УДК: 517.9

Н.В. Горбань, А.В. Капустян, Е.А. Капустян, А.Б. Курилко

О ПРИБЛИЖЕННОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ ПРОЦЕССА РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ*

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение реакции-диффузии, быстро осциллирующие коэффициенты.

Как известно, локальные характеристики процессов в микронеоднородных средах содержат функции вида $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Эффективным инструментом при исследовании таких процессов является переход к усредненным параметрам [1]. Для параболических операторов такой переход обоснован в работе [2]. Задачи оптимального управления параболическими уравнениями с быстро осциллирующими функциями в коэффициентах исследованы в [3–6]. Общие вопросы разрешимости систем типа реакции-диффузии исследованы в [7–14].

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения реакции-диффузии с коерцитивным целевым функционалом общего вида, коэффициенты которых содержат быстро осциллирующие функции.

Для критерия качества J доказано свойство

$$J(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}) \to J(\bar{y}, \bar{u}), \ \varepsilon \to 0,$$

где $\{\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}\}$ и $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — оптимальные процессы исходной и усредненной задач.

Рассмотрен пример явного построения управления $\bar{u}$ и проиллюстрирована его эффективность с помощью численного моделирования.

Постановка задачи и наличие оптимального управления

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\varepsilon \in (0,1)$ — малый параметр. В области $Q_T = (0,T)\times\Omega$ управляемый процесс $\{y, u\}$ описывается задачей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \operatorname{div}\left[a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla y\right] - b\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) f(y) + u(t,x), \\ y\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ y\big|_{t=0} = y_0^{\varepsilon}(x), \end{cases} \tag{1}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{2}$$

$$J_{\varepsilon}(y,u) = \int_{\Omega} q_{\varepsilon}(x, y(T,x))\, y(T,x)\, dx + \gamma \int_{Q_T} u^2(t,x)\, dtdx \to \inf, \ \gamma > 0. \tag{3}$$

---

* Публикация содержит результаты исследований, проведенных при грантовой поддержке НФДУ по конкурсным проектам «Наука для безпеки людини та суспільства», № 2020.01/0256.

Здесь a — измеримая, периодическая, симметричная матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности и ограниченности:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n,\ \nu_1 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2, \tag{4}$$

$b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — неотрицательная, ограниченная, периодическая функция,

$$\exists b_1 > 0,\ \exists b_0 > 0\ \ \forall s \in \mathbb{R}\ \ b_0 \le b(s) \le b_1, \tag{5}$$

нелинейность $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет стандартным условиям знака и роста:

$$\exists \alpha > 0,\ C_1 \ge 0,\ C_2 \ge 0,\ p \ge 2, \text{ такие, что}$$

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \ f(s)\cdot s \ge \alpha |s|^p - C_1,\ |f(s)| \le C_2(1+|s|^{p-1}), \tag{6}$$

U — выпуклое, замкнутое множество в $L^2(Q_T)$, $0 \in U$.

Функция $q_\varepsilon : \Omega\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, причем существуют независимые от $\varepsilon \in (0,1)$ константа $K > 0$ и неотрицательные функции $K_1 \in L^1(\Omega)$, $K_2 \in L^2(\Omega)$ такие, что выполнены неравенства

$$q_\varepsilon(x,\xi)\xi \ge -K_1(x),\ \ |q_\varepsilon(x,\xi)| \le K|\xi| + K_2(x). \tag{7}$$

При выполнении условий (4)–(6) известно [7], что $\forall u \in L^2(Q_T)$, $\forall y_0^\varepsilon \in L^2(Q_T)$ задача (1) имеет по крайней мере одно решение $y = y(t,x)$ в классе

$$W := L^p(Q_T) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

При этом каждое решение (1) из W принадлежит $C([0,T];L^2(\Omega))$ и для почти всех $t \in (0,T)$ справедливо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \nu_1\|\nabla y(t)\|^2 + \alpha b_0 \|y(t)\|_{L^p}^p \le C_1 b_1 |\Omega| + \|y(t)\|\cdot\|u(t)\|, \tag{8}$$

здесь и далее $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Лемма. При выполнении условий (4)–(7) $\forall \varepsilon \in (0,1)$ задача оптимального управления (1)–(3) имеет решение.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть последовательность допустимых пар $\{y_n, u_n\} \in W \times U$ такая, что

$$\bar{J}_\varepsilon := \inf J_\varepsilon(y,u) \ge J_\varepsilon(y_n,u_n) - \frac{1}{n}.$$

В силу (7)

$$\gamma \int_{Q_T} (u_n)^2\, dtdx - \int_\Omega K_1(x)\, dx \le J_\varepsilon(y_n,u_n),$$

поэтому из (8) выводим, что $\{y_n\}$ ограничена в W.

