УДК 519.8

Н.В. Семенова, М.М. Ломага, В.В. Семенов

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ И ОПТИМАЛЬНОСТИ, МЕТОД ОТСЕКАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Ключевые слова: лексикографическая оптимизация, векторный критерий, существование решений, условия оптимальности, Парето-оптимальные решения, множество Слейтера, метод отсекающих плоскостей Келли.

Введение

Многие проблемы принятия многоцелевых решений в управлении, планировании, проектировании формулируются как многокритериальные (векторные) оптимизационные задачи. Среди векторных задач лексикографические задачи образуют довольно широкий и важный класс задач оптимизации. Лексикографическое упорядочение используется для установления правил субординации и приоритета. Поэтому многие задачи, в том числе оптимизации сложных систем, моделирования иерархических структур, стохастического программирования в условиях риска, динамического характера и другие можно представить в виде лексикографических задач оптимизации [1–3]. Лексикографический подход к решению многокритериальных задач состоит в строгом ранжировании критериев по относительной важности и позволяет добиться оптимизации более важного критерия за счет любых потерь по всем иным, менее важным критериям. Чаще всего такие многокритериальные задачи возникают при последовательном введении дополнительных критериев в обычные скалярные задачи оптимизации, которые могут иметь не единственное решение.

К возможным методам решения таких задач относится использование схемы скаляризации или свертки векторного критерия для одноэтапного решения [1, 2]. В [2] для отыскания лексикографического оптимума линейных многокритериальных задач оптимизации предложено использование симплекс-метода. В [4, 5] задача лексикографической оптимизации с линейными ограничениями сводится к последовательности линейных лексикографических задач путем аппроксимации функций критериев. В [6] представлен алгоритм, позволяющий свести решение исходной задачи лексикографической оптимизации с помощью аппроксимации допустимого множества к решению последовательности лексикографических задач линейного программирования. В однокритериальной оптимизации ряд алгоритмов поиска экстремума построен на использовании аппарата теории двойственности. Этот вопрос представляет интерес и для задач многокритериальной оптимизации. В [7] исследуются выпуклые квадратичные задачи лексикографической оптимизации на множестве, заданном системой линейных неравенств, и вопросы построения двойственных к ним задач. Двойственные задачи к исходной строятся с помощью отображения Лагранжа, где множители Лагранжа — это векторные переменные, множеством значений каждой из которых есть множество векторов пространства, размерность которого равна количеству частных критериев с введенным на нем лексикографическим порядком.

Цель исследований, представленных в данной статье, — установление условий разрешимости многокритериальных задач лексикографической оптимизации с неограниченным допустимым множеством и условий оптимальности решений на основе использования свойств рецессивного конуса выпуклого допустимого множества [8], конуса, лексикографически упорядочивающего допустимое множество относительно критериев оптимизации [2] и локальных шатров [9], построенных в граничных точках допустимого множества, а также разработка и обоснование метода нахождения лексикографически оптимальных решений лексикографических задач выпуклой оптимизации на основании идей методов линеаризации и отсекающих плоскостей Келли [10].

Постановка задачи

В критериальном пространстве R^{ℓ} введем бинарное отношение лексикографического порядка между векторами $z=(z_1, z_2,\ldots, z_{\ell})$ и $z'=(z'_1, z'_2,\ldots, z'_{\ell})$ такое, что $z \geq^L z' \Leftrightarrow (z=z') \vee (\exists j \in N_{\ell} : \forall i \in N_{j-1}\, (z_j > z'_j,\, z_i = z'_i))$, где $N_0 = \varnothing$.

Рассмотрим задачу лексикографической оптимизации такого вида:

$$Z_L(F, X): \max{}^L\{F(x) \mid x \in X\},$$

где $F(x) = (f_1(x),\ldots, f_{\ell}(x))$, $\ell \geq 2$, $f_k(x) = \langle c_k, x\rangle$, $c_k \in R^n$, $k \in N_{\ell} = \{1, 2,\ldots, \ell\}$, $X = \{x \in R^n \mid g^i(x) \leq 0,\, x \geq 0,\, i \in N_m\}$, $X \neq \varnothing$, $g^i(x), i \in N_m$, — выпуклые функции.

