

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 004.942

А.Н. Трофимчук, В.А.Васянин, Л.П. Ушакова

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РАЗРЕЖЕННОЙ И ПЛОТНОЙ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ

Ключевые слова: иерархические коммуникационные сети, дискретные потоки и параметры, задачи оптимизации, компьютерное моделирование.

Введение

Одними из приоритетных областей экономики Украины определены транспорт и связь, повышение эффективности функционирования которых требует создания комплекса автоматизированных систем обработки данных и управления разного уровня и назначения. Обычно такие системы основаны на принципах технологической, организационной, документационной, программной и информационной совместимости и образуют целостную информационную инфраструктуру коммуникационных сетей.

Оптимизация структуры государственных и корпоративных коммуникационных сетей и автоматизация процессов управления транспортными потоками в них являются актуальными и перспективными направлениями в достижении качественно нового уровня развития отраслей транспорта и связи, интенсификации рыночных преобразований в Украине и ее интеграции в Европейское Сообщество.

В настоящее время большинство существующих коммуникационных сетей, таких как транспортные сети (ТС) и сети передачи данных (СПД), имеют иерархическую структуру и сложную систему управления обработкой и распределением циркулирующих в них потоков. В первую очередь, это обусловлено их масштабностью, многообразием и сложностью выполняемых функций, функционированием в условиях неполной информации и воздействия случайных факторов. Количество уровней иерархии сети может определяться административным делением территории, структурой органов территориального управления, принятой технологией обработки и распределения потоков грузов, информации и пр. Как правило, такие сети состоят из децентрализованной распределенной магистральной сети и низовых сетей — зональных и внутренних [1]. Проектирование иерархической структуры сети в большинстве случаев имеет нисходящий характер. На верхнем уровне решаются задачи структурного синтеза и перспективного развития сети, для которых используются крупноагрегированные модели распределения потоков и расчета эксплуатационных и технико-экономических показателей ее функционирования. На низших уровнях проектирования детализация объектов должна увеличиваться в целях наиболее адекватного их описания и принятия рациональных решений. Это обуславливает итерационно-циклический характер.

© А.Н. ТРОФИМЧУК, В.А.ВАСЯНИН, Л.П. УШАКОВА, 2021

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2021, № 1*

тер процессов проектирования и управления, включающих процедуры синтеза и анализа возможных решений на всех уровнях сети. Поскольку решения принимаются в условиях неопределенности, связанных с неполнотой имеющейся информации, а также с огрублением математических моделей, необходимо разделять решения на перспективные, текущие (тактические) и оперативные. Как известно, большинство математических моделей управления, характеризующих сложную систему как единое целое, не являются адекватными реальным процессам из-за трудностей формального описания многих ограничивающих условий. Для иерархических сетей неадекватность общих моделей объясняется также невозможностью оперативной корректировки моделей в изменяющихся условиях протекания процесса, а также необоснованностью выбора критериев или заменой ряда критериев одним, имеющим сложный условно-экономический характер. Попытки представить модель на уровне агрегированных показателей ведут к потере специфики организации обработки и распределения потоков и, как правило, к неадекватности модели. Составление развернутых моделей, когда управление на нижних уровнях представлено детализированными моделями, приводит к необозримости получаемых решений и некомпетентности специалистов, ответственных за организацию транспортных процессов. Разрешение такой ситуации может быть в создании комплекса взаимосвязанных многоуровневых моделей планирования и управления, отображающих иерархию коммуникационной сети и соответствующую ей степень агрегирования показателей [2, 3]. Поскольку физическая пространственная структура большинства существующих сетей уже сложилась, в первую очередь, наибольший интерес представляет решение задач тактического планирования и оперативного управления, нацеленных, главным образом, на оптимизацию их функционирования при имеющихся ресурсах на конкретно заданных промежутках времени, когда потоки в сети и ее основные технико-экономические и эксплуатационные характеристики остаются достаточно стабильными [4].

Цель настоящей работы заключается в исследовании решения задачи оптимизации иерархической структуры для разреженных и плотных коммуникационных сетей с дискретными многопродуктовыми потоками. В таких сетях каждый узел может обмениваться корреспонденциями (продуктами, требованиями) со всеми остальными узлами. Корреспонденция характеризуется узлом-источником, узлом-стоком и величиной, которая для ТС задается количеством тарно-штучных грузов в упаковке унифицированного размера, а для СПД — числом битов, байтов, мегабайтов и т.д. в передаваемых данных (сообщениях). Корреспонденции могут быть заданы, например, матрицей дискретных потоков, в которой строки соответствуют узлам-источникам, столбцы — узлам-стокам, а элементы матрицы определяют величину корреспонденций. В дальнейшем предполагается, что в магистральной и зональных сетях все корреспонденции транспортируются в транспортных средствах или передаются по каналам связи в транспортных блоках заданного размера (емкости, объема). Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц корреспонденций (например, 40 тарно-штучных грузов, 64 Кбит). Все магистральные узлы являются сортировочными центрами, в которых корреспонденции сначала сортируются по адресам (узлам) назначения, а затем упаковываются в транспортные блоки. Поскольку величина отдельных корреспонденций значительно меньше размера транспортного блока, при сортировке они могут несколько раз и в разных узлах объединяться (упаковываться) с корреспонденциями, имеющими другие адреса назначения. При таком объединении в узлах сети уменьшается количество направлений их сортировки и транспортных блоков, необходимых для их упаковки, но в отдельных узлах появ-

ляются дополнительные объемы сортировки корреспонденций, не достигших адресов назначения. Кроме того, увеличивается время доставки получателю тех корреспонденций, которые проходят дополнительную сортировку в транзитных узлах следования. Основная задача исследования — установить, как изменяется структура сети, схема обработки и распределения потоков и технико-экономические показатели функционирования сети при изменении ее плотности (отношения числа дуг сети к максимально возможному числу дуг для заданного числа узлов в сети).

1. Иерархическая структура сети.

Принципы организации сортировки и распределения потоков

В сети выделено три уровня иерархии — магистральный, зональный и внутренний, и четыре типа узлов — первого, второго, третьего и четвертого типов. Узлы первого, второго и третьего типа, находящиеся на транспортных магистралях ТС или СПД и соединяющие их участки маршрутов транспортных средств или каналов связи, составляют магистральную сеть. Все магистральные узлы имеют свои зоны обслуживания (ЗОУ), которые образуют зональные уровни магистральной сети. Узлы четвертого типа находятся во внутренней зоне обслуживания какого-либо магистрального узла и вместе с ним образуют внутреннюю сеть. Каждый узел в сети имеет название, географические координаты, уникальный индекс и порядковый номер. Каждому узлу можно поставить во взаимно-однозначное соответствие множество индексов (номеров) корреспондирующих с ним других узлов в магистральной и внутренней сети. На рис. 1 показаны фрагменты сетей, а также примеры ЗОУ для узлов первого, второго и третьего типа (где m — узлы четвертого типа).

