $\{F_{m_1+m_2+m_3},\ F_{m_1+m_2+m_3-1}, \ldots, F_1\}.$ Указанная разметка G супер-Фибоначчи-грациозная.

Далее в качестве графа G рассмотрим такое цепное соединение трех циклов C_{m_1}, C_{m_2} и C_{m_3}, где $m_1 = m_3 = 3,$ $m_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),$ что вершина u — общая для C_{m_1}, C_{m_2} и v — для C_{m_2}, C_{m_3} и $(u, v) \in E(C_{m_2}).$ Пусть $f(u) = 0.$ Для вершин C_{m_2}, отличных от $u,$ используем упорядоченную последовательность чисел Фибоначчи: $F_{m_1+m_2+m_3-3}, F_{m_1+m_2+m_3-5}, F_{m_1+m_2+m_3-4}, \ldots, F_8, F_6, F_4,$ где $f(v) = F_4,$ а для вершин C_{m_1} — $F_{m_1+m_2+m_3}$ и $F_{m_1+m_2+m_3-2}$. Тогда оставшиеся вершины C_{m_3} получат метки F_3 и F_2. Реберные метки графа G образуют множество $\{F_{m_1+m_2+m_3}, F_{m_1+m_2+m_3-1}, \ldots, F_1\}.$ Указанная разметка G грациозная.

В соответствии с теоремами 4 и 5, для всех оставшихся вариантов цепного соединения s циклов C_{m_j}, где $j = 1, 2, 3, \ldots, s,$ $s \geq 3,$ и хотя бы один из циклов имеет порядок больше трех, не существует разметки, удовлетворяющей требованиям определения 2.

Случай 2.5. Пусть граф G содержит s циклов C_{m_j}, где $j = 1, 2, 3, \ldots, s,$ удовлетворяющих хотя бы одному условию:

а) $s \geq 2$ и хотя бы два цикла имеют две общие вершины;

б) $s \geq 3$ хотя бы для трех циклов, каждая пара циклов имеет только одну общую вершину.

В условии а) если хотя бы один из циклов не содержит вершину с меткой 0, то по теореме 5 граф G не допускает Фибоначчи-грациозную разметку.

Пусть циклы C_{m_1}, C_{m_2} имеют две общие вершины u и v и $f(u)=0$. В одном из указанных циклов расстояние между вершинами u и v должно быть не больше двух.

Обозначим x, v, y цепь, принадлежащую C_{m_1}, а t, v, z — цепь, принадлежащую C_{m_2}. Если, например, $f(x)=F_{q-(l-2)}$, $f(v)=F_{q-l}$, $f(y)=F_{q-(l-1)}$, то, не теряя общности, получим $f(t)=F_{q-(l+2)}$, $f(z)=F_{q-(l+1)}$. Так как каждый из циклов имеет порядок больше трех, среди оставшихся вершин, отличных от u, найдутся вершины с одинаковыми метками. Аналогичные рассуждения можно выполнить, когда в одном из циклов расстояние между вершинами равно единице. Таким образом получим противоречие с предположением о существовании супер-Фибоначчи-грациозной разметки G.

Применяя теорему 5 и приведенные при доказательстве случая 2.4 рассуждения к графу G, удовлетворяющему условию б) случая 2.5, делаем вывод, что он не допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку.

Теорема доказана.

4. Одноточечное соединение супер-Фибоначчи-грациозных графов

Авторы работ [11–14] исследовали на наличие Фибоначчи- или супер-Фибоначчи-грациозной разметки граф G, образованный одноточечным соединением k копий графа H, где H — цикл, веер или звезда. Пусть операция соединения проводится над k произвольными связными супер-Фибоначчи-грациозными графами $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 9. Пусть граф G является одноточечным соединением связных супер-Фибоначчи-грациозных графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$, полученных отождествлением вершин $v_1^i \in V(G_i)$ для всех $i=1, 2, \ldots, k$, $k \geq 2$, и $\varphi_i(v_1^i)=0$, где φ_i — супер-Фибоначчи-грациозная разметка G_i. Тогда G допускает супер-Фибоначчи-грациозную разметку.