В задаче лексикографической оптимизации частные критерии упорядочены по важности. При этом возникает понятие лексикографического оптимума.

Определение 1. Вектор x лексикографически предпочтительнее вектора x', если выполняется одно из ℓ условий:

1) $f_1(x) > f_1(x')$;

2) $f_1(x) = f_1(x')$, но $f_2(x) > f_2(x')$;

………………………………………..

ℓ) $f_j(x) = f_j(x')$, $j = 1,\ldots, \ell-1$, но $f_{\ell}(x) > f_{\ell}(x')$.

Определение 2. Вектор x эквивалентен вектору x', если по каждому критерию векторы x и x' имеют одинаковые оценки, при этом $x \neq x'$.

Под решением задачи $Z_L(F, X)$ будем понимать поиск элементов множества $L(F, X)$ лексикографических оптимальных решений, которое зададим таким образом:

$$L(F, X) = \{x \in X \mid \upsilon(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\upsilon(x, F, X) = \{x' \in X \mid \exists j \in N_{\ell} : f_j(x') > f_j(x) \wedge j = \min\{i \in N_{\ell} : f_i(x') \neq f_i(x)\}\}$.

Непосредственно из определения лексикографически оптимальных решений следует, что множество $L(F, X)$ также можно задать с помощью рекуррентных соотношений. Таким образом,

$$L_i(F, X) = \operatorname{Arg\,max}\{f_i(x) : x \in L_{i-1}(F, X), i \in N_{\ell}, \tag{1}$$

где $\operatorname{Arg\,max}\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных решений соответствующей задачи максимизации, $L_0(F, X) = X$, $L_{\ell}(F, X) = L(F, X)$.

Из соотношений (1) следует справедливость включений последовательности множеств

$$X \supseteq L_1(F, X) \supseteq L_2(F, X) \supseteq \ldots \supseteq L_{\ell}(F, X) = L(F, X),$$

т.е. каждый следующий частный критерий сужает множество решений, полученных с учетом всех предыдущих частных критериев.

Как известно [1, 2], множество $L(F, X)$ может быть определено как результат решения последовательности ℓ скалярных задач $Z_{L_i}(F, X), i \in N_\ell$, выпуклого программирования. Итак, задачу $Z_L(F, X)$ можно рассматривать как задачу последовательной оптимизации.

Отметим важные свойства задач $Z_{L_i}(F, X), i \in N_\ell$ [8]: любой локальный минимум (максимум) является глобальным минимумом (максимумом).

Из определения лексикографически оптимального решения задачи следует справедливость таких свойств.

1. Если для допустимого решения $x^0 \in X$ и $\forall x \in X \setminus \{x^0\}$ выполняется неравенство $f_1(x) < f_1(x^0)$, то $x^0 \in L(F, X)$.

2. Если для допустимого решения $x \in X$ $\exists x' \in X \setminus \{x\}$ такой, что $f_1(x') > > f_1(x)$, то $x \notin L(F, X)$.

Согласно [2] введем определение.

Определение 3. Вектор $z \in R^\ell$ называется лексикографически положительным, если первая его ненулевая компонента в порядке возрастания индексов компонент положительна.

Будем обозначать лексикографическую положительность вектора $z \in R^\ell$ как $z >^L 0$, здесь $(>^L)$ — знак отношения лексикографически больше.

Вектор $z \in R^\ell$ лексикографически больше вектора $y \in R^\ell$ $z >^L y$, если вектор $(z - y)$ лексикографически положителен, $(z - y) >^L 0$. При таком упорядочении любые два вектора одной размерности сравниваемы между собой.

Итак, для любых векторов $a, b \in R^\ell$, $a >^L b$, тогда и только тогда, когда существует индекс i, $1 \le i \le \ell$, такой что $a_i > b_i$, и если $i > 1$, то $a_k = b_k$, $k = 1, 2, ..., i-1$. Вектор a лексикографически не меньше вектора b, $a \ge^L b$, если $a >^L b$ или $a = b$, $(\ge^L)$ — знак отношения лексикографически не меньше.