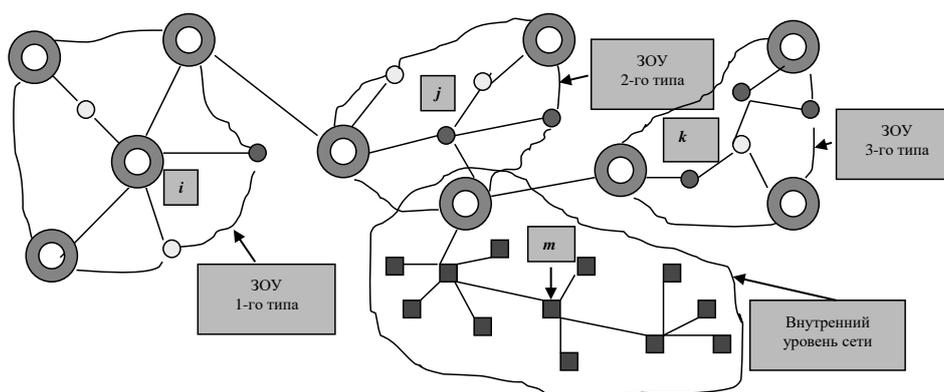


Рис. 1

Узлы первого типа могут сортировать потоки во все магистральные узлы в зоне своего обслуживания и во все другие узлы первого типа в магистральной сети. В узлах второго и третьего типа магистральные направления сортировки потоков ограничены количеством узлов, находящихся внутри и на границе их зон обслуживания. Поэтому в магистральной сети после сортировки потоков корреспонденций и упаковки их в транспортные блоки не может быть прямого потока транспортных блоков между узлами первого и второго или третьего типа и наоборот, если только они не находятся в одной зоне обслуживания. Узлы второго и третьего типа отличаются от узлов первого функциональными возможностями, уровнем технической оснащенности, числом обслуживающего персонала и пр., в этих узлах запрещена сортировка транзитных потоков корреспонденций (кроме потоков между узлами четвертого типа во внутренней сети). В узлах третьего типа, в отличие от узлов второго, запрещена обработка тран-

зитных потоков транспортных блоков. В узлах четвертого типа потоки не сортируются, а непосредственно отправляются в соответствующий магистральный узел.

Общая схема сортировки потоков для транспортной сети показана на рис. 2. Входной поток корреспонденций из общего накопителя (или накопителей) поступает на линии сортировки. Число таких линий регулируется в зависимости от общего объема корреспонденций, ежесуточно поступающего на сортировку. Входной поток включает исходящие, входящие и транзитные корреспонденции и обрабатывается по мере их поступления в непрерывном режиме или с предварительным накоплением в зависимости от интенсивности потока. Устройство считывания уникальных индексов корреспонденций (или их расширенных штрих-кодов), расположенное в начале каждой линии, считывает индексы и передает их в компьютер.

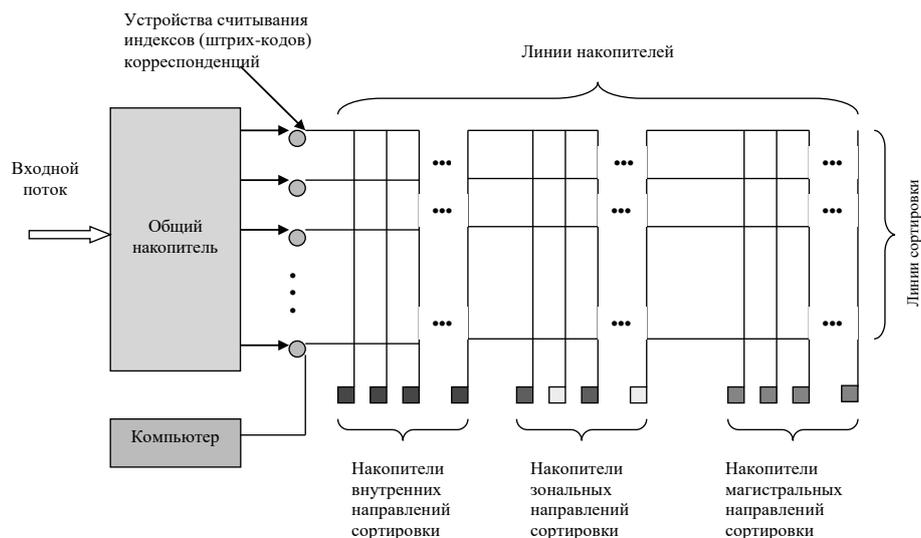


Рис. 2

Расширенный штрих-код может содержать данные об индексах предприятий отправителя и получателя; о кодах юридических или физических лиц отправителей и получателей; о дате приема корреспонденции в транспортном предприятии отправителя и пр. Такая расширенная информация о каждой корреспонденции дает возможность автоматизированного отслеживания ее продвижения от отправителя к получателю. В памяти компьютера хранятся сортировочные таблицы, содержащие группы индексов, которые соответствуют каждому направлению сортировки. Общее количество направлений сортировки определяется суммой магистральных, зональных и внутренних направлений. В соответствии с расшифрованным индексом корреспонденция направляется в нужный накопитель. Состав групп индексов, соответствующих внутренним и зональным направлениям сортировки, практически постоянен и изменяется только при введении новых предприятий, обслуживаемых данным узлом, или изменении зоны обслуживания узла. Количество и состав магистральных направлений сортировки определяются после решения задачи упаковки и формирования потоков транспортных блоков [5, 6].

Для сетей передачи данных роль сортировочной машины выполняют мультиплексоры, которые объединяют потоки корреспонденций в виртуальные контейнеры (транспортные блоки).

Типы узлов и зоны их обслуживания могут задаваться проектировщиком сети или определяться в автоматизированном режиме. В любом случае решается задача выбора оптимальной структуры сети по критерию минимума приведенных затрат на ее функционирование и устанавливается состав и количество узлов каж-

дого типа. Более подробное описание принципов и технологии обработки и распределения потоков в иерархической сети, а также состава и работы информационно-аналитической системы поддержки принятия решений (ИАС ППР) для управления транспортными процессами в иерархической сети можно найти в работах [1, 3]. ИАС ППР функционирует в масштабе реального времени и позволяет эффективно управлять нелинейными и нестационарными процессами обработки и распределения потоков на всех уровнях сети.