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_k$, где $k \geq 2$, — связные супер-Фибоначчи-грациозные графы. Обозначим $v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{m_i}^i$ вершины графа G_i порядка m_i, где $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть φ_i — супер-Фибоначчи-грациозная разметка G_i, такая, что $\varphi_i(v_1^i)=0$. Рассмотрим граф G, построенный отождествлением вершин v_1^i графов G_i для всех $i=1, 2, \ldots, k$. Общую для всех графов G_i вершину в G обозначим v. Зададим вершинную разметку f графа G таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f(v)=\varphi_i(v_1^i)=0 \text{ для } i=1, 2, \ldots, k \text{ и } f(v_j^1)=\varphi_1(v_j^1), \text{ где } j \in \{2, 3, \ldots, m_1\};$$

вершинам с меткой F_j графа G_2 ставится в соответствие число F_{m_1+j}, где $F_j \neq F_0$, $j \in \{1, 2, \ldots, m_2\}$;

вершинам с меткой F_j графа G_3 ставится в соответствие число $F_{m_1+m_2+j}$, где $F_j \neq F_0$, $j \in \{1, 2, \ldots, m_3\}$;

………………………………………………………………………………………………

вершинам с меткой F_j графа G_k ставится в соответствие число $F_{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+j}$, где $F_j \ne F_0$, $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$.

Таким образом, все метки вершин G будут разными и принадлежать множеству $\{F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{m_1}, \ldots, F_{m_1+m_2+\ldots+m_k}\}$.

Отображение f порождает на множестве ребер графа G разметку f^*, где $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$ для любых смежных вершин $u, v \in V(G)$. Для реберных меток G получим следующее:

ребру с меткой F_s графа G_1 соответствует число F_s, где $s = 1, 2, \ldots, m_1$;

ребру с меткой F_s графа G_2 — число F_{m_1+s}, где $s = 1, 2, \ldots, m_2$;

ребру с меткой F_s графа G_3 — число $F_{m_1+m_2+s}$, где $s = 1, 2, \ldots, m_3$;

………………………………………………………………………………………………

ребру с меткой F_s графа G_k — число $F_{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+s}$, где $s = 1, 2, \ldots, m_k$.

Метки ребер G разные и «пробегают» все значения из множества $\{F_1, F_2, \ldots, F_{m_1}, \ldots, F_{m_1+m_2+\ldots+m_k}\}$.

Следовательно, f — супер-Фибоначчи-грациозная разметка графа G.

Теорема доказана.

Разметим вершины графа G, полученного одноточечным соединением двух супер-Фибоначчи-грациозных графов, изображенных на рис. 1, и цикла C_3, так, как предложено в доказательстве теоремы 9. Результаты этих действий представлены на рис. 5. Граф G будет супер-Фибоначчи-грациозным. Однако, исходя из определения 1, предложенная разметка для G не является Фибоначчи-грациозной.