Из условия (6) следует, что $\{f(y_n)\}$ ограничена в $L^q(Q_T)$.

Тогда из (1) имеем

$$\left\{\frac{dy_n}{dt}\right\} \text{ ограничена в } L^q(Q_T) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Тогда теорема о компактности [10] гарантирует, что по крайней мере по подпоследовательности для некоторого $y \in W$ выполнено

$$
\begin{gathered}
y_n \to y \text{ слабо в } W, \\
y_n \to y \text{ сильно в } L^2(Q_T) \text{ и почти всюду (п.в.) в } Q_T.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Тогда, используя неравенство (8), можно применить результат из [8, теорема 4.1] и получить по подпоследовательности сходимость

$$
y_n(t) \to y(t) \text{ сильно в } L^2(\Omega) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{10}
$$

Отсюда

$$
q_\varepsilon(x, y_n(T, x))\, y_n(T, x) \to q_\varepsilon(x, y(T, x))\, y(T, x) \text{ п.в. в } \Omega.
$$

Кроме того, в силу (9) и ограниченности $\{f(y_n)\}$ в $L^q(Q_T)$ можем применить лемму Лионса [10] и получить сходимость

$$
f(y_n) \to f(y) \text{ слабо в } L^q(Q_T).
$$

Тогда, считая, что по подпоследовательности

$$
u_n \to u \text{ слабо в } L^2(Q_T),
$$

можем перейти к границе в (1), (2) и получить, что $\{y, u\}$ — допустимый процесс в (1)–(3). По лемме Фату

$$
\bar{J}_\varepsilon \geq \underline{\lim}\, J_\varepsilon(y_n, u_n) \geq J_\varepsilon(y, u),
$$

т.е. $\{y, u\}$ — оптимальный процесс в (1)–(3).

Лемма доказана.

Предельный переход

Пусть постоянная, положительно-определенная матрица $\hat{a}$ является усредненной для $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ [1], $\hat{b}$ — среднее значение периодической функции $b(x)$, и существует функция Каратеодори $q : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такая, что

$$
\forall r > 0 \;\; q_\varepsilon(x, \xi) \to q(x, \xi) \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ равномерно по } |\xi| \leq r. \tag{11}
$$

Рассмотрим задачу (1)–(3) с усредненными коэффициентами:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial y}{\partial t} = \operatorname{div}(\hat{a} \nabla y) - \hat{b} f(y) + u(t, x), \\
y\big|_{\partial\Omega} = 0, \\
y\big|_{t=0} = y_0(x),
\end{cases} \tag{12}
$$

$$
u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{13}
$$

$$
J(y, u) = \int_\Omega q(x, y(T, x))\, y(T, x)\, dx + \gamma \int_{Q_T} u^2(t, x)\, dt dx \to \inf. \tag{14}
$$

Используя сходимость (11), легко показать, что функция $q : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам (7). Тогда в силу леммы 1 можем утверждать, что задача (12)–(14) имеет решение.

 ISSN 0572-2691

Будем предполагать следующее дополнительное условие:

при любом $u \in U$ задача (12) имеет единственное решение. (15)

Условие (15) будет иметь место, если $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $f'(s) \ge -C_3$ [7], или $\hat{b} \cdot f(s) \equiv 0.$

Теорема. Пусть выполнены условия (4)–(7), (11), (15), причем в (6)

$$p = \begin{cases} 2, \text{ если } n \ge 3, \\ 3, \text{ если } n = 2, \\ 4, \text{ если } n = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть также для некоторого числа $l > 0$ выполнено условие

$$|q_\varepsilon(x, \xi_1) - q_\varepsilon(x, \xi_2)| \le l |\xi_1 - \xi_2|. \tag{17}$$

Тогда верно предельное соотношение

$$J_\varepsilon(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) \to J(\bar{y}, \bar{u}), \; \varepsilon \to 0,$$

где $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\}$ и $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — оптимальные процессы в задачах (1)–(3) и (12)–(14).