2. Математическая модель иерархической сети и задача оптимизации ее структуры

Согласно введенным понятиям определим математическую модель иерархической сети. Пусть физическая сеть задана связным графом $\hat{G}(\hat{N}, \hat{P})$ со множеством узлов $\hat{N} = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, $\hat{n} = |\hat{N}|$ и множеством дуг \hat{P} , $\hat{p} = |\hat{P}|$, где N_1, N_2, N_3, N_4 — множества узлов первого, второго, третьего и четвертого типа, \hat{n} и \hat{p} — соответственно число узлов и дуг сети. Узлы сети соответствуют пунктам сортировки, отправления, назначения и перегрузки потоков корреспонденций и транспортных блоков. Дуги представляют собой участки транспортных коммуникаций ТС или СПД и могут быть как ориентированными, так и неориентированными. Длины дуг заданы матрицей $\hat{R} = \left\| \hat{r}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$, $\hat{r}_{ij} \in R^1$, $(i, j) \in \hat{P}$, где R^1 — множество действительных чисел. Потоки корреспонденций между всеми парами узлов заданы целочисленной матрицей $\hat{A} = \left\| \hat{a}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$, где \hat{a}_{ij} — поток из узла i в узел j , $i, j = \overline{1, \hat{n}}$, $i \neq j$. Определим также магистральную сеть $G(N, P)$ со множеством узлов $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, $n = |N|$, множеством дуг P , $p = |P|$ и внутриузловые сети $\tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$, $\tilde{N}_k = \{N_0^k, N_4^k\}$, $N_0^k \in N$, $N_4^k \subseteq N_4$, $|N_0^k| = 1$, $n_k = |\tilde{N}_k| = 1 + |N_4^k|$, $p_k = |\tilde{P}_k|$, $k = \overline{1, n}$.

Для внутриузловых сетей выполняется условие $\bigcap_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k) = \emptyset$. Для полной сети осуществляется процедура редукции $\varphi: \hat{G}(\hat{N}, \hat{P}) \Rightarrow G(N, P) + \bigcup_{k=1}^n \tilde{G}_k(\tilde{N}_k, \tilde{P}_k)$, в результате чего, в соответствии с принципами сортировки и распределения потоков корреспонденций в иерархической сети, потоковая матрица $\hat{A} = \left\| \hat{a}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$ преобразовывается в матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$ и $\tilde{A}_k = \left\| \tilde{a}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}$, а матрица длин дуг $\hat{R} = \left\| \hat{r}_{ij} \right\|_{\hat{n} \times \hat{n}}$ — соответственно в матрицы $R = \left\| r_{ij} \right\|_{n \times n}$ и $\tilde{R}_k = \left\| \tilde{r}_{ij}^k \right\|_{n_k \times n_k}$, $k = \overline{1, n}$. В матрице A значения a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, определяют внутриузловые объемы на обработку потоков в магистральной сети. Процедура редукции позволяет программным способом преобразовать данные исходной полной сети в данные магистральной и внутриузловых сетей при изменении ее структуры и соподчинении узлов четвертого типа магистральным узлам.

Задачу оптимизации иерархической структуры решим для магистральной сети при изменении ее плотности $\rho = p / (n^2 - n)$ в предположении, что для каждого

магистрального узла известны обслуживаемые им узлы четвертого типа. При этом все потоки этих узлов в результате выполнения процедуры редукции учтены в потоках между магистральными узлами. В работах [5, 6] исследована NP-трудная задача упаковки корреспонденций в транспортные блоки и предложены приближенные алгоритмы ее решения. При выборе «оптимальной» иерархической структуры магистральной сети для каждой заданной плотности будем многократно решать задачу упаковки для различных составов типов узлов (N_1, N_2, N_3 — неизвестные множества) до тех пор, пока не будет найдена структура сети, при которой достигается минимум суммарных приведенных затрат на ее функционирование. Требуется найти минимум функции

$$F = \sum_{ij \in S} C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) + \sum_{i=1}^n C_{sort}^i(x_i, q_i) + \sum_{i=1}^n C_{load}^i(u_i) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \leq h_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

В процессе решения задачи (1)–(3) корреспонденции a_{ij} из источников i в стоки j , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, могут объединяться с другими корреспонденциями и упаковываться в транспортные блоки размера $\omega \gg a_{ij}$ только целиком. Здесь x_{ij} и u_{ij} — неизвестные переменные, определяющие соответственно величину

потока из i в j в корреспонденциях и транспортных блоках, $u_{ij} = \left\lceil \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rceil$, где $\lceil \cdot \rceil$

означает округление числа до большего целого; S — множество пар индексов (i, j) корреспонденций, определенное на декартовом произведении $n \times n$;

$x_{ij} = a_{ij} + \sum_{rs} a_{rs}^*$, если корреспонденция a_{ij} не объединялась ни с какой другой, где $\{a_{rs}^*\}$ — множество корреспонденций, объединенных с корреспонденцией a_{ij} , $x_{ij} = 0$, если корреспонденция a_{ij} объединялась с какой-либо другой или

$i = j$; $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ — нелинейная функция транспортных затрат, зависящая от количества транспортных блоков u_{ij} и длины d_{ij} пути их транспортировки между узлами i и j ; $C_{sort}^i(x_i, q_i)$ — нелинейная функция затрат от суммарного объема

$x_i = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + a_{ji}) + \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ и количества направлений сортировки

$q_i = q_{in}^i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$ корреспонденций, обрабатываемых в узле i ($\delta_{ij} = 1$, если

$x_{ij} \neq 0$, и $\delta_{ij} = 0$, если $x_{ij} = 0$, а q_{in}^i определяет заданное количество направлений сортировки для обработки корреспонденций a_{ii} , $i = \overline{1, n}$); $C_{load}^i(u_i)$ — нелинейная функция затрат от суммарного количества транспортных блоков

$u_i = \sum_{j=1}^n (u_{ij} + u_{ji})$, обрабатываемых в узле i ; h_i , $i = \overline{1, n}$, — максимальная про-

пускная способность i -го узла по обработке транзитных корреспонденций. Пропускная способность задается для транзитных потоков, так как исходящие и входящие потоки для каждого узла должны быть обработаны без ограничений. Для узлов второго и третьего типа $h_i = 0$.

При решении задачи также учитываются ограничения на время доставки $t_{ij} \leq T_{ij} \quad \forall ij \in S$ и число транзитных объединений $v_{ij} \leq v_{\max} \quad \forall ij \in S$ корреспонденций при их транспортировке из узлов отправления в узлы назначения, где T_{ij} и v_{\max} — соответственно заданное время доставки корреспонденций получателю и максимально допустимое число их транзитных объединений. При расчете времени доставки используются параметры, явно не входящие в модель: заданное время на сортировку корреспонденций (T_a) и время на транзитную перегрузку транспортных блоков в узлах сети (T_b), средняя скорость движения транспортных средств или передачи сообщений (V_{av}) и др. (разд. 3).

