УДК 517.977

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, А.А. Чикрий

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Ключевые слова: дифференциальная игра, стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито, запаздывание, гильбертово пространство, винеровский процесс, генератор аналитической полугруппы, многозначное отображение, разрешающая функция, стохастическое уравнение в частных производных, стохастическое уравнение теплопроводности с запаздыванием.

Введение

Стохастическим дифференциальным играм посвящена обширная литература. Ограничимся упоминанием книг [1, 2], где можно найти обзор по данной теме, а также нескольких последних статей [3, 4]. Эти игры изучаются в сосредоточенных системах, динамика которых описывается уравнениями в конечномерных пространствах. Относительно стохастических дифференциальных игр в распределенных системах, динамика которых описывается стохастическими уравнениями в частных производных или стохастическими дифференциальными уравнениями в бесконечномерных пространствах, отсылаем к работам [5, 6]. Дифференциальные игры в стохастических системах с запаздыванием в конечномерных пространствах изучались в [7, 8] (см. также библиографию в этих работах). Многочисленные приложения в радиофизике, газовой динамике, теории упругости и т.д. стимулируют развитие теории систем с запаздыванием, которые описываются уравнениями в частных производных или более общими функционально-дифференциальными уравнениями в гильбертовых и банаховых пространствах. Настоящая статья посвящена дифференциальной игре сближения в системе, эволюция которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением с запаздыванием в гильбертовом пространстве. В разд. 1 получаем формулу вариации постоянных, чтобы описать состояния системы. С помощью метода разрешающих функций [9, 10] и его модификации на случай гильбертовых пространств для стохастических систем [6] и систем с запаздыванием [11] в разд. 2 исследуем дифференциальную игру. В разд. 3, используя результаты предыдущих разделов, рассматриваем приложения к системам, описываемым стохастическими уравнениями в частных производных с запаздыванием. В частности, с учетом случайного внешнего воздействия и запаздывания по времени изучается процесс распространения тепла с управляемыми распределенными тепловыми источником и утечкой.

* Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда исследований Украины. Грант № 2020.02/0121.

Используем следующую систему обозначений: Y, U, V, H — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, $\|\cdot\|_Y$, $<\cdot,\cdot>_Y$ — норма и скалярное произведение в пространстве Y; $[U, Y]$ — пространство ограниченных линейных операторов из U в Y, $[Y, Y]=[Y]$; E — единичный оператор; $\mathrm{Ker}A$ — ядро оператора A; $\mathrm{Im}A$ — образ оператора A; A^* — сопряженный оператор к оператору A; $\Delta=\{(t,\tau): 0\le\tau\le t\le T\}$ — треугольник на плоскости; $L_2(0,\pi)$ — пространство суммируемых с квадратом на $[0,\pi]$ вещественных скалярных функций; $W_2^n(0,\pi)$ — пространство Соболева порядка n функций из $L_2(0,\pi)$; $\{\Omega, F, P\}$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством σ-алгебр (потоком или фильтрацией) $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ ($F_\tau\subseteq F_t\subseteq F$, $(t,\tau)\in\Delta$); $\mathbf{M}$ — математическое ожидание относительно вероятностной меры P; $H_2(\Omega; Y)=H_2$ — гильбертово пространство Y-значных случайных величин $\xi=\xi(\omega)$, которые имеют конечный абсолютный момент второго порядка $\mathbf{M}\|\xi\|_Y^2<\infty$, со скалярным произведением $<\xi_1,\xi_2>_{H_2}=\mathbf{M}<\xi_1,\xi_2>_Y$; если F_0 — σ-подалгебра σ-алгебры F, то $H_2(\Omega; Y; F_0)$ — подпространство пространства H_2, состоящее из F_0-измеримых случайных величин; $w(t)$ — H-значный винеровский процесс, выходящий из нуля и согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{0\le t\le T}$, с ядерным симметричным положительным ковариационным оператором Q; $\mathrm{tr}Q$ — след оператора Q; $L_2(0,T;\Omega;Y)=L_{2,\Omega,Y}$ — гильбертово пространство Y-значных измеримых случайных процессов $y(t,\omega)$, $0\le t\le T$, $\omega\in\Omega$, удовлетворяющих условию $\int_0^T \mathbf{M}\|y(t,\omega)\|_Y^2\,dt<\infty$, со скалярным произведением $<y_1,y_2>_{L_{2,\Omega,Y}}=$ $=\int_0^T \mathbf{M}<y_1(t),y_2(t)>_Y\,dt$; $L_2(0,T;\Omega;Y;F_t)=L_{2,\Omega,Y,F_t}$ — подпространство пространства $L_{2,\Omega,Y}$, состоящее из неупреждающих случайных процессов, т.е. измеримых и согласованных с потоком $\{F_t\}_{0\le t\le T}$. В дальнейшем будут рассматриваться только измеримые случайные процессы. Имеем $\mathbf{M}w(t)=0$, $\mathbf{M}\|w(t,\omega)\|_H^2=\mathrm{trQ}\cdot t$. О теории стохастических уравнений в смысле Ито в сепарабельных гильбертовых пространствах см. [12, 13].

Напомним, что в сепарабельном пространстве понятия сильной и слабой измеримости эквивалентны; выпуклое замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно [14].