Определение 4. Решение $x^* \in X$ задачи $Z_L(F, X)$ будем называть лексикографически оптимальным, если оно не хуже любого другого допустимого решения $y \in X$ в понимании отношения $\ge^L$, т.е. если $F(x^*) - F(y) \ge^L 0$.

Итак, для произвольного $x \in X$ справедливо утверждение

$$x \in L(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) >^L F(x)\} = \varnothing.$$

В лексикографической задаче оптимизации достигают как угодно малого прироста более важного критерия за счет любых потерь по иным менее важным критериям.

Существование лексикографически оптимальных решений

Разрешимость проблемы поиска лексикографически оптимальных решений на допустимом множестве X и структура множества оптимальных решений зависят от свойств порядка отношения предпочтения, структуры допустимой области X, природы ее элементов, свойств векторной функции $F(x)$ и др. Согласно [2] конечность множества X является достаточным условием существования оптимальных решений лексикографической задачи оптимизации. Также множество $L(F, X)$ не пусто, если множество векторных оценок $Y = \{F(x) \mid x \in X\}$ ограничено и замкнуто. Однако в случае бесконечной допустимой области X множество лексикографически оптимальных решений может быть пустым.

Актуальным является изучение вопросов разрешимости лексикографических задач векторной оптимизации, в которых множество допустимых решений не ограничено и выпукло.

Неограниченность выпуклого множества X означает, что $0^+ X \setminus \{0\} \neq \varnothing$, где $0^+ X = \{y \in R^n \mid \forall x \in X : x + ty \in X, t \geq 0\}$ — рецессивный конус множества X.

Анализ задачи $Z_L(F, X)$ проведем с учетом свойств рецессивного конуса $0^+ X$ [8] и конуса $K^L = \{x \in R^n \mid Cx >^L 0\}$, лексикографически упорядочивающего допустимое множество относительно критериев оптимизации, который назовем также конусом перспективных [11] лексикографических направлений задачи $Z_L(F, X)$, поскольку переход из любой точки $x_1 \in R^n$ в точку $x_2 = x_1 + y$, где y принадлежит конусу K^L, приводит к неравенству $Cx_2 >^L Cx_1$, т.е. к лексикографическому возрастанию значений векторного критерия задачи.

Конус K^L, определяющий лексикографический порядок в пространстве R^ℓ, является выпуклым конусом направлений лексикографически положительных векторов и его можно представить в виде объединения непересекающихся множеств:

$$K^L = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_\ell,$$

где:

$$K_1 = \{x \in R^n \mid c_1 x > 0\},$$

$$K_2 = \{x \in R^n \mid c_1 x = 0, c_2 x > 0\},$$

$$\ldots,$$

$$K_\ell = \{x \in R^n \mid c_1 x = 0, c_2 x = 0, ..., c_{\ell-1} x = 0, c_\ell x > 0\}.$$

Для произвольного $x \in X$ истинно высказывание [2]:

$$x \in L(F, X) \Leftrightarrow (x + K^L) \cap X = \varnothing. \tag{2}$$

Продолжая исследование вопросов существования различных видов оптимальных решений векторных задач оптимизации [12–15], начатое в [2] для лексикографических задач, рассмотрим необходимое и достаточное условия существования лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L(F, X)$.

В случае выпуклого замкнутого неограниченного допустимого множества X задачи $Z_L(F, X)$ справедлива теорема.

Теорема 1. Необходимым условием существования лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L(F, X)$ является пустое пересечение конуса K^L перспективных лексикографических направлений и рецессивного конуса $0^+ X$, т.е.

$$K^L \cap 0^+ X = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим от противного, что множество $L(F, X) \neq \varnothing$, но не выполняется условие (3), т.е. пересечение конусов K^L и $0^+ X$ не пусто: $K^L \bigcap 0^+ X \neq \varnothing$. Тогда $\forall x \in X$ справедливы соотношения:

$$(x + K^L) \bigcap X \supseteq (x + K^L) \bigcap (x + 0^+ X) = x + (K^L \bigcap 0^+ X) \neq \varnothing.$$

Учитывая формулу (2), можно сделать вывод, что множество $L(F, X) = \varnothing$. Но это противоречит условию теоремы и тем самым доказывает ее справедливость.