Первая составляющая функции (1) определяет транспортные затраты, вторая — затраты на сортировку, а третья — затраты на обработку транспортных блоков. Выражения (2) и (3) представляют условия баланса и ограничения на пропускные способности узлов.

В [6] предложены различные алгоритмы решения задачи (1)–(3), которые основаны на дискретном аналоге метода локального спуска, когда окрестности метрического пространства допустимых решений выбираются из эвристических соображений с учетом особенностей решаемой задачи, а также проведено экспериментальное сравнение их вычислительной эффективности. Решение может выполняться в двух режимах: при экспертном задании и автоматическом выборе типов и зон обслуживания узлов. При экспертном задании структура сети определяется проектировщиками на основании опыта, практических знаний и данных в базе знаний ИАС. В любом случае итеративно будет решаться задача (1)–(3) для различных составов типов узлов до тех пор, пока не будет найдена структура, при которой достигается минимум суммарных приведенных затрат на ее функционирование — минимум целевой функции (1). При решении задачи (1)–(3) на каждой итерации алгоритма сначала нужно распределять исходящие потоки из узлов второго и третьего типа в зональных сетях в соответствии с принципами сортировки. В [7] показано, что такая задача может быть сведена к задаче линейного программирования без учета ограничений на пропускные способности дуг и для ее решения могут быть использованы известные методы. После распределения потоков из узлов второго и третьего типа соответственно преобразовывается матрица потоков A , а в узлах первого типа, находящихся на границе зон обслуживания этих узлов, появляются транзитные потоки. Поэтому в процессе решения задачи правые части ограничений (3) для некоторых узлов первого типа будут автоматически увеличены на величину таких транзитных потоков.

Помимо структуры сети, основными результатами решения задачи являются потоковые матрицы $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$ и $U = \|u_{ij}\|_{n \times n}$ корреспонденций и транспортных блоков; матрица предварительных оценок времени доставки корреспонденций получателям; справочная матрица объединения потоков корреспонденций. Эти результаты используются как входные данные для решения задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков [8, 9]. Справочная матрица объединения потоков полностью определяет схему сортировки корреспонденций во всех узлах сети и адресует потоки транспортных блоков, которые будут распределены по маршрутам транспортных средств или каналам связи. В узлах ре-

альной транспортной сети или сети передачи данных справочная матрица используется для автоматизированного управления оборудованием, предназначенным для сортировки адресных грузов, или как таблица слияния сообщений в виртуальные контейнеры.

В [10, 11] показано, что при решении задачи выбора структуры сети нелинейная дискретная функция $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij})$ может быть заменена функцией удельной стоимости транспортировки потока величиной u_{ij} на расстояние d_{ij} от w_ξ — грузоподъемности транспортного средства или пропускной способности канала связи, измеряемой в транспортных блоках. Например, можно считать, что $C_{tr}^{ij}(u_{ij}, d_{ij}) = u_{ij}(k_1^\xi + k_2^\xi d_{ij}) / w_\xi \quad \forall ij \in S$, где k_1^ξ, k_2^ξ — заданные коэффициенты, $w_\xi \in \{w_1, w_2, \dots, w_\alpha\}$, $\xi = \overline{1, \alpha}$, — упорядоченные по возрастанию целые числа, определяющие набор возможных значений грузоподъемности транспортных средств или пропускной способности каналов связи. При этом структура сети не зависит от выбора значения w_ξ , а транспортные затраты рассчитываются только ориентировочно (при заданном значении w_ξ) при распределении сформированных потоков транспортных блоков по кратчайшим путям по лексикографическому критерию: минимум дуг в пути, минимум длины пути [12]. Затраты на обработку транспортных блоков и время доставки корреспонденций получателю также рассчитываются предварительно. Реальные оценки этих затрат и фактическое время доставки могут быть получены только после решения задачи распределения и маршрутизации сформированных транспортных блоков на транспортной сети или сети передачи данных [8, 9].

3. Компьютерная программа оптимизации структуры сети и результаты численного эксперимента

По существу, моделирование иерархической структуры коммуникационной сети представляет собой компьютерную технологию, состоящую из сценариев действий проектировщика и программной системы при выборе структуры, входных данных и параметров проектируемой сети. В ИАС сценарии реализованы в виде многооконного и многослойного графического интерфейса, позволяющего в картографическом виде просматривать структуру сети и ее отдельные фрагменты; исходящие и входящие потоки в узлах сети; значения всех заданных ограничений и параметров оптимизации; результаты оптимизации для различных вариантов решения задачи и пр. Проектировщик в режиме диалога может изменять значения исходных данных и параметров задачи, получать множество решений и выбирать наиболее подходящее. При этом он всегда может сравнить варианты решения по технико-экономическим показателям функционирования сети в зависимости от выбранных параметров и критериев предпочтения. Для экспериментального исследования решения задачи выбора структуры сети и схемы сортировки потоков, а также для обучения диспетчеров работе с программой разработана ее демонстрационная версия [13, 14]. Такая программа включена в состав ИАС и может работать в автономном режиме, когда все необходимые входные данные генерируются датчиком псевдослучайных чисел.

На рис. 3 показана главная форма программы, в которую вводятся входные данные. В ней можно выбрать различные варианты работы программы и указать, нужно ли оптимизировать структуру сети в автоматизированном режиме или ввести типы узлов и зоны их обслуживания вручную, использовать в алгоритмах решения задачи функции затрат или нет. Для изменения начальной величины по-

токов в процессе решения задачи может применяться коэффициент прогнозирования потоков (K_p), начальное значение которого по умолчанию установлено равным единице. В нижней части главной формы расположены окно для вывода текущих сообщений программы и кнопки активизации действий.

Рис. 3

Все выходные данные формируются в виде двух наборов данных `outIopt` и `outI` и выводятся на экран с помощью системной программы `WordPad`. В `outIopt` отображаются выбранная структура сети и основные технико-экономические показатели ее функционирования. В `outI` — для каждого узла сети в отредактированном виде — схема сортировки потоков корреспонденций и формирования потоков транспортных блоков. Если задача выбора структуры решается для транспортной сети, то в начале набора `outI` дополнительно отображаются результаты решения задачи балансировки матрицы контейнерных потоков, возникающей из-за нарушения условий баланса — равенства суммы исходящих и входящих контейнеров в отдельных узлах сети. Балансировка матрицы выполняется при решении задачи развозки порожних контейнеров [10].