1. Описание состояний системы

Рассмотрим систему управления с распределенными параметрами, которая описывается следующим стохастическим (в смысле Ито) дифференциальным уравнением с запаздыванием:

$$dy(t)=[Ay(t)+By(t-r)+K_1u(t)-K_2v(t)]dt+\Lambda dw(t),\ \ 0\le t\le T. \qquad (1)$$

Здесь A — замкнутый линейный оператор в Y с плотной областью определения D_A; $B\in[Y]$, $K_1\in[U,Y]$, $K_2\in[V,Y]$, $\Lambda\in[H,Y]$; запаздывание $r>0$; $u(t,\omega)\in L_{2,\Omega,U,F_t}$ — управление преследователя; $v(t,\omega)\in L_{2,\Omega,V,F_t}$ — управление убегающего. Стохастическое дифференциальное уравнение (1) можно записать с помощью обобщенных производных в виде

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-r) + K_1 u(t) - K_2 v(t) + \Lambda w'(t),\ 0 \le t \le T,$$

где $w'(t)$ — обобщенная производная H-значного винеровского процесса, т.е. «белый шум».

Для уравнения (1) ставим начальные условия

$$y(t, \omega) = g(t, \omega),\ \text{ï.â.}\ t \in [-r, 0],\ \omega \in \Omega, \tag{2}$$

$$y(+0, \omega) = \xi(\omega),\ \text{ï.â.}\ \omega \in \Omega, \tag{3}$$

где $g(t, \omega) \in L_2(-r, 0; \Omega; Y)$ и при $-r \le t \le \min\{0, T-r\}$ случайный элемент $g(t, \omega)$ является F_{t+r}-измеримым; $\xi(\omega) \in H_2(\Omega; Y; F_0)$. Начальная задача (1)–(3) исследовалась в [4]. Как и в [4], здесь также не предполагается непрерывная стыковка начальных условий (2), (3) в момент времени 0: вообще говоря, $g(0, \omega) \ne \xi(\omega)$. Случайный процесс $y(t) \in L_2(0, T; \Omega; Y; F_t)$ назовем решением задачи (1)–(3), если $y(t, \omega) \in D_A$ для почти всех $t \in [0, T],\ \omega \in \Omega$, $Ay(t) \in$ $\in L_2(0, T; \Omega; Y; F_t)$ и выполняется равенство

$$y(t) - \xi = \int_0^t Ay(\tau) d\tau = \int_0^t [By(\tau - r) + K_1 u(\tau) - K_2 v(\tau)] d\tau + \Lambda w(t)$$

для почти всех $t \in [0, T], \omega \in \Omega$. Если $y(t, \omega)$ — решение задачи (1)–(3), то случайный процесс $y(t, \omega)$ с вероятностью единица имеет непрерывную модификацию, которую рассмотрим ниже.

Чтобы изучить дифференциальную игру в системе (1)–(3), потребуется описание ее состояний при различных управлениях преследователя и убегающего. Опишем решения начальной задачи (1)–(3) с помощью формулы вариации постоянных. Основное предположение состоит в ограничении на оператор A в уравнении (1): в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge c_1$ существует резольвента $R_A(\lambda) =$ $= (A - \lambda E)^{-1} \in [Y]$ и справедлива следующая оценка:

$$\| R_A(\lambda) \| \le \frac{c_2}{1 + |\lambda|},\ \operatorname{Re}\lambda \ge c_1, \tag{4}$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$. Тогда оператор A — генератор аналитической полугруппы S_t в $[Y]$.

Пусть N — наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее неравенству $T \le Nr$. Для $k = 0, ..., N-1$ введем в рассмотрение оператор-функции $W_k(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$, которые принимают значения в пространстве ограниченных линейных операторов $[Y]$. Пусть

$$W_0(t, \tau) = S_{t-\tau},\ (t, \tau) \in \Delta. \tag{5}$$

Если $N > 1$, то оператор-функции $W_k(t, \tau)$, $k = 1, ..., N-1$, при $0 \le \tau \le t - kr \le T - kr$ вычисляются по формулам

$$W_k(t, \tau) = \int_{\tau + r}^{t-(k-1)r} W_{k-1}(t, \vartheta) B S_{\vartheta - \tau - r} d\vartheta,\ 0 \le \tau \le t - kr \le T - kr. \tag{6}$$

Здесь интегралы понимаются в сильной операторной топологии. Для остальных $(t,\tau)\in\Delta$ значения оператор-функций $W_k(t,\tau)$ полагаем равными нулю:

$$W_k(t,\tau)=0,\ \ t-kr<\tau\le t\le T,\ \ \tau\ge 0. \tag{7}$$

Обозначим

$$W(t,\tau)=\sum_{k=0}^{N-1}W_k(t,\tau),\ \ (t,\tau)\in\Delta\,. \tag{8}$$

Также введем в рассмотрение операторы $L, F\in[L_{2,\Omega,Y,F_t}]$ и случайные процессы $y_0(t,\omega),\psi(t,\omega)\in L_{2,\,\Omega,\,Y,\,F_t}$:

$$\begin{gathered}(Lz)(t)=\int_0^t S_{t-\tau}z(\tau)d\tau,\ \ (Fz)(t)=\begin{cases}z(t-r), & r_0\le t\le T\\ 0, & 0\le t<r_0\end{cases},\ \ r_0=\min\{r,T\},\\ \psi(t,\omega)=S_t\xi(\omega)+\int_0^t S_{t-\tau}\Lambda dw(\tau),\ \ y_0(t,\omega)=\begin{cases}g(t-r,\omega), & 0\le t<r_0,\\ 0, & r_0\le t\le T.\end{cases}\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь интеграл $\int_0^t S_{t-\tau}\Lambda dw(\tau)$ понимается в смысле интеграла Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве по винеровскому процессу $w(t)$ от оператор-функции $S_{t-\tau}\Lambda$. Через операторы L, F и векторы ψ, y_0 в (9) определим случайный процесс

$$\zeta=\sum_{k=0}^{N-1}(LBF)^k(\psi+LBy_0)\in L_2(0,T;\Omega;Y;F_t)\,. \tag{10}$$