Обратное утверждение теоремы в общем случае не верно. В [2, с. 113] приведен пример, в котором для допустимого множества X выполнено условие (3), но множество его крайних точек — неограниченно, и в результате множество $L(F, X) = \varnothing$.

Направление лексикографически положительного вектора будем называть лексикографически положительным направлением.

Справедлива теорема [2, с. 113].

Теорема 2. Пусть V — непустое множество крайних точек выпуклого замкнутого множества X. Если V — ограниченное множество, то множество X имеет лексикографический максимум тогда и только тогда, когда оно ограничено по всем лексикографически положительным направлениям.

В наших обозначениях при условиях теоремы 2 множество $L(F, X)$ не пусто тогда и только тогда, когда выполняется условие (3).

В случае выпуклого неограниченного и многогранного множества X справедливо следствие из теоремы 2 [2, с. 114].

Следствие. Замкнутое выпуклое многогранное множество X имеет лексикографический максимум тогда и только тогда, когда оно ограничено по всем лексикографически положительными направлениям.

Из теоремы 1 и следствия из теоремы 2 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть допустимое множество X задачи $Z_L(F, X)$ является замкнутым выпуклым многогранным множеством. Необходимым и достаточным условием существования лексикографически оптимальных решений этой задачи есть выполнения равенства (3).

Заметим, что условие многогранности выпуклого замкнутого неограниченного множества X существенно для утверждения того факта, что (3) — необходимое и достаточное условие существования лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L(F, X)$.

Условия оптимальности решений

Условия оптимальности — существенная составляющая математической теории оптимизации, в том числе векторной. Установление необходимых и достаточных условий оптимальности решений векторных задач — актуальная проблема, поскольку знание таких условий дает основу для разработки способов проверки оптимальности того или иного выбранного решения, а также построения и развития эффективных методов оптимизации в целях нахождения различных множеств оптимальных решений.

Как известно [3, 11–15], если критерии векторной задачи — равноважны, то под решением векторной задачи обычно понимают нахождение некоторого подмножества одного из таких множеств: $P(F, X)$ всех Парето-оптимальных (эффективных) решений, $S\ell(F, X)$ оптимальных по Слейтеру решений. Справедливы утверждения $\forall\, x \in X$:

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\} = \varnothing,$$

$$x \in S\ell(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing.$$

Очевидно, что $L(F, X) \subseteq P(F, X) \subseteq S\ell(F, X)$.

Исходя из теоремы 1 [3, с. 163], в связи с линейностью функций критерия задачи $Z_L(F, X)$ и независимо от структуры допустимого множества X Парето-оптимальные и оптимальные по Слейтеру решения могут составлять все допустимое множество или располагаться лишь на ее границе. Поэтому, учитывая включения $L(F, X) \subseteq P(F, X) \subseteq S\ell(F, X)$ при установлении необходимых и достаточных условий лексикографической оптимальности решений задачи, будем рассматривать лишь граничные точки множества X.

Обозначим $\mathrm{Fr}\, B$ подмножество граничных точек некоторого множества B. Пусть $y \in \mathrm{Fr}\, X$. Введем к рассмотрению такие множества:

$$N(y) = \{i \in N_m \mid g_i(y) = 0\}, \ \ X(y) = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, \ i \in N(y)\}.$$

Кроме того, если, $g_i(x), \ i \in N(y),$ — непрерывно дифференцируемые функции в R^n, определим множество $Q(y) = \{x \in R^n \mid \langle \nabla g_i(y), \ x - y\rangle \leq 0, \ i \in N(y)\},$ где $\nabla g_i(y)$ — градиент функции $f_i(x)$ в точке $y, i \in N(y)$. Очевидно, что $\forall \ y \in \mathrm{Fr}\, X\colon N(y) \neq \varnothing, \ \ y + 0^+ X \subseteq X \subseteq X(y) \subseteq Q(y)$.