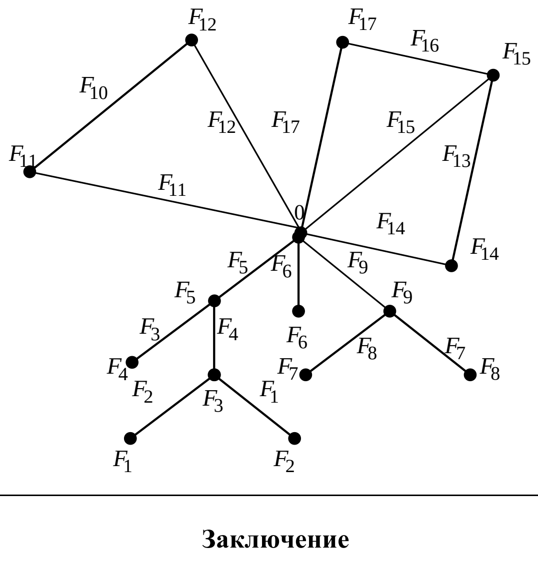

Рис. 5

Заключение

В данной работе рассмотрены такие разновидности оптимальной нумерации графов, для которых в качестве меток выступают числа ряда Фибоначчи — это Фибоначчи- и супер-Фибоначчи-грациозные разметки. Найдено решение задач построения и перечисления таких разметок для некоторых видов графов циклической структуры, а также задачи существования супер-Фибоначчи-грациозной разметки эйлеровых графов. Некоторые из Фибоначчи- и супер-Фибоначчи-грациозных графов являются подграфами куба Фибоначчи. С этой точки зрения представляет интерес изучение структурных свойств таких графов. Полученные результаты можно распространить на другие классы графов, а также применить в теории графов, теории кодирования и криптографии.

М.Ф. Семенюта

ФІБОНАЧЧІ- ТА СУПЕР-ФІБОНАЧЧІ-ГРАЦІОЗНІ РОЗМІТКИ ДЕЯКИХ ВИДІВ ГРАФІВ

Розглянуто базові теоретичні відомості щодо Фібоначчі-граціозних графів. Під Фібоначчі-граціозною розміткою графа $G=(V,E)$ розміру q розуміють ін'єктивну функцію $f:V\to\{0,1,2,3,4,\ldots,F_q\}$, яка індукує бієктивну функцію $f^*:E\to\{F_1,F_2,F_3,\ldots,F_q\}$, де $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, ..., $F_q=F_{q-2}+$ $+F_{q-1}$, за правилом $f^*(uv)=|f(u)-f(v)|$ для будь-яких суміжних вершин $u,v\in V.$ Граф, що допускає таку розмітку, називається Фібоначчі-граціозним. У даній роботі введено поняття супер-Фібоначчі-граціозної розмітки звуженням множини вершинних міток, тобто $f:V\to\{F_0,F_1,F_2,F_3,\ldots,F_q\}$. Виділено чотири типи задач, що підлягають дослідженню. У задачі першого типу піднімається наступне питання: чи існує граф, що допускає певний вид розмітки, і за яких умов це має місце? Задача другого типу — це задача побудови: при заданій системі вимог для графа необхідно побудувати (хоча б одну) його розмітку, яка задовольняла б цій системі. Наступні два типи задач відносяться до задач переліку: для заданого графа визначити число різних Фібоначчі- і/або супер-Фібоначчі-граціозних розміток; побудувати всі різні розмітки заданого виду. В результаті вирішення цих задач знайдено функції, які породжують Фібоначчі- і супер-Фібоначчі-граціозні розмітки для графів циклічної структури; отримано необхідні і достатні умови існування Фібоначчі-граціозної розмітки диз'юнктивного об'єднання циклів, супер-Фібоначчі-граціозної розмітки циклів, ейлерових графів; визначено число нееквівалентних розміток циклу; представлено умови існування супер-Фібоначчі-граціозної розмітки одноточкового з'єднання k довільних зв'язних супер-Фібоначчі-граціозних графів G_1, $G_2,\ldots$ $\ldots,G_k$.

Ключові слова: Фібоначчі-граціозна розмітка, супер-Фібоначчі-граціозна розмітка, цикл, ейлерів граф, одноточкове з'єднання графів.

M.F. Semeniuta

FIBONACCI AND SUPER FIBONACCI GRACEFUL LABELLINGS OF SOME TYPES OF GRAPHS

We consider the basic theoretical information regarding the Fibonacci graceful graphs. An injective function $V\to\{0,1,2,3,4,\ldots,F_q\}$ is said a Fibonacci graceful labelling of a graph $G=(V,E)$ of a size q, if it induces a bijective function $f^*:E\to\{F_1,F_2,F_3,\ldots,F_q\}$ on the set of edges , where $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, **. . .,** $F_q=F_{q-2}+F_{q-1}$, by the rule $f^*(uv)=|f(u)-f(v)|$, for any adjacent vertices $u,v\in V.$ A graph that allows such labelling is called Fibonacci graceful. In this paper, we introduce the concept of super Fibonacci graceful labelling, narrowing the set of vertex labels, i.e. $f:V\to\{F_0,F_1,F_2,F_3,\ldots,F_q\}$ Four types of problems to be studied are selected. In the problem of the first type, the following question is raised:

is there a graph that allows a certain kind of labelling, and under what conditions does this take place? The problem of the second type is the problem of construction: it is necessary, for a given system of requirements for the graph, to construct (at least one) its labelling that would satisfy this system. The following two types of problems relate to enumeration problems: for a given graph, determine the number of different Fibonacci and / or super Fibonacci graceful labellings; build all the different labellings of a given kind. As a result of solving these problems, functions were found that generate Fibonacci and super Fibonacci graceful labellings for graphs of cyclic structure; necessary and sufficient conditions for the existence of Fibonacci graceful labelling for disjunctive union of cycles, super Fibonacci graceful labelling for cycles, Eulerian graphs are obtained; the number of non-equivalent labellings of the cycle is determined; conditions for the existence of a super Fibonacci graceful labelling of a one-point connection of arbitrary connected super Fibonacci graceful graphs $G_1,\ G_2, \cdots$
$\ldots, G_k$ are presented

Keywords: Fibonacci graceful labelling, super Fibonacci graceful labelling, cycle, Eulerian graph, one-point union of graphs.

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics.* 2019. DS6: Dec 15. 535 p. DOI: https://doi.org/10.37236/27
2. Stakhov A.P. Fibonacci matrices, a generalization of the Cassini formula and a new coding theory. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. **30**, N 1. P. 56–66. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.-2005.12.054
3. Prajapat S., Jain A., Thakur R.S. A novel approach for information security with automatic variable key using Fibonacci *Q*-matrix. *International Journal of Computer & Communication Technology*. 2012. **3**, N 3. P. 54–57.
4. Tas N., Ucar S., Ozgur N.Y., Kaymak O.O. A new coding/decoding algorithm using Fibonacci numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*. 2018. **10**, N 2. P. 1–10. DOI: https://doi.org/10.1142/S1793830918500271.
5. Hsu W.-J. Fibonacci cubes — a new interconnection technology. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems.* 1993. **4**, N 1. P. 3–12.
6. Liu J., Hsu W.-J., Chung M.J. Generalized Fibonacci cubes are mostly Hamiltonian. *Journal of Graph Theory.* 1994. **18**. P. 817–829.
7. Bresar B., Klavzar S. Θ-graceful labelings of partial cubes. *Discrete Mathematics.* 2006. **306**, N 13. P. 1264–1271. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.02.013.
8. Horibe Y. Notes on Fibonacci trees and their optimality. *Fibonacci Quarterly.* 1983. **21**, N 2. P. 118–28.
9. Koh K.M., Lee D.G., Tan T. Fibonacci trees. *SEA bull. math.* 1978. **2**, N 1. P. 45–47.
10. Bange D.W., Barkauskas A.E. Fibonacci graceful graphs. *Fibonacci quarterly.* 1983. **21**, N 3. P. 174–188.
11. Kathiresan K.M., Amutha S. Fibonacci graceful graphs. *Ars Combinatoria.* 2010. **97**. P. 41–50.
12. Vaidya S.K, Prajapati U.M. Fibonacci and super Fibonacci graceful labeling of some cycle related graphs. *International Journal of Mathematical Combinatorics.* 2011. **4**. P. 56–69.
13. Sridevi R., Navaneethakrishnan S., Nagarajan K. Super Fibonacci graceful labeling. *International Journal of Mathematical Combinatorics.* 2010. **3**. P. 22–40.
14. Шерман З. Некоторые результаты по Фибоначчи грациозным разметкам графов. *Теорія оптимальних рішень.* 2015. С. 35–40.
15. Chartrand G., Lesniak L., Zhang P. Graphs and Digraphs. 6th ed. CRC Press, Taylor & Francis Group. Textbooks in mathematics, 2015. 640 p.

Получено 22.07.2020