Числовой пример. Для проведения вычислительного эксперимента датчиком псевдослучайных чисел генерировалось 19 однородных автотранспортных сетей с числом узлов $n = 100$ и изменяемой степенью узлов val . Длины дуг изменялись в пределах от 80 до 300 км, а величина исходящих потоков грузов из узлов первого типа задавалась в пределах от 1 до 9 единиц, из узлов второго и третьего типа — от 1 до 5 единиц. Приняты следующие значения ограничений и параметров: пропускные способности узлов по обработке транзита одинаковы и $h_i = 8000$, $i = \overline{1, n}$, единиц грузов; максимальное время доставки грузов получателю одинаково для всех корреспонденций и $T_{ij} = 99$, $ij \in S$, суток; размер транспортного блока (контейнера) $\omega = 40$ единиц грузов; грузоподъемность всех автотранспортных средств на маршрутах движения $W = 40$ контейнеров; время на сортировку грузов в узлах сети $T_a = 1$ сутки; время на транзитную перегрузку контейнеров в

узлах сети $T_b = 0,5$ суток; стоимость одного контейнера $C_{con} = 20$ условных единиц (у.е.); средняя скорость движения транспортных средств $V_{av} = 80$ км/час; максимально допустимое число транзитных объединений грузов $v_{max} = 20$; коэффициент прогнозирования потоков $K_p = 1$; режим вывода сообщений и результатов решения задачи $Mode = 2$. Все входные данные для решения задачи при $val = 2$ показаны на рис. 3.

При решении задачи рассчитывались (в у.е.) до и после оптимизации полные затраты в сети F ; транспортные затраты C_{tr} ; затраты на сортировку грузов C_{sort} ; затраты на погрузку и выгрузку контейнеров в транспортные средства C_{load} ;

общее количество контейнеров в сети $U = \sum_{ij \in S} \left\lfloor \frac{a_{ij}}{\omega} \right\rfloor$, $U = \sum_{ij \in S} \left\lfloor \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rfloor$; средний

коэффициент загрузки контейнера $K_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta_i} \sum_{j=1}^n x_{ij} / \left(\left\lfloor \frac{x_{ij}}{\omega} \right\rfloor \omega \right)$, $\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$;

среднее число направлений сортировки грузов в узле сети $N_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$; зна-

чения $\min flow$ и $\max flow$ потока контейнеров по дуге сети. Кроме того, для предварительной оценки требуемой грузоподъемности транспортных средств (пропускной способности дуг сети) рассчитывалась средняя задержка потоков в сети $T_{del} = 1 / U_{\Sigma} \sum_{kl \in P} u_{kl} / (W - u_{kl})$, где $U_{\Sigma} = \sum_{ij \in S} u_{ij}$ — суммарный поток в

сети, $u_{kl} \in Z^+$ — поток контейнеров по дуге $kl \in P$. Для расчета среднегодовых приведенных затрат на обработку и транспортировку потоков использовались конкретные функции, характерные для автотранспортных предприятий.

Работа программы выполнялась в автоматизированном режиме при активизации в главной форме полей «оптимизация структуры сети» и «вводить узлы третьего типа». После старта и сообщения программы о количестве сгенерированных узлов второго и третьего типа необходимо ввести потенциально возможное максимальное число узлов второго и третьего типа, которые могут быть включены в структуру проектируемой сети. После ответа проектировщика программа начинает оптимизировать структуру сети, сообщает о числе узлов второго и третьего типа, включенных в сеть, и выводит наборы данных $out1ort$ и $out1$ для наилучшего решения задачи. Для каждой выбранной конфигурации структуры сети в программе итеративно решается задача (1)–(3) для нарастающих значений транзитных объединений грузов $v \leftarrow v + 1$, являющихся в данном случае радиусами окрестности поиска экстремума в алгоритмах локального спуска. Значение v увеличивается до тех пор, пока значения целевой функции (1) перестанут изменяться или $v \leq v_{max}$. В работе [6] предложены две группы алгоритмов локального спуска для решения задачи (1)–(3). Первая использует заданные функции затрат C_{tr}^{ij} , C_{sort}^i и C_{load}^i , вторая — нет. Разработка алгоритмов второй группы обоснована тем, что для реальных коммуникационных сетей сложно определить функции, достаточно адекватно характеризующие затраты на процессы обработки и транспортировки потоков корреспонденций. Эти алгоритмы ориентированы на максимальное сокращение транспортных блоков в сети, не используют в своей работе функции затрат, но полученное ими решение все равно оценивается (по заданным функциям затрат). Алгоритмы первой группы показывают лучшие результаты, но

имеют высокие оценки временной сложности порядка $O(C_1 v_{\max} n^5)$, сложность алгоритмов второй группы составляет от $O(C_2 v_{\max} n^4)$ до $O(C_3 v_{\max} n^2)$, где C_1 , C_2 , C_3 — некоторые константы. В [6] экспериментально показано, что результаты решения задачи (1)–(3), полученные различными группами алгоритмов на сетях, содержащих до 500 узлов, отличаются не более чем на 2,65 %.

Начальная структура сети генерировалась так, чтобы каждый потенциальный узел второго или третьего типа был связан в своей зоне обслуживания только со смежными узлами первого типа. Это ограничение позволяет для любой сети с заданными параметрами n и val сгенерировать строго определенное число узлов второго или третьего типа и придать структуре сети более правдоподобный вид. Так, например, для сети с $n = 100$ и $val = 2$ изначально сгенерировано 50 потенциальных узлов второго или третьего типа и 50 узлов первого типа. В процессе оптимизации 31 узел первого типа был переведен в узлы третьего типа. В итоге 81 узел третьего типа получил статус узлов второго типа, так как каждый из них потенциально может быть транзитным узлом для перегрузки контейнеров с одного транспортного средства на другое. В этом случае в сети осталось только 19 узлов первого типа.

Результаты решения задачи для всех значений val приведены в таблице. Кроме того, в ней дано число транзитных объединений грузов v_{opt} , при котором получено оптимальное решение; значения среднего (t_{av}), минимального (t_{min}) и максимального (t_{max}) времени доставки грузов получателям в сутках; время решения задачи T_{sol} в секундах. На рис. 4 показаны диаграммы полных затрат (a), транспортных затрат (b), затрат на сортировку грузов (c) и затрат на обработку контейнеров (d) в сети до (1) и после (2) оптимизации, а также их разность в абсолютном выражении, полученная в результате оптимизации (3). Из таблицы и рис. 4 видно, что при увеличении степени узлов полные затраты, транспортные затраты и затраты на обработку контейнеров после оптимизации структуры сети значительно снижаются для степени узлов начиная с $val \geq 3$. Затраты на сортировку грузов при этом увеличиваются не столь заметно. Полные затраты снижаются на 417429 у.е. (3,56 %) при $val = 2$ и на 7968616 у.е. (61,32 %) — при $val = 9$, когда все узлы сети оказались узлами первого типа и получены наилучшие результаты. При $val = 10$ и $val = 11$ в сеть введены соответственно два и один узел второго типа; это можно объяснить тем, что при небольшой размерности сети и заданном значении ω локальные минимумы F_{min} для различных структур сети отстоят очень близко друг от друга. Следует ожидать, что при увеличении размерности сети локальные оптимумы будут не так близки друг к другу и структура сети при увеличении параметра val будет оставаться более стабильной. Для значений $25 \leq val \leq 55$ ориентировочной грузоподъемности транспортных средств ($W = 40$ контейнеров) до оптимизации достаточно, а после оптимизации недостаточно ($T_{del} = Infinity$), при $val = 99$ ее явно избыточно, и в любом случае для каждого варианта необходимо дальнейшее решение задачи оптимизации распределения и маршрутизации сформированных потоков контейнеров с заданной границей задержки T_{del} . При увеличении значения параметра val адекватно изменяются и значения параметров t_{av} , t_{min} , t_{max} . Среднее время доставки грузов уменьшается с 18 суток при $val = 2$ до 3,13 суток при $val = 99$. На рис. 5 приведена гистограмма, наглядно иллюстрирующая изменение структуры сети при увеличении ее плотности, где 1 — узлы первого типа, 2 — узлы второго типа.