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n \to 0.$ Поскольку

$$\gamma \int\limits_{Q_T} (\bar{u}^\varepsilon)^2 \, dtdx - \int\limits_\Omega K_1(x)\, dx \le J_\varepsilon(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) \le J_\varepsilon(y, 0) \le K \|y(T)\|^2 + \|K_2\|,$$

где y — решение (1) с $u \equiv 0,$ то из неравенства (8) при $u \equiv 0$ получаем:

$$\{\bar{u}^{\varepsilon_n}\} \text{ ограничена в } L^2(Q_T).$$

Тогда по подпоследовательности для некоторого $\hat{u}$

$$\bar{u}^{\varepsilon_n} \to \bar{u} \text{ слабо в } Q_T. \tag{18}$$

Используя дифференциальное неравенство (8) для $u = \bar{u}^{\varepsilon_n},$ выводим, как и при доказательстве леммы, что для некоторого $\bar{y} \in W$ по подпоследовательности

$$\bar{y}^{\varepsilon_n} \to \bar{y} \text{ в смысле (9).} \tag{19}$$

Покажем, что $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — допустимый процесс в (12)–(14). Для этого рассмотрим задачу (1) как линейную задачу с правой частью

$$g_n(t, x) = -b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) f(\bar{y}^{\varepsilon_n}(t, x)) + \bar{u}^{\varepsilon_n}(t, x).$$

Покажем, что

$$g_n \to \hat{g} = -\hat{b} \cdot f(\bar{y}) + \bar{u} \text{ слабо в } L^2(Q_T). \tag{20}$$

В силу (18) и сходимости

$$b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \to \hat{b} \; * \text{слабо в } L^\infty(\Omega) \tag{21}$$

достаточно показать сходимость $f(\bar{y}^{\varepsilon_n}).$ Используя условия (16) и интерполяционное неравенство [7, 10], получаем неравенства

$$\left\| f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) \right\|^2 \le C_3(1+\left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|^2) \text{ при } n \ge 3, \tag{22}$$

$$\left\| f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) \right\|^2 \le C_4(1+\left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|_{L^4}^4) \le C_5(1+\left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|^2 \cdot \left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|_{H^1}^2) \text{ при } n = 2, \tag{23}$$

$$\left\| f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) \right\|^2 \le C_6(1+\left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|_{L^6}^6) \le C_7(1+\left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|^4 \cdot \left\| \bar{y}^{\varepsilon_n} \right\|_{H^1}^2) \text{ при } n = 1. \tag{24}$$

Поскольку в силу (8)

$$\text{последовательность } \{\bar{y}^{\varepsilon_n}\} \text{ ограничена в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\text{последовательность } \{\nabla\bar{y}^{\varepsilon_n}\} \text{ ограничена в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

то из оценок (22)–(24) выводим, что

$$\text{последовательность } \{f(\bar{y}^{\varepsilon_n})\} \text{ ограничена в } L^2(Q_T).$$

В силу (9)

$$f(\bar{y}^{\varepsilon_n}(t, x)) \to f(\bar{y}(t, x)) \text{ п.в. в } Q_T.$$

Тогда

$$f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) \to f(\bar{y}) \text{ слабо в } L^2(Q_T). \tag{25}$$

Используя равентсво

$$b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) - \hat{b}f(\bar{y}) = b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)(f(\bar{y}^{\varepsilon_n}) - f(\bar{y})) + \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) - \hat{b}\right) f(\bar{y})$$

и сходимости (18), (21), (25), получаем требуемое свойство (20).

Тогда в силу свойств G-сходимости параболических операторов [2] решения $z_n = \bar{y}^{\varepsilon_n}$ задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \operatorname{div}\left(a\left(\dfrac{x}{\varepsilon_n}\right)\nabla z\right) + g_n(t, x) \\ z\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ z\big|_{t=0} = y_0^{\varepsilon_n} \end{cases} \tag{26}$$

сходятся к решению z задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \operatorname{div}(\hat{a}\nabla z) + \hat{g}(t, x) \\ z\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ z\big|_{t=0} = y_0 \end{cases} \tag{27}$$

в следующем смысле:

$$z_n \to z \text{ в } L^2(Q_T),$$

$$z_n \to z \text{ в } C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta \in (0, T). \tag{28}$$

Тогда в силу (19) $\bar{y}$ — решение (27) и, таким образом, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — допустимый процесс в (12)–(14). Покажем его оптимальность.