Теорема 4. Пусть $y \in \mathrm{Fr}\, X$. Если $g_i(x), i \in N(y),$ — непрерывно дифференцируемые функции, то соотношение

$$K^L \bigcap (Q(y) - y) = \varnothing \tag{4}$$

является достаточным условием для включения $y \in L(C, X)$. Кроме того, если $\{\nabla g_i(y) \mid i \in N(y)\}$ — система линейно независимых векторов, то соотношение

$$K_1 \bigcap (Q(y) - y) = \varnothing \tag{5}$$

является необходимым условием для включения $y \in L(C, X)$.

Доказательство. **Достаточность** условия (4) теоремы становится очевидной, учитывая включение $X \subseteq Q(y)$, а также формулу (2).

Необходимость. Требование линейной независимости векторов $\{\nabla g_i(y) \mid i \in N(y)\}$ приводит к выполнению соотношений: $\mathrm{int}\, Q(y) \neq \varnothing$, $\mathrm{int}\, Q(y) = \mathrm{ri}\, Q(y)$, где $\mathrm{ri}\, B$ — относительная внутренность некоторого множества B.

Пусть $y \in L(C, X)$, т.е. согласно формуле (2)

$$(y + K^L) \bigcap X = \varnothing. \tag{6}$$

Предположим (от противного), что соотношение (5) не выполняется, т.е. $K_1 \bigcap (Q(y) - y) \neq \varnothing$, откуда по следствию 6.3.2 [8] $K_1 \bigcap \mathrm{int}(Q(y) - y) \neq \varnothing$. Учитывая также, что при условиях данной теоремы сумма линейных оболочек конусов K_1 и $(Q(y) - y)$ совпадает с R^n, и согласно теореме 3.4 [16, с. 31] делаем вывод о неотделимости конусов $K_1 \bigcup \{0\}$ и $\mathrm{int}\,(Q(y) - y)$, являющимися локальными шатрами [9, 16] в точке y множеств $(y + K_1) \bigcup \{y\}$ и X соответственно. Кроме того, каждый из этих локальных шатров не является линейным подпространством в R^n, поскольку точка $\{0\} \in R^n$ не принадлежит их внутренностям, а также учитывая теоремы 1.1 и 6.1 из [8]. Тогда согласно теореме 1.3 из [16, с. 204] $((y+K_1)\bigcup\{y\})\bigcap X\setminus\{y\}\neq\varnothing$, что противоречит условию (6) и тем самым доказывает необходимость выполнения соотношения (5) для любой лексикографически оптимальной граничной точки $y \in X$ при условиях теоремы.

Доказательство теоремы завершено.

Метод отсекающих плоскостей решения лексикографических задач выпуклой оптимизации

Поиск решений задачи $Z_L(F, X)$ можно свести к решению последовательности лексикографических задач линейного программирования:

$Z_L(F, X_p)$: $\max^L\{F(x) \mid x \in X_p\}$ на многогранном множестве

$$X_p = \{x \in R^n \mid \langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \le 0, x \ge 0, i \in N_m, j = 0, 1, ..., p\},$$

$$x^j \in R_+^n, \;\; R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i \ge 0, i \in N_n\},$$

содержащем допустимую область X исходной задачи.

Утверждение. Справедливо включение $X \subset X_p$.

Доказательство. Справедливость включения следует непосредственно из построения многогранного множества X_p. Используя свойства выпуклой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ для любых $x, y \in R^n$, справедливо неравенство

$$\langle \nabla h(y), x - y \rangle + h(y) \le h(x). \tag{7}$$

Согласно (7) для некоторого числа $p > 0$ и любых $x^j \in R_+^n$, $j = 1, ..., p$, можно записать

$$\langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \le g^i(x), \;\; i \in N_m, \;\; j = 0, 1, ..., p. \tag{8}$$

Поскольку для произвольного $x \in X$ выполняются неравенства $g^i(x) \le 0$, $i \in N_m$, то из соотношения (8) следует выполнение неравенств

$$\langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \rangle + g^i(x^j) \le 0, \;\; i \in N_m, \;\; j = 0, 1, ..., p, \tag{9}$$

т.е. $x \in X_p$, что и требовалось доказать.