Таблица

Значения val_{ξ} , $\xi = \overline{1,19}$	$F; C_{tr}; C_{sort}; C_{load}; (y.e.); U;$ $K_{av}; N_{av}; min\ flow; max\ flow$		$F_0 - F_{min}$, (y.e.)	$N_1; N_3;$ T_{del}	v_{opt}	t_{av} , t_{min} , t_{max} , (сут.)	T_{sol} , (с)
	До оптимизации F_0	После оптимизации F_{min}					
2	11732423 8697820 2135630 898973 2807; 0,438; 11; 122; 177	11314994 8275610 2150010 889374 2777; 0,461; 10; 117; 167	417429	19; 81 Infinity	4	18,00 2,04 62,42	114,41
3	9815280 6498520 2061020 1255740 3922; 0,438; 31; 5; 402	6061100 2980320 2246120 834660 2606; 0,690; 10; 2; 223	3754180	53; 47 Infinity	5	6,61 2,04 18,76	96,24
4	9836050 6271860 1995520 1568670 4900; 0,390; 44; 4; 181	5543751 2464480 2259650 819621 2559; 0,730; 11; 1; 164	4292299	65; 35 Infinity	3	5,51 2,04 12,28	79,50
5	9764890 5914230 2066330 1784330 5574; 0,333; 52; 3; 123	5489876 2254590 2363190 872096 2723; 0,710; 12; 1; 91	4275014	70; 30 Infinity	4	4,93 2,04 11,81	74,86
6	9774340 5825440 1989870 1959030 6120; 0,299; 58; 2; 90	5263068 2096340 2318950 847778 2647; 0,720; 12; 1; 85	4511272	75; 25 Infinity	3	4,72 2,04 9,99	69,90
7	9543590 5581720 1924130 2037740 6366; 0,274; 61; 1; 74	5065319 1984540 2233960 846819 2644; 0,660; 14; 1; 119	4478271	77; 23 Infinity	2	4,45 2,04 8,74	76,81
8	9673380 5672430 1824340 2176610 6800; 0,230; 66; 1; 65	4769553 1790930 2175640 802983 2507; 0,688; 12; 1; 124	4903827	80; 20 Infinity	3	4,43 2,04 9,28	80,90
9	12995980 8044420 1783050 3168510 9900; 0,106; 99; 2; 80	5027364 2013990 2223830 789544 2465; 0,718; 11; 1; 105	7968616	100; 0 Infinity	2	4,44 2,04 8,06	69,25
10	12495440 7571900 1866060 3057480 9553; 0,124; 95; 1; 81	5181320 2039150 2312950 829220 2589; 0,713; 11; 1; 74	7314120	98; 2 Infinity	2	4,29 2,04 7,72	60,39

11	12423040 7461770 1848430 3112840 9726; 0,117; 97; 3; 55	5108881 1989470 2300110 819301 2558; 0,719; 11; 1; 55	7314159	99; 1 Infinity	2	4,24 2,04 7,68	63,87
12	12392740 7366820 1857410 3168510 9900; 0,111; 99; 1; 60	5104381 1956500 2324420 823461 2571; 0,730, 11, 1, 56	7288359	100; 0 Infinity	2	4,20 2,04 7,66	57,08
13	12224910 7214560 1841840 3168510 9900; 0,110; 99; 1; 49	4986382 1870130 2308790 807462 2521; 0,757; 10; 1; 53	7238528	100; 0 Infinity	3	4,23 2,04 9,69	62,73
14	12121640 7091970 1861160 3168510 9900; 0,111; 99; 1; 61	4991111 1841800 2332250 817061 2551; 0,745; 10; 1; 70	7130529	100; 0 Infinity	3	4,20 2,04 9,71	61,54
15	12035730 6945780 1921440 3168510 9900; 0,116; 99; 1; 54	5122417 1867270 2395850 859297 2683; 0,716; 11; 1; 62	6913313	100; 0 Infinity	2	4,07 2,04 7,16	40,31
25	11223310 6073870 1980930 3168510 9900; 0,120; 99; 1; 36	5022535 1663170 2478630 880735 2750; 0,748; 12; 1; 78	6200775	100; 0 0,07929 Infinity	2	3,92 2,04 6,95	27,08
35	10768170 5656310 1943350 3168510 9900; 0,118; 99; 1; 30	4830357 1543400 2424460 862497 2693; 0,747; 11; 1; 71	5937813	100; 0 0,05694 Infinity	2	3,78 2,04 6,01	35,05
45	10597610 5456020 1973080 3168510 9900; 0,120; 99; 1; 29	4884005 1530050 2470340 883615 2759; 0,750; 12; 1; 75	5713605	100; 0 0,05027 Infinity	2	3,67 2,04 5,85	25,35
55	10526420 5370070 1987840 3168510 9900; 0,121; 99; 1; 24	4866282 1547160 2408630 910492 2843; 0,638; 14; 1; 56	5660138	100; 0 0,04402 Infinity	1	3,43 2,04 4,24	20,95
99	10433870 5238360 2027000 3168510 9900; 0,124; 99; 1; 1	4920353 1491480 2529260 899613 2809; 0,760; 12; 1; 7	5513517	100; 0 0,02564 0,02704	2	3,13 2,04 4,44	16,54