Теорема 1. Пусть справедлива оценка (4); $\mathrm{Im}B\subset D_A$, $\mathrm{Im}K_1\subset D_A$, $\mathrm{Im}K_2\subset D_A$ $\mathrm{Im}\Lambda\subset D_A$; значения случайной величины $\xi(\omega)\in H_2(\Omega;Y;F_0)$ принадлежат D_A P-п.н.; $g(t,\omega)\in L_2(-r,0;\Omega;Y)$ и случайный элемент $g(t,\omega)$ является F_{t+r}-измеримым; $u(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;U;F_t)$, $v(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;V;F_t)$. Тогда задача (1)–(3) с точностью до стохастической эквивалентности имеет единственное решение $y(t,\omega)$, которое допускает представление

$$y(t)=y(t;u,v)=\zeta(t)+\int_0^t W(t,\tau)[K_1u(\tau)-K_2v(\tau)]d\tau,\ \ 0\le t\le T\,, \tag{11}$$

где случайный процесс $\zeta(t)$ определен в (10).

Доказательство. Результат о разрешимости начальной задачи (1)–(3) следует из леммы 1 в [15]. Эта лемма получена для более общих уравнений, чем уравнение (1), а именно для уравнений типа Соболева, которые не являются разрешенными относительно стохастического дифференциала $dy(t)$. Чтобы получить утверждение теоремы о существовании единственного решения начальной задачи (1)–(3), необходимо в лемме 1 из [15] оператор при стохастическом дифференциале положить равным единичному.

Убедимся в справедливости формулы (11). Согласно лемме 1 из [15] в обозначениях (9) решение y начальной задачи (1)–(3) как элемент пространства $L_2(0,T;\Omega;Y;F_t)$ допускает представление

$$y=\sum_{k=0}^{N-1}(LBF)^k\{\psi+L[By_0+K_1u-K_2v]\}\,. \tag{12}$$

С использованием определения случайного процесса $\zeta \in L_2(0, T; \Omega; Y; F_t)$ (10) формула (12) принимает вид

$$y = \zeta + \sum_{k=0}^{N-1} L_k (K_1 u - K_2 v), \;\; L_k = (LBF)^k L \in [L_{\,2,\,\Omega,\,Y,\,F_t}]. \tag{13}$$

Непосредственные вычисления согласно определению операторов L, F в (9) показывают, что справедливы следующие представления для операторов $L_k \in [L_{\,2,\,\Omega,\,Y,\,F_t}]$ в (13):

$$(L_k z)(t) = \int_0^t W_k(t, \tau)\, z(\tau) d\tau, \;\; k = 0, ..., N-1,$$

где оператор-функции $W_k(t, \tau)$, $0 \le \tau \le t \le T$, вычисляются по формулам (5)–(7). Учитывая обозначение (8), решение системы (1)–(3), представленное в форме (13), можно записать в виде (11).

Теорема доказана.

2. Постановка задачи. Условия разрешимости дифференциальной игры

Подобно игре в распределенной стохастической системе без запаздывания из работы [6] поставим цель игры в стохастической системе (1)–(3). Множествами допустимых управлений U_1 и V_1 соответственно преследователя и убегающего являются случайные процессы $u(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; U; F_t)$ и $v(t, \omega) \in L_2(0, T; \Omega; V; F_t)$, принимающие значения из областей управления $U_0 \subset H_2(\Omega; U)$ и $V_0 \subset H_2(\Omega; V)$. Предполагаем, что U_0 и V_0 — замкнутые ограниченные выпуклые множества в пространствах случайных величин $H_2(\Omega; U)$ и $H_2(\Omega; V)$. Тогда множества допустимых управлений U_1 и V_1 есть замкнутые ограниченные выпуклые множества в $L_2(0, T; \Omega; U; F_t)$ и $L_2(0, T; \Omega; V; F_t)$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что выполнены условия теоремы 1. Тогда для допустимых управлений преследователя $u(t)$ и убегающего $v(t)$ состояние системы $y(t) = y(t; u, v)$ определяется однозначно по формуле (12). Цилиндрическое терминальное множество M зададим в пространстве $H_2(\Omega; Y)$ случайных величин как ортогональную сумму

$$M = M_0 \oplus M_1 \tag{14}$$

замкнутого линейного подпространства M_0 в $H_2(\Omega; Y)$ и замкнутого шара M_1 из ортогонального дополнения $M_0^{\perp}$ к M_0 с центром в нуле и радиусом d. Если $d = 0$, то $M_1 = \{0\}$. Игру в системе (1)–(3) можно завершить за время T_0, не превосходящее T, если для любого допустимого управления убегающего $v(t) \in V_1$ найдется допустимое управление преследователя $u(t) \in U_1$, для которого состояние системы может быть приведено на терминальное множество M (14) в момент T_0.