 ISSN 0572-2691

Из оптимальности $\{\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}\}$ следует неравенство

$$\forall u \in U \quad J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}) \leq J_{\varepsilon}(y^{\varepsilon},\ u), \tag{29}$$

где y^{ε} — решение (1) с управлением u.

Тогда для y^{ε} справедливо неравенство (8) и аналогично предыдущему по подпоследовательности

$$\begin{gathered} y^{\varepsilon} \to y \text{ в } L^2(Q_T), \\ y^{\varepsilon} \to y \text{ в } C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta \in (0, T), \end{gathered} \tag{30}$$

где $\{y, u\}$ — допустимый процесс в (12)–(14). Используя условия (11), (17), сходимость (30) и [5, лемма 2.2], можем утверждать, что по подпоследовательности

$$q_{\varepsilon}(x,\ y^{\varepsilon}(x, T)) \to q(x,\ y(x, T)) \text{ слабо в } L^2(\Omega). \tag{31}$$

Тогда

$$J_{\varepsilon}(y^{\varepsilon},\ u) \to J(y, u). \tag{32}$$

С другой стороны,

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}) \geq J(\bar{y}, \bar{u}). \tag{33}$$

Таким образом, из неравенств (29), (33), а также условия (15) выводим оптимальность процесса $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ в (12)–(14).

Докажем предельное равенство

$$J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}) \to J(\bar{y}, \bar{u}),\ \ \varepsilon \to 0. \tag{34}$$

Полагая в (29), (32) $u = \bar{u}$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0,$ получаем систему неравенств:

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq \varliminf_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}) \leq \varlimsup_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}) \leq J(\bar{y}, \bar{u}),$$

из которой и следует требуемая сходимость критериев качества (34), а также сильная сходимость $\bar{u}^{\varepsilon}$ к $\bar{u}$ в $L^2(Q_T)$.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что управление $\bar{u}$ может служить приближенным оптимальным управлением в (1)–(3), т.е. если y^{ε} — решение (1) с управлением $\bar{u}$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [J_{\varepsilon}(\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}) - J_{\varepsilon}(y^{\varepsilon},\ \bar{u})] = 0. \tag{35}$$

Действительно, из последней части доказательства получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(y^{\varepsilon},\ \bar{u}) = J(\bar{y}, \bar{u}),$$

что вместе с (34) и доказывает (35).

Численное моделирование

Рассмотрим частный случай, когда $f \equiv 0, U = L^2(Q_T), \gamma = 1$ и $q(x, \xi) = \xi.$ Тогда оптимальное управление задачи с усредненными коэффициентами (12)–(14) имеет вид [3]

$$\bar{u}(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\lambda_i(t-2T)}}{1+\frac{1}{2\lambda_i}(1-e^{-2\lambda_i T})}\right)\cdot X_i(x), \tag{36}$$

где $\{\lambda_i\}, \{X_i\}$ — решения спектральной задачи

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\hat{a}\nabla X)=-\lambda X,\\ X|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

Пусть $\Omega=(0,1), T=1, a(x)=2+\sin(2\pi x), y_0^{\varepsilon}(x)\equiv y_0(x)=\sin(\pi x).$ Тогда $\hat{a}=\sqrt{3}$ и имеем следующие численные результаты.

В классе постоянных управлений $u(x)\equiv C, C\in\mathbb{R}$ приведем значение задачи (1)–(3) J_ε^c при разных значениях $\varepsilon>0$:

$\varepsilon=\frac{1}{5}$	$\varepsilon=\frac{1}{10}$	$\varepsilon=\frac{1}{15}$	$\varepsilon=\frac{1}{20}$	$\varepsilon=\frac{1}{25}$
$1,0620\times10^{-15}$	$1,6394\times10^{-15}$	$7,6362\times10^{-16}$	$4,2419\times10^{-16}$	$9,0664\times10^{-17}$.