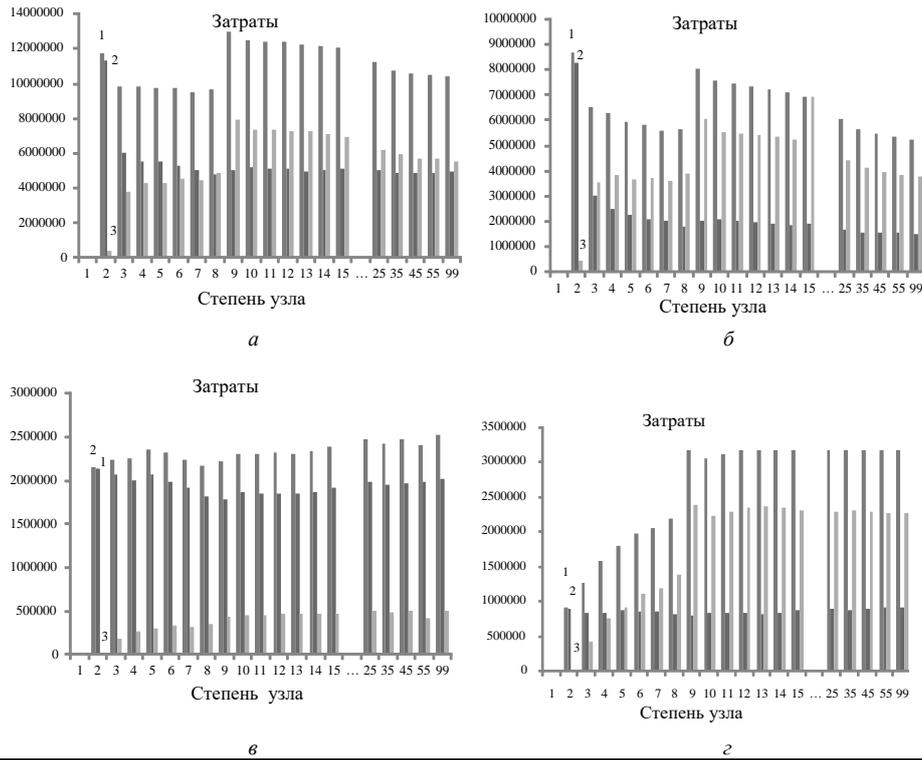


Рис. 4

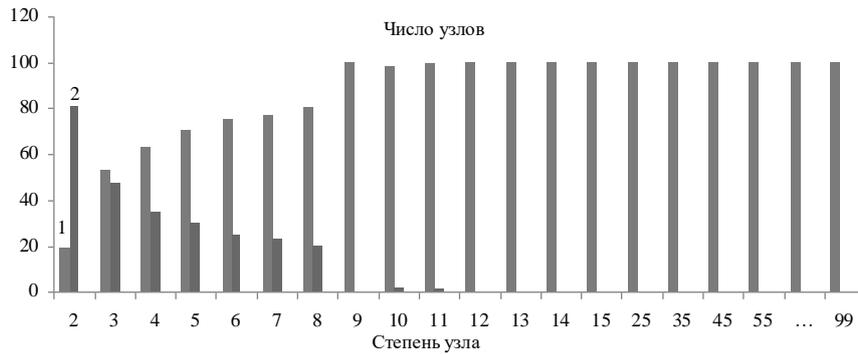


Рис. 5

Решение задачи проводилось на ПК с процессором Intel Core 2 Duo с тактовой частотой 2,66 ГГц и оперативной памятью 2 Гбайт. Время выполнения программы для всех вариантов решения не превышало 115 с.

Программное обеспечение разработано в среде Microsoft Developer Visual Studio и может быть адаптировано для работы в системе параллельного программирования Intel® Parallel Studio XE 2020, в которую вошли последние версии компиляторов C/C++ и Фортран (<https://software.intel.com/ru-ru/try-buy-tools>).

Заключение

Экспериментальное исследование задачи оптимизации иерархической структуры коммуникационной сети при изменении ее плотности показало, что наилучшие результаты решения достигаются при степени узлов сети $9 \leq val \leq 14$, когда обеспечивается высокая связность сети и значительно сокращается среднее и мак-

симальное время доставки грузов получателям. Безусловно, проведенное экспериментальное исследование на однородных сетях не претендует на полноту полученных результатов для многообразия возможных сложных вариантов структур сети. Однако предложенная компьютерная технология решения задачи при изменении плотности сети позволяет проектировщику в интерактивном режиме моделировать различные варианты сети, изменяя топологию, иерархическую структуру, потоки, параметры и ограничения модели; выбирать из полученных результатов наилучший с учетом выбранной функции цели и принятых ограничений; рассчитывать предварительные технико-экономические показатели функционирования сети при прогнозных значениях потоков; оценивать стоимость дополнительных ресурсов для планирования величины потребных инвестиций на модернизацию и строительство ее структурных элементов. В результате это позволит повысить эффективность функционирования сети за счет оптимизации использования ее ресурсов и снижения эксплуатационных затрат на обработку и транспортировку потоков.

Разработанный инструментарий может быть также использован для моделирования иерархической структуры и оптимизации функционирования традиционных логистических производственных и транспортно-складских систем, включающих узлы поставщиков сырья, производства товаров, склады и конечных потребителей.

О.М. Трофимчук, В.О. Васянин, Л.П. Ушакова

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ІЄРАРХІЧНОЇ СТРУКТУРИ РОЗРІДЖЕНОЇ І ЩІЛЬНОЇ КОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ

Статтю присвячено дослідженню задачі оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками і параметрами при зміні її щільності (відношення кількості дуг мережі до максимально можливої кількості дуг для заданого числа вузлів у мережі). У мережі виділено три рівня ієрархії — магістральний, зональний і внутрішній, та чотири типи вузлів — першого, другого і третього типу, що утворюють магістральний і зональний рівні мережі, і вузли четвертого типу, які підлегли кожному магістральному вузлу і утворюють внутрішні рівні мережі. Типи вузлів відрізняються один від одного функціональними можливостями. Основне завдання дослідження — встановити, як змінюється структура магістральної мережі (кількість і розташування магістральних вузлів першого, другого і третього типу), схема обробки і розподілу потоків і техніко-економічні показники функціонування мережі для різного ступеня її щільності. Наведено принципи сортування і розподілу потоків у ієрархічній мережі та її математичну модель. Сформульовано математичну модель задачі оптимізації структури магістральної мережі та схеми сортування і розподілу потоків. Алгоритми розв'язання задачі засновано на запропонованому раніше авторами дискретному аналогу методу локального спуску, коли околиці метричного простору можливих розв'язків вибираються з евристичних міркувань з урахуванням особливостей розв'язуваної задачі. Проведено комп'ютерне моделювання задачі на однорідній мережі, що містить 100 вузлів при зміні ступеня вузлів від 2 до 99. Моделювання проводилось на прикладі автотранспортної мережі перевезення вантажів за допомогою комп'ютерної програми, яка є частиною інструментальних програмних засобів інформаційно-аналітичної системи підтримки прийняття рішень (ІАС ППР), яка розробляється в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України. Експериментальне дослідження розв'язання задачі показало, що найкращі техніко-економічні та експлуатаційні показники її функціонування досягаються при ступеню вузлів мережі від 9 до 14, коли забезпечується висока зв'язність мережі і значно скорочується середній і максимальний час доставки вантажів одержувачам. Запропонована комп'ютерна технологія розв'язання задачі при зміні щільності мережі дозволяє проектувальнику в інтерактивному режимі моделювати різні варіанти мережі, змінюючи топологію, ієрархічну структуру, потоки, параметри і обмеження моделі; з отриманих результатів вибирати найкращий з урахуван-

ням обраної функції мети і прийнятих обмежень; розраховувати попередні техніко-економічні показники функціонування мережі; оцінювати вартість додаткових ресурсів для планування величини потрібних інвестицій на модернізацію та будівництво її структурних елементів, що в результаті дозволяє підвищити ефективність функціонування мережі за рахунок оптимізації використання її ресурсів та зниження експлуатаційних витрат на обробку і транспортування потоків.