Если $\Pi \in [H_2(\Omega; Y)]$ — ортопроектор в $H_2(\Omega; Y)$ на $M_0^{\perp}$, то завершение игры в момент времени T_0 при допустимых управлениях $u(t)$, $v(t)$ означает выполнение неравенства $\| \Pi y(T_0; u, v)\|_{H_2} \le d$. Как и для стохастической системы в [6], для завершения игры в системе (1)–(3) с терминальным множеством M (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_{v\in V_1} \inf_{u\in U_1} \| \Pi y(T_0; u, v)\|_{H_2} \le d.$$

Распространим метод разрешающих функций [9,10] на случай дифференциальной игры с терминальным множеством M (14) в стохастической системе с запаздыванием (1)–(3). Рассмотрим два многозначных отображения:

$$\Re(t, \tau, v) = \Pi W(t, \tau)(K_1 U_0 - K_2 v),\ (t, \tau, v) \in \Delta\times V_0\ , \tag{15}$$

с образами в $H_2(\Omega; Y)$ и

$$\Im(t, \tau, v) = \{\tilde{\alpha} \ge 0 : \Re(t, \tau, v) \cap \tilde{\alpha}[M_1 - \Pi\zeta(t)] \ne \emptyset\},\ (t, \tau, v) \in \Delta\times V_0, \tag{16}$$

с образами в $\mathbf{R}^1$. Отображение (15) имеет ограниченные и выпуклые образы. Из слабой компактности выпуклого замкнутого ограниченного множества U_0 в гильбертовом пространстве $H_2(\Omega, U)$ следует замкнутость образов многозначного отображения $\Re$ (15). Пусть $0 \in \Re(t, \tau, v)$ для всех $(t, \tau, v) \in \Delta\times V_0$. Тогда многозначное отображение (16) имеет непустые образы. Замкнутость образов является следствием слабой компактности множества M_1 и образов отображения $\Re$. Если $\Pi\zeta(t) \in M_1$, то $\Im(t, \tau, v) = [0, \infty)$. Если $\Pi\zeta(t) \notin M_1$, то для данного t образы $\Im(t, \tau, v)$ ограничены.

Следуя методу разрешающих функций [9, 10], введем в рассмотрение опорный функционал многозначного отображения $\Im(t, \tau, v)$ (16): $f_{\Im}(h) = \sup_{\tilde{\alpha}\in\Im} \tilde{\alpha} h$. Значение этого функционала на элементе $h = 1$, т.е.

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\tilde{\alpha} \ge 0 : \Re(t, \tau, v) \cap \tilde{\alpha}[M_1 - \Pi\zeta(t)] \ne \emptyset,\ (t, \tau, v) \in \Delta\times V_0\}, \tag{17}$$

является разрешающей функцией или разрешающим функционалом. Если $\| \Pi\zeta(t)\|_{H_2} \le d$, т.е. $\Pi\zeta(t) \in M_1$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$ при всех $(\tau, v) \in [0, t]\times V_1$. Если $\| \Pi\zeta(t)\|_{H_2} > d$, т.е. $\Pi\zeta(t) \notin M_1$, то разрешающий функционал ограничен, а в силу компактности образов $\Im(t, \tau, v)$ (16) точная верхняя грань в (17) достигается. В этом случае будем предполагать, что функция $\alpha(t, \tau, v(\tau))$ измерима по $\tau \in [0, t]$ для всех случайных процессов $v \in V_1$. С помощью разрешающего функционала определим множество Θ моментов времени, на которых может завершаться игра:

$$\begin{gathered}\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2,\ \ \Theta_1 = \{t \in [0, T] : \Pi\zeta(t) \in M_1\},\\ \Theta_2 = \{t \in [0, T] : \Pi\zeta(t) \notin M_1 \wedge \inf_{v\in V_1} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau))d\tau \ge 1\}.\end{gathered} \tag{18}$$

Если множество Θ (18) не является пустым и $T_0 \in \Theta$, то рассмотрим многозначные отображения $G_1(\tau, v)$, $G_2(\tau, v)$ из $[0, T_0]\times V_0$ в $H_2(\Omega; U)$:

$$\begin{gathered}G_1(\tau, v) = \{u \in U_0 : \Pi W(T_0, \tau)(K_1 U_0 - K_2 v) = 0\},\\ G_2(\tau, v) = \{u \in U_0 : \Pi W(T_0, \tau)(K_1 U_0 - K_2 v) \in \alpha(T_0, \tau, v)[M_1 - \Pi\zeta(T_0)]\}.\end{gathered} \tag{19}$$

 ISSN 0572-2691

Пусть $v(\tau)$ — произвольное допустимое управление убегающего. В случае $\Pi\zeta(T_0) \in M_1$ управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, T_0]$ положим равным селектору $\gamma_1(\tau) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя состояние системы (1)–(3) будет приведено на терминальное множество M (14) в момент T_0 при любых допустимых управлениях убегающего. Действительно, в силу представления (11) имеем $\Pi y(T_0) = \Pi\zeta(T_0) \in M_1$, откуда $y(T_0) \in M$.