Теорема 4 [2, с. 190]. Если векторная функция F достигает на множестве X_p лексикографического максимума, то среди точек этого максимума есть крайняя точка множества X_p.

Из теоремы 4 следует, что для решения задачи $Z_L(F, X_p)$ можно использовать симплексный алгоритм как алгоритм направленного перебора крайних точек множества X_p.

Нахождение лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L(F, X_p)$ будем осуществлять прямым (лексикографическим) поиском [2], который сводит-

 ISSN 0572-2691

ся к решению задач максимизации $Z(f_s, X_p): \max\{f_s(x) \mid x \in X_p\}, s \in N_\ell,$ в каждой из которых максимизируется соответствующая функция лексикографически упорядоченного векторного критерия. Основная идея предложенного метода состоит в следующем. Если оптимальное решение задачи $Z(f_s, X_p)$ недопустимо в задаче $Z_L(F, X),$ то оно исключается из последующего рассмотрения добавлением нового линейного ограничения к ограничениям задачи $Z(f_s, X_p).$ Таким образом, это ограничение отсекает недопустимое решение, а также часть недопустимой области задачи $Z_L(F, X)$ из всех последующих рассмотрений. Все добавленные ограничения являются правильными отсекающими плоскостями, т.е. такими, которые не отсекают никакую часть допустимой области выпуклой задачи $Z_L(F, X).$ Если оптимальное решение задачи $Z(f_s, X_p)$ принадлежит множеству X, и оно единственное оптимальное решение на этом множестве, то найденное решение лексикографически оптимально для задачи $Z_L(F, X).$

Алгоритм решения задачи $Z_L(F, X)$

Нулевой шаг. Пусть $s = 1,$ $k = 0.$ Выбираем произвольную точку $x^k \in \mathrm{Fr}\, G.$ Строим многогранник $X_k = \{x \in R^n \mid \langle \nabla g^i(x^k), x - x^k \rangle + g^i(x^k) \le 0, x \ge 0, i \in N_m\}.$

1. Решаем задачу

$$\max\{f_s(x) \mid x \in X_k\} \tag{10}$$

двойственным симплекс алгоритмом [2]. Пусть $x^{k+1} = \arg\max\{f_s(x) \mid x \in X_k\}.$ Если $x^{k+1} \in X$ и x^{k+1} — единственное оптимальное решение на допустимом множестве X, то $x^{k+1} = \arg\max^L\{F(x) \mid x \in X\},$ поскольку $X \subseteq X_k.$ Задача $Z_L(F, X)$ решена.

2. Если $x^{k+1} \in X$ и x^{k+1} — неединственное оптимальное решение на допустимом множестве X, полагаем $\bar{f}_s = f_s(x^{k+1}),$ $s = s+1,$ $X_{k+1} = \{x \in X_k \mid f_i(x) = \bar{f}_i, i = 1, 2, ..., s-1\}$ и переходим к п. 1.

Если $x^{k+1} \notin X,$ переходим к п. 3.

3. Определяем множество $I_{k+1} = \{i \mid g^i(x^{k+1}) > 0\}$ индексов ограничений задачи $Z_L(F, X),$ которые нарушаются в точке $x^{k+1}.$ Строим многогранник $X_{k+1},$ добавляя к ограничениям, описывающим множество $X_k,$ неравенство $\langle \nabla g^i(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + g^i(x^{k+1}) \le 0,$ $i \in N_{k+1} = \{j \in I_{k+1} \mid g^j(x^{k+1}) = \max_{i \in I_{k+1}} g^i(x^{k+1})\}.$

Получаем новое многогранное множество $X_{k+1} = \{x \in X_k \mid \langle \nabla g^i(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + g^i(x^{k+1}) \le 0, i \in N_{k+1}\},$ переходим к п. 1, полагая $k = k+1.$

Для решения вспомогательных задач линейной оптимизации вида (10) целесообразно применять двойственный симплекс-метод [2], который позволяет использовать полученное на предыдущем шаге решение как базисное для обновленной допустимой области.