Ключові слова: ієрархічні комунікаційні мережі, дискретні потоки і параметри, задачі оптимізації, комп'ютерне моделювання.

A.N. Trofymchuk, V.A. Vasyanin, L.P. Ushakova

RESEARCH THE PROBLEM OF OPTIMIZING THE HIERARCHICAL STRUCTURE OF A SPARSE AND DENSE COMMUNICATION NETWORK

The article is devoted to the study of the optimization problem for the hierarchical structure of a multicommodity communication network with discrete flows and parameters when its density changes (the ratio of the number of network arcs to the maximum possible number of arcs for a given number of nodes in the network). The network has three levels of hierarchy — a backbone, a zonal and a internal and four types of nodes — backbone nodes of the first, second and third types, forming the backbone and zonal levels of the network, and nodes of the fourth type, which subordinate to each backbone node and form the internal levels of the network. The types of nodes different from one another in functionality. The main task of the study is to establish how the structure of the backbone network changes (the number and location of backbone nodes of the first, second and third types), the scheme of processing and distribution of flows and technical and economic indicators of the network's functioning for various degrees of its density. The principles of organizing the sorting and distribution of flows in a three-level network and its mathematical model are given. A mathematical model of the problem of optimizing the structure of the backbone network and the schemes of sorting and distribution of flows is formulated. The algorithms for solving the problem are based on the discrete analogue of the local descent method proposed earlier by the authors, when the neighborhoods of the metric space of possible solutions are chosen from heuristic considerations, taking into account the peculiarities of the problem being solved. Computer modeling of the problem on a homogeneous network containing 100 nodes with a change in the degree of nodes from 2 to 99 is carried out. The modeling was carried out on the example of a road transport network for the transportation of cargo using a computer program, which is part of the instrumental software of the Information and Analytical Decision Support System (IA DSS), which is being developed at the Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine. An experimental study of the solution to the problem showed that the best technical, economic and operational indicators of its functioning are achieved with a degree nodes from 9 to 14, when high network connectivity is ensured, and is significantly reduced the average and maximum time of delivery of cargos to recipients. The proposed computer technology for solving problem with changing network density allows you to interactively modeling various options of a network, changing the topology, hierarchical structure, flows, parameters and constraints of the model and from the family of the resived results choose the best option, taking into account the selected a goal function and the accepted constraints; calculate preliminary technical and economic indicators of the network's functioning, estimate the cost of additional resources and plan the amount of investment required for the modernization and construction of its structural elements, which ultimately makes it possible to increase the efficiency functioning of the network by optimizing use of its resources and reducing the operating costs for the processing and transportation of flows.

Keywords: hierarchical communication networks, discrete flows and parameters, optimization problems, computer modeling.

1. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками. *Екологічна безпека та природокористування*: зб. наук. праць. Київ : ТОВ «Видавництво «ІОстон», 2010. Вип. 5. С. 172–213. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/19407>.

2. Trofymchuk A.N., Ushakova L.P., Vasyanin V.A. Management and decision making in hierarchical communication networks with discrete flows. *V International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and applications» (OPTIMA–2014) held in Petrovac, Montenegro, September 28–October 4, 2014*. Montenegro : Petrovac. Proceedings. Russia : Moscow. ESC Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Russia, 2014. P. 187–188.
3. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Информационные технологии поддержки принятия решений в коммуникационных сетях с дискретными потоками. *14 Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»*. Київ : МП «Леся», 2015. С. 64–70.
4. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Ушакова Л.П. Концептуальные основы взаимодействия задач текущего планирования и оперативного управления в иерархических коммуникационных сетях. *Інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях: Колективна монографія за матеріалами XVII Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 25–26 вересня 2018*. За заг. ред. С.О. Довгого. Київ : ТОВ «Видавництво «Юстон», 2018. С. 95–99.
5. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Complexity of one packing optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52(1)**. P. 76–84. DOI: 10.1007/s10559-016-9802-9.
6. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52(2)**. P. 258–268. DOI: 10.1007/s10559-016-9822-5.
7. Васянин В.А. Модели и алгоритмы распределения дискретных многопродуктовых потоков в зональных сетях иерархических структур. *Екологічна безпека та природокористування: зб. наук. праць*. Київ : ТОВ «Видавництво «Юстон», 2011. Вип. 8. С. 176–190. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/58222>.
8. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of packing, distribution and routing of small-size discrete flows in a multicommodity network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47(7)**. P. 15–30. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30.
9. Vasyanin V.A. Problem of distribution and routing of transport blocks with mixed attachments and its decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47(2)**. P. 56–69. DOI: 1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60.
10. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Задача выбора иерархической структуры многопродуктовой коммуникационной сети с мелкопартионными дискретными потоками. *Екологічна безпека та природокористування: зб. наук. праць*. Київ : ТОВ «Видавництво «Юстон», 2012. Вип. 10. С. 182–204. <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/57543>.
11. Трофимчук А.Н., Ушакова Л.П., Васянин В.А. Компьютерная технология моделирования иерархической структуры сети с дискретными потоками. *Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale: Materialele Conferinței Internaționale, Volumul II, Chișinău, 22-25 martie 2016 / red. resp.: Dumitru Solomon; col. red.: Dumitru Lozovanu [et al.]. Chișinău: Evrica, ATIS, 2016 (Tipogr. AȘM)*. **2**. P. 354–365. Antetit. : Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații.
12. Vasyanin V.A. A two-criterion lexicographic algorithm for finding all shortest paths in networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50(5)**. P. 759–767. DOI: 10.1007/s10559-014-9666-9.
13. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками. *Управляющие системы и машины*. 2016. № 2. С. 48–57. DOI: <https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048>.
14. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір «Комп'ютерна програма оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками» / заявник і власник О.М. Трофимчук, В.О. Васянин, Л.П. Ушакова; А.с. від 20.07.2016 № 66791, Державна служба інтелектуальної власності України; заявка від 25.05.2016 № 67221 про реєстрацію авторського права на твір.

Получено 27.07.2020