При этом значение задачи (12)–(14) в классе постоянных управлений $u(x)\equiv C$, $C\in\mathbb{R}$ равно

$$\bar{J}^c=9,81700\times10^{-16}.$$

Используя формулу (36), получаем

$$\bar{u}(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{3}\pi^2 i^2(t-2)}}{1+\frac{1}{2\sqrt{3}\pi^2 i^2}(1-e^{-2\sqrt{3}\pi^2 i^2})}\cdot\sin(\pi i x).$$

Приведем значения задачи (1)–(3) $\bar{J}_\varepsilon$ при использовании управления $\bar{u}$:

$\varepsilon=\frac{1}{5}$	$\varepsilon=\frac{1}{10}$	$\varepsilon=\frac{1}{15}$	$\varepsilon=\frac{1}{20}$	$\varepsilon=\frac{1}{25}$
$1,1333\times10^{-15}$	$1,7235\times10^{-15}$	$8,2719\times10^{-16}$	$4,7636\times10^{-16}$	$1,2540\times10^{-16}$

Сравнивая результаты, видим, что управление $\bar{u}$ более эффективно, нежели оптимальное постоянное управление.

Н.В. Горбань, О.В. Капустян, О.А. Капустян, О.Б. Курилко

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ В МІКРОНЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглянуто задачу побудови наближеного оптимального керування для керованих процесів хімічної кінетики в мікронеоднорідному середовищі. Такі процеси описуються напівлінійними параболічними рівняннями типу реакції-дифузії з коефіцієнтами виду $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Обгрунтовано вибір наближеного керування як оптимального керування в задачі з усередненими коефіцієнтами. Розглянуто приклад побудованого керування і продемонстровано його ефективність.

Ключові слова: оптимальне керування, рівняння реакції-дифузії, швидко коливні коефіцієнти.

N.V. Gorban, A.V. Kapustyan, E.A. Kapustyan, A.B. Kurilko

ON APPROXIMATE OPTIMAL CONTROL FOR THE REACTION-DIFFUSION PROCESS IN MICROINHOMOGENEOUS MEDIUM

The problem of constructing an approximate optimal control for controlled processes of chemical kinetics in microinhomogeneous medium is considered. Such processes are described by semilinear parabolic equations of the reaction-diffusion type with coefficients of the form $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. The preference of an approximate control as the optimal control in the problem with averaged coefficients is justified. An example of the construction of such a control is discussed and its efficiency is demonstrated.

Keywords: optimal control, reaction-diffusion equation, fast-oscillating coefficients.

1. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М. : ФизМатЛит, 1993. 464 с.
2. Spagnolo S. Convergence of parabolic equations. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 1977. **14B**. P. 547–568.
3. Kapustyan O.A., Sukretna A.V. Approximate averaged synthesis of the problem of optimal control for a parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2004. **56**, N 10. P. 1653–1664.
4. Rusina A.V. An approximated optimal stabilization for solutions of impulsive parabolic problems with fast-oscillating coefficients. *Journal of Applied Mathematics and Statistics.* 2016. **3**, N 3. P. 110–121.
5. Kapustian O.A., Sobchuk V.V. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 2018. **6**, N 4. P. 233–239.
6. Kapustian O.A., Nakonechnyi O.G., Chikrii A.O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. **55**, N 5. P. 785–795. (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, No. 5, September–October, 2019. P. 95–105).
7. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. *Rhode Island: American Mathematical Society*. *Providence.* 2002. **49**. 324 p.
8. Gorban N.V., Kapustyan O.V., Kasyanov P.O. Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction- diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity. *Nonlinear Analysis.* 2014. **98**. P. 13–26.
9. Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J. Regularity of global attractors for reaction-diffusion systems with no more than quadratic growth. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2017. **22**.
10. Sell G.R., You Y. Dynamics of evolutionary equations. New York: Springer, 2002. 670 p.
11. Kapustyan A.V. Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation. *Differential Equations.* 2002. **38**, N 10. P. 1467–1471.
12. Kapustyan O.V., Skkundin D.V. Global attractors of one nonlinear parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2003. **55**, N 4. P. 446–455.
13. Gorban N.V., Gluzman M.O., Kasyanov P.O., Tkachuk A.M. Long-time behavior of state functions for Budyko models. *Studies in Systems, Decision and Control.* 2016. **69**. P. 351–359.
14. Gorban N.V., Kasyanov P.O. On regularity of all weak solutions and their attractors for reaction-diffusion inclusions in unbounded domains. *Solid Mechanic and its Applications.* 2014. **211**. P. 205–220.

Получено 06.10.2020