Если $\Pi\zeta(T_0) \notin M_1$, то находим момент времени $t_* \in (0, T_0]$ такой, что

$$\int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau)) d\tau = 1. \tag{20}$$

Управление преследователя $u(\tau)$ на промежутке $[0, t_*)$ положим равным селектору $\gamma_2(\tau) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$ многозначного отображения $G_2(\tau, v(\tau))$, а на промежутке $[t_*, T_0]$ положим равным селектору $\gamma_1(\tau) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$ многозначного отображения $G_1(\tau, v(\tau))$. При таком выборе управления преследователя состояние системы (1)–(3) будет приведено на терминальное множество M (14) в момент T_0. Действительно, с использованием представления (11) запишем соотношения

$$\Pi y(T_0) = \Pi\zeta(T_0) + \int_0^{t_*} \Pi W(T_0, \tau)[K_1\gamma_2(\tau) - K_2 v(\tau)] d\tau + \int_{t_*}^{T_0} \Pi W(T_0, \tau)[K_1\gamma_1(\tau) -$$

$$- K_2 v(\tau)] d\tau = \Pi\zeta(T_0) + \int_0^{t_*} \Pi W(T_0, \tau)[K_1\gamma_2(\tau) - K_2 v(\tau)] d\tau \in \Pi\zeta(T_0) +$$

$$+ \int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau))[M_1 - \Pi\zeta(T_0)] d\tau = \int_0^{t_*} \alpha(T_0, \tau, v(\tau)) M_1 d\tau \subset M_1,$$

где интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Ауманна как множество интегралов от интегрируемых селекторов. Так как $\Pi y(T_0) \in M_1$, то $y(T_0) \in M$.

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемой системы (1)–(3) с терминальным множеством M (14) выполняются следующие предположения:

• справедлива оценка (4); $\mathrm{Im} B \subset D_A$, $\mathrm{Im} K_1 \subset D_A$, $\mathrm{Im} K_2 \subset D_A$ $\mathrm{Im} \Lambda \subset D_A$;

• случайная величина $\xi(\omega) \in H_2(\Omega; Y; F_0)$ принимает значения в D_A;

• для случайного процесса $g(t, \omega) \in L_2(-r, 0; \Omega; Y)$ при каждом t случайный элемент $g(t, \cdot)$ является F_{t+r}-измеримым;

• 0 принадлежит образам многозначного отображения $\mathfrak{R}(t, \tau, v)$ (15) для всех $(t, \tau, v) \in \Delta \times V_0$;

• если значение случайного процесса $\zeta(t)$ (10) в момент времени t не принадлежит терминальному множеству M, то для всех $v(\tau) \in V_1$ и разрешающей функции α (17) функция $\alpha(t, \tau, v(\tau))$ является измеримой по $\tau \in [0, t]$;

• множество Θ (18) не является пустым; для всех $v(\tau) \in V_1$ многозначные отображения $G_1(\tau, v(\tau)), G_2(\tau, v(\tau))$, где G_1, G_2 определены в (19), имеют селекторы $\gamma_1(\tau) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$ и $\gamma_2(\tau) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$.

Тогда состояние $y(t)$ системы (1)–(3) может быть приведено на терминальное множество M в момент времени $T_0 \in \Theta$ (18).

3. Стохастический конфликтно-управляемый процесс теплопроводности с запаздыванием

Исследуем процесс распространения тепла в стационарной однородной среде с распределенными тепловыми источником и утечкой с учетом запаздывания, как в [11], и случайного внешнего воздействия, как в [6]. В области $[0, T] \times [0, \pi]$ рассматриваем стохастическое дифференциальное уравнение

$$dy(t, x, \omega) = \left[\frac{\partial^2 y(t, x, \omega)}{\partial x^2} + By(t - r, x, \omega) + K(u(t, x, \omega) - v(t, x, \omega)) \right] dt + \\ + \Lambda dw(t, x, \omega) \tag{21}$$

с граничными и начальными условиями

$$y(t, 0, \omega) = y(t, \pi, \omega) = 0, \ \ t \in [0, T], \tag{22}$$

$$y(t, x, \omega) = g(t, x, \omega), \ \ y(+0, x, \omega) = \xi(x, \omega), \ \ t \in [-r, 0] \ \ x \in [0, \pi]. \tag{23}$$

Здесь $w(t, x, \omega)$ — винеровский процесс со значениями в пространстве $L_2(0, \pi)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}_{0 \le t \le T}$, вложенных в F, где $\{\Omega, F, P\}$ — вероятностное пространство (см. введение); функция $\xi(x, \omega)$ измерима относительно произведения борелевской σ-алгебры $[0, \pi]$ на F_0; функция $g(t, x, \omega)$ измерима и при фиксированном $t \in [-r, 0]$ измерима по (x, ω) относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств $[0, \pi]$ на F_{t+r}; функции $u(t, x, \omega)$ измеримы и при фиксированном $t \in [0, T]$ измеримы по (x, ω) относительно произведения борелевской σ-алгебры подмножеств $[0, \pi]$ на F_t; $B, K, \Lambda \in [L_2(0, \pi)]$;

$$\int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, \xi(x, \omega) \,|^2 \, dx < \infty, \ \int_{-r}^0 \int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, g(t, x, \omega) \,|^2 \, dxdt < \infty,$$

$$\int_0^T \int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, u(t, x, \omega) \,|^2 \, dxdt < \infty, \ \int_0^T \int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, v(t, x, \omega) \,|^2 \, dxdt < \infty.$$

Области управления U_0 и V_0 есть замкнутые шары в $H_2(\Omega; L_2(0, \pi))$ с центрами в нуле и радиусами ρ_1 и ρ_2 соответственно. Тогда допустимые управления преследователя (источника) $u(t, x, \omega) \in U_1$ и убегающего (утечки) $v(t, x, \omega) \in V_1$ удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, u(t, x, \omega) \,|^2 \, dx \le \rho_1^2, \ \int_0^\pi \mathbf{M} \, |\, v(t, x, \omega) \,|^2 \, dx \le \rho_2^2.$$

ISSN 0572-2691

Изучим дифференциальную игру в системе (21)–(23), которая заключается в приведении состояния $y(t,x,\omega)$ на некоторое терминальное множество за время, не превосходящее T, в классе допустимых управлений преследователя при любом допустимом управлении убегающего.