Сходимость алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема 5. Если функции $g^i(x)$, $i \in N_m$, — выпуклые, непрерывно дифференцируемые и задача $Z_L(F, X)$ имеет конечное оптимальное решение, то последовательность точек, порождаемая данным алгоритмом, сходится к лексикографически оптимальному решению задачи $Z_L(F, X)$.

Доказательство. Если задача $Z_L(F, X)$ имеет конечное лексикографически оптимальное решение, то, начиная с некоторого номера p_0, последовательность точек $\{x^p\}$ содержится в ограниченном множестве. Пусть $\{x^k\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^p\}$, которая сходится к точке x^*. Рассмотрим подпоследовательность $\{x^t\}$ точек, для которых отсекающая гиперплоскость порождена относительно i-го ограничения вида (9). Если на каждой итерации добавлять гиперплоскость относительно сильнейшего (наиболее нарушенного) ограничения, то, начиная с некоторого номера $k \geq k_0$, выполнится ограничение $g^i(x^k) \leq 0$, т.е. x^k принадлежит множеству допустимых решений или подпоследовательность $\{x^t\}$ бесконечна. В случае, когда подпоследовательность $\{x^t\}$ бесконечна, для каждого $t' > t$ выполняется неравенство $\langle \nabla g^i(x^t), x^{t'} - x^t \rangle +$ $+ g^i(x^t) \leq 0$, откуда, следуя неравенству Коши–Буняковского, получаем $g^i(x^t) \leq$ $\leq \| \nabla g^i(x^t) \| \| x^{t'} - x^t \|$. Учитывая, что $\| x^{t'} - x^t \| \to 0$, $\| \nabla g^i(x^t) \| \to \| \nabla g^i(x^*) \|$, из последнего неравенства следует $g^i(x^t) \to g^i(x^*) \leq 0$, т.е. x^* — допустимое решение. С другой стороны, если $\bar{x}$ — оптимальное решение задачи $Z_L(F, X)$, то на каждой итерации алгоритма справедливо неравенство $F(x^t) \geq^L F(\bar{x})$, откуда при предельном переходе имеем $F(x^*) \geq^L F(\bar{x})$. Следовательно, x^* — лексикографически оптимальное решение задачи $Z_L(F, X)$.

Теорема доказана.

Построение последовательности $\{x^k\}$ в предложенном методе осуществляется таким образом, что каждая из точек x^k недопустима для исходной задачи. Поэтому процесс вычисления нельзя останавливать даже при довольно больших значениях s, это возможно лишь тогда, когда получим допустимую точку. Сходимость к лексикографически оптимальному решению алгоритмом гарантируется в том случае, когда допустимое множество выпуклое.

Заключение

Исследованы вопросы существования и оптимальности решений выпуклых задач лексикографической оптимизации с линейными функциями критериев и неограниченном допустимом множестве. На основе проведенного анализа указанных задач с учетом свойств конусов перспективных лексикографических направлений, рецессивных направлений и локальных шатров в граничных точках допустимого множества установлены необходимые и достаточные условия существования и лексикографической оптимальности решений исследованных задач. Полученные условия можно успешно использовать при разработке алгоритмов поиска оптимальных решений указанных задач лексикографической оптимизации. На основе идей методов линеаризации и отсекающих плоскостей Келли построен и обоснован метод нахождения лексикографически оптимальных решений выпуклых лексикографических задач.