В вещественном пространстве $Y=U=V=H=L_2(0,\pi)$ смешанная задача (21)–(23) записывается в абстрактной форме (1)–(3) с дифференциальным оператором

$$Aq=\frac{d^2q(x)}{dx^2},\ \ D_A=\{q(x)\in W_2^2(0,\pi),\ \ q(0)=q(\pi)=0\},$$

и операторами $B\in[L_2(0,\pi)]$, $K_1=K_2=K\in[L_2(0,\pi)]$. Решение смешанной задачи (21)–(23) будем понимать в смысле решения соответствующей абстрактной задачи (1)–(3). Спектр оператора A состоит из счетного множества простых собственных чисел $\lambda_n=-n^2$, $n=1,2,\ldots$, которым отвечает полная ортонормированная система собственных функций $e_n(x)=\sqrt{2/\pi}\sin nx$. Функции $q(x)\in L_2(0,\pi)$ разлагаем по базисным функциям

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n e_n(x),\ \ q_n=\int_0^{\pi} q(x)e_n(x)dx\,.$$

На множестве регулярных точек $\lambda\notin\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена резольвента

$$R_A(\lambda)q(x)=(A-\lambda E)^{-1}q(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n e_n(x)}{\lambda+n^2}\,,$$

которая удовлетворяет оценке (4). Оператор A является генератором аналитической полугруппы

$$S_t q=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} q_n e_n(x)\,.$$

Пусть выполняются ограничения: $\operatorname{Im}B,\ \operatorname{Im}K,\ \operatorname{Im}\Lambda\subset D_A$; $\xi(x,\omega)\in D_A$ для п.в. $\omega\in\Omega$. В силу утверждения 1 существует единственное решение $y(t,x,\omega)$ смешанной задачи (21)–(23).

Для наглядной иллюстрации предложенного в разд. 2 метода определим терминальное множество M (14), ковариационный оператор Q винеровского процесса $w(t)$, операторы $B, K, \Lambda,$ начальные данные $g(t,x,\omega)$ и $\xi(\omega)$. Пусть $M=\{0\}$, $Q=-A^{-1}$, $B=K=\Lambda=\Pi_m$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве $L_2(0,\pi)$ на линейную оболочку собственной функции $e_m(x)$, $g(t,x,\omega)=0$, $\xi(x,\omega)=\xi_m(\omega)e_m(x)$ и $\xi_m\neq 0$. Тогда $M_0=\{0\}$, $M_1=\{0\}$, $\Pi=E,$

$$w(t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)e_n(x)\,,$$

где $w_n(t)$ — независимые скалярные винеровские процессы такие, что $\mathbf{M}w_n(t)=0$, $\mathbf{M}w_n^2(t)=t/n^2$. Исключаем тривиальный случай окончания игры и предполагаем, что $\xi_m\neq 0$.

Находим выражения для оператор-функций $W_k(t, \tau)$ (6):

$$W_k(t, \tau) = e^{m^2(\tau+kr-t)} \frac{(t-\tau-kr)^k}{k!} \Pi_m, \; 0 \le \tau \le t-kr \le T-kr .$$

Отсюда получаем

$$W(t, \tau)\Pi_m = h(t,\tau)\Pi_m, \; (t, \tau) \in \Delta ,$$

$$h(t, \tau) = \sum_{j=0}^{k} e^{m^2(\tau+jr-t)} \frac{(t-\tau-jr)^j}{j!} \chi_{[0,\, t-kr]}(\tau),$$

$$kr \le t \le (k+1)r, \; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{24}$$

где $\chi_{[0,\, t-kr]}(\tau)$ — характеристическая функция отрезка $[0, t-kr]$. Имеем следующее представление для случайного процесса $\psi \in L_2(0, T; \Omega; L_2(0, \pi); F_t)$ в соотношениях (9):

$$\psi(t, x, \omega) = \psi_m(t, \omega) e_m(x), \; \psi_m(t, \omega) = e^{-m^2 t} \left[\xi_m(\omega) + \int_0^t e^{m^2\tau} dw_m(\tau) \right].$$

Выражение (10) для случайного процесса $\zeta \in L_2(0, T; \Omega; L_2(0, \pi); F_t)$ принимает вид

$$\zeta(t, x, \omega) = \zeta_m(t, \omega) e_m(x) = \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{L}_m^k \psi_m)(t, \omega)\, e_m(x),$$

$$\tilde{L}_m \in [L_{2,\, \Omega,\, \mathbf{R},\, F_t}], \; (\tilde{L}_m \psi_m)(t, \omega) = \chi_{[r_0,\, T]}(t) \int_{r_0}^{t} e^{m^2(\tau-t)} \psi_m(\tau - r, \omega) d\tau.$$

Напомним, что согласно (9) имеем $r_0 = \min\{r, T\}$.

Уточним вид многозначных отображений $\Re(t, \tau, v)$ (15) с образами в $H_2(\Omega; L_2(0, \pi))$ и $\Im(t, \tau, v)$ (16) с образами в $\mathbf{R}^1$:

$$\Re(t, \tau, v) = \{h(t, \tau)(u_m - v_m)e_m(x) \colon \mathbf{M}u_m^2 \le \rho_1^2\}, \; (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0,$$

$$\Im(t, \tau, v) = \{\tilde{\alpha} \ge 0 \colon \mathbf{M}[(\tilde{\alpha} h^{-1}(t, \tau)\zeta_m(t) - v_m)^2] \le \rho_1^2\}, \; (t, \tau, v) \in \Delta \times V_0.$$

Пусть $\rho_1 > \rho_2$. Определим функционал $\alpha(t, \tau, v)$ (17):

$$\alpha(t, \tau, v) = h(t, \tau)\alpha_0(t, v),$$

$$\alpha_0(t, v) = \frac{\mathbf{M}[\zeta_m(t) v_m] + \sqrt{\mathbf{M}^2[\zeta_m(t) v_m] + \mathbf{M}\zeta_m^2(t) \cdot (\rho_1^2 - \mathbf{M}v_m^2)}}{\mathbf{M}\zeta_m^2(t)}. \tag{25}$$

Множество Θ (18) моментов времени, на которых может завершиться игра, есть

$$\Theta = \{t \in [0, T] \colon \inf_{v \in V_1} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau)) d\tau \ge 1\} .$$

ISSN 0572-2691

Точная нижняя грань достигается, в результате имеем

$$\Theta = \{t \in [0, T]: (\rho_1 - \rho_2)\int_0^t h(t, \tau)d\tau \geq \sqrt{\mathbf{M}\zeta_m^2(t)}\}. \tag{26}$$

Чтобы получить условия завершения игры в системе (21)–(23) в момент времени $T_0 \in [0, T]$, воспользуемся теоремой 2. Множество Θ (26) не является пустым и $T_0 \in \Theta$, если ρ_1, ρ_2 удовлетворяли неравенству

$$(\rho_1 - \rho_2)\int_0^{T_0} h(T_0, \tau)d\tau \geq \sqrt{\mathbf{M}\zeta_m^2(T_0)}. \tag{27}$$

Теперь для произвольного допустимого управления убегающего $v(\tau, x, \omega) = v(\tau) \in V_1$ построим допустимое управление преследователя $u(\tau, x, \omega) = u(\tau) \in U_1$, с помощью которого приведем состояние системы (21)–(23) в ноль за время T_0. Определим многозначные отображения (19)

$$G_1(\tau, v) = \{u(x, \omega) \in U_0 : u_m(\omega) = v_m(\omega)\},$$

$$G_2(\tau, v) = \{u(x, \omega) \in U_0 : u_m(\omega) = v_m(\omega) - \alpha_0(T_0, v)\zeta(T_0)\},$$

и селекторы этих отображений

$$\eta_1(\tau, v) = v_m(\omega)e_m(x) \in G_1(\tau, v),$$

$$\eta_2(\tau, v) = [v_m(\omega) - \alpha(T_0, v)\zeta(T_0)]e_m(x) \in G_2(\tau, v).$$

Тогда

$$\gamma_1(\tau) = \eta_1(\tau, v(\tau)) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t) \text{ и } \gamma_2(\tau) = \eta_2(\tau, v(\tau)) \in L_2(0, T_0; \Omega; U; F_t)$$

являются селекторами отображений $G_1(\tau, v(\tau))$ и $G_2(\tau, v(\tau))$. Управление преследователя имеет вид

$$u(\tau) = u(\tau, x, \omega) = \begin{cases} [v_m(\tau, \omega) - \alpha_0(T_0, v)\zeta(T_0)]e_m(x), & \tau \in [0, t_*), \\ v_m(\tau, \omega)e_m(x), & \tau \in [t_*, T_0], \end{cases} \tag{28}$$

где момент переключения t_* с управления $u(\tau, x, \omega) = \gamma_2(\tau) = \eta_2(\tau, v(\tau))$ на управление $u(\tau, x, \omega) = \gamma_1(\tau) = \eta_1(\tau, v(\tau))$ определяем из соотношения

$$\int_0^{t_*} h(T_0, \tau)\alpha_0(T_0, v(\tau))d\tau = 1. \tag{29}$$

Таким образом, получен следующий результат.

Утверждение. Пусть для конфликтно-управляемой системы (21)–(23) выполняются следующие предположения: области управления U_0, V_0 есть замкнутые шары в $H_2(\Omega; L_2(0, \pi))$ с центрами в нуле и радиусами ρ_1, ρ_2, удовлетворяющими неравенству (27); $B = K = \Lambda = \Pi_m$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве $L_2(0, \pi)$ на линейную оболочку функции $\sin mx$; $g(t, x, \omega) = 0$, $\xi(x, \omega) \in H_2(\Omega; L_2(0, \pi); F_0)$, $\xi = \Pi_m \xi = \xi_m(\omega)e_m(x)$, $\xi_m \neq 0$. Тогда при любом допустимом управлении $v(\tau, x, \omega)$ состояние системы (21)–(23) может быть приведено в ноль в момент времени T_0 с помощью допустимого управления $u(\tau, x, \omega)$ вида (28), где момент времени t_* удовлетворяет соотношению (29) с функциями $h(t, \tau)$ (24) и $\alpha_0(t, v)$ в (25).