ISSN 0572-2691

Н.В. Семенова, М.М. Ломага, В.В. Семенов

ЛЕКСИКОГРАФІЧНІ ЗАДАЧІ ОПУКЛОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: УМОВИ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ТА ОПТИМАЛЬНОСТІ, МЕТОД ВІДСІКАЮЧИХ ПЛОЩИН

Лексикографічний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач полягає в строгому ранжируванні критеріїв за відносною важливістю і дозволяє домогтися оптимізації більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за всіма іншими менш важливими критеріями. Найчастіше такі багатокритеріальні задачі виникають при послідовному введенні додаткових критеріїв у звичайні скалярні задачі оптимізації, які можуть мати не єдиний розв'язок. Задачі лексикографічної оптимізації виникають також при моделюванні ієрархічних структур, у стохастичному програмуванні, при розв'язанні деяких задач динамічного характеру тощо. В даній статті отримано умови існування розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою опуклою допустимою множиною та умови оптимальності розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно упорядковує допустиму множину щодо критеріїв оптимізації, та локальних шатрів, побудованих у граничних точках допустимої множини. Наведено властивості лексикографічно оптимальних розв'язків Отримані умови та властивості можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації. На основі ідей методів лінеаризації та відсікаючих площин Келлі побудовано та обґрунтовано метод знаходження лексикографічно оптимальних розв'язків опуклих задач лексикографічної оптимізації.

Ключові слова: лексикографічна оптимізація, векторний критерій, існування розв'язків, умови оптимальності, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, метод відсікаючих площин Келлі.

N.V. Semenova, M.M. Lomaha, V.V. Semenov

LEXICOGRAPHIC PROBLEMS OF CONVEX OPTIMIZATION: SOLVABILITY AND OPTIMALITY CONDITIONS, CUTTING PLANE METHOD

The lexicographic approach for solving multicriteria problems consists in with respect to the strict ordering of criteria concerning relative importance and allows to obtain optimization of more important criterion due to any losses of all another, to the criteria of less importance. Hence, a lot of problems including the ones of complex system optimization, of stochastic programming under risk, of dynamic character, etc. may be presented in the form of lexicographic problems of optimization. We have revealed conditions of existence and optimality of solutions of multicriteria problems of lexicographic optimization with an unbounded convex set of feasible solutions on the basis of applying properties of a recession cone of a convex feasible set, the cone which puts in order lexicographically a feasible set with respect to optimization criteria and local tent built at the boundary points of the feasible set. The properties of lexicographic optimal solutions are described. Received conditions and properties may be successfully used while developing algorithms for finding optimal solutions of mentioned problems of lexicographic optimization. A method of finding lexicographic of optimal solutions of convex lexicographic problems is built and grounded on the basis of ideas of method of linearization and Kelley cutting-plane method.

Keywords: lexicographic optimization, vector criterion, existence of solutions, optimality conditions, Pareto-optimal solutions, set of Slater, cutting plane method.

1. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М. : Сов. радио, 1975. 192 с.
2. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М. : Физматлит, 2007. 256 с.
4. Ломага М.М., Семенов В.В. Квадратичные задачи лексикографической оптимизации: свойства и решения. *Компьютерная математика.* 2013. № 2. С. 134−143.
5. Семенова Н.В., Ломага М.М., Семенов В.В. Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев. *International Journal «Information Theories and Applications».* 2014. **21**, N 3. P. 254−262.
6. Ломага М.М. Розв'язання задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на опуклій множині. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2015. № 2 (27). С. 66−72.
7. Ломага М.М., Семенова Н.В. Квадратичні лексикографічні задачі оптимізації і відображення Лагранжа. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2019. № 2 (35). С. 127−133.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 470 с.
9. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач. *Успехи математических наук*. 1975. **30**, № 3(183). С. 3–55.
10. Kelley I.E. The cutting plane method for solving convex programs. *SIAM J.* 1960. **8**. P. 703–712.
11. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев : Наук. думка, 1995. 171 с.
12. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 1997. № 1. С. 3–10.
13. Sergienko I.V., Lebedeva T.T. & Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. **36**, N 6. P. 823-828.
14. Сергієнко Т.І. Про існування парето-оптимальних розв'язків задачі векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю. *Доповіді НАН України.* 2015. № 10. С. 27−31.
15. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною. *Доповіді НАН України.* 2003. № 10. С. 80–85.
16. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

Получено 10.11.2020