Заключение

Проблемы, затронутые в работе, примыкают к [16–21]. Предложенный метод исследования стохастической дифференциальной игры сближения в системе с запаздыванием проиллюстрирован на примере конфликтно-управляемого процесса распространения тепла с учетом эффектов запаздывания и случайного внешнего воздействия. Другой модельный пример, который позволяет иллюстрировать полученные теоретические результаты, возникает в теории цепей с сосредоточенными и распределенными элементами. Описание математических моделей цепей с отрезками длинных линий и сосредоточенными элементами приводит к системам с запаздыванием [22]. Учет случайного воздействия на сосредоточенные элементы этих цепей, как, например, в [23], приведет к стохастическим системам с запаздыванием. Включение линий задержки в радиотехнические схемы из работ [24–26], а также учет случайных воздействий на сосредоточенные элементы этих схем расширяет область приложений методов, предложенных в данной статье.

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, А.О. Чикрій

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ У РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Вивчається диференціальна гра зближення у стохастичній системі з запізненням. Еволюція системи описується лінійним стохастичним диференціальним рівнянням у розумінні Іто у гільбертовому просторі. Усі гільбертові простори, що розглядаються, передбачаються дійсними та сепарабельними. Вінеровський процес приймає значення у гільбертовому просторі і має ядерний симетричний позитивний коваріаційний оператор. Керування переслідувача та втікача суть невипереджуючі випадкові процеси, що приймають значення, взагалі кажучи, у різних гільбертових просторах. Оператор при стані системи є генератором аналітичної півгрупи. Розв'язки рівняння представляються за допомогою формули варіації сталих через початкові дані та блок керування. Ефект запізнення враховується шляхом підсумовування операторів типу зсуву. Для вивчення диференціальної гри метод розв'язуючих функцій розповсюджується на випадок стохастичних систем із запізненням у гільбертових просторах. Використовується техніка многозначних відображень та їх селекторів. Розглядається застосування одержаних результатів в абстрактних гільбертових просторах до систем, що описуються стохастичними рівняннями з частинними похідними. З урахуванням випадкового зовнішнього впливу і запізнення за часом вивчається процес розповсюдження тепла з керованими розподіленими тепловими джерелом і витоком.

Ключові слова: диференціальна гра, стохастичне диференціальне рівняння у розумінні Іто, запізнення, гільбертів простір, вінеровський процес, генератор аналітичної півгрупи, многозначне відображення, розв'язуюча функція, стохастичне рівняння з частинними похідними, стохастичне рівняння теплопровідності із запізненням.

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, A.A. Chikrii

STOCHASTIC DIFFERENTIAL GAMES IN DISTRIBUTED DELAY SYSTEMS

We study a differential game of approach in a delay stochastic system. The evolution of the system is described by Ito`s linear stochastic differential equation in Hilbert space. The considered Hilbert spaces are assumed to be real and separable. The Wiener process takes values in a Hilbert space and has a nuclear symmetric positive covariance operator. The pursuer and evader controls are non-anticipating random processes, taking on values, generally, in different Hilbert spaces. The operator multiplying the system state is the generator of an analytic semigroup. Solutions of the equation are represented with the help of a formula of variation of constants by the initial data and the control block. The delay effect is taken into account by summing shift type operators. To study the differential game, the method of resolving functions is extended to case of delay stochastic systems in Hilbert spaces. The technique of set-valued mappings and their selectors is used. We consider the application of obtained results in abstract Hilbert spaces to systems described by stochastic partial differential equations with time delay. By taking into account a random external influence and time delay, we study the heat propagation process with controlled distributed heat source and leak.

Keywords: differential game, stochastic differential equation in the sense of Ito, delay, Hilbert space, Wiener process, generator of an analytic semigroup, set-valued mapping, resolving function, stochastic partial differential equation, delay stochastic heat equation.

1. Ramachandran K.M., Tsokos C.P. Stochastic differential games. Paris–Amsterdam–Beijing: Atlantis Press, 2012. 252 p.
2. Carmona R. Lectures on BSDEs, stochastic control, and stochastic differential games with Financial Applications. Philadelphia: SIAM, 2016. 263 p. http://bookstore.siam.org/fm01/
3. Sun J., Jong J. Linear-quadratic stochastic two-person nonzero-sum differential games: open-loop and closed-loop Nash equilibria. *Stochastic Processes and their Applications*. 2019. **129**, N 2. P. 381–418. https://doi.org/10.1016/j.spa.2018.03.002
4. Krylov N.V. On the adjoint Markov policies in stochastic differential games. *Communications on Stochastic Analysis*. 2019. **13**. P. 1–21. https://doi.org/10.31390/cosa.13.1.01
5. Fleming W.H., Nisio M. Differential games for stochastic partial differential equations. *Nagoya Mathematical Journal*. 1993. **131.** P. 75–107. https://doi.org/10.1017/S0027763000004554
6. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a stochastic system. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2020. **309**, Supplement N 1. P. S185–S198. https://doi.org/10.1134/S0081543820040203
7. Xu J., Shi J., Zhang H. A leader-follower stochastic linear quadratic differential game with time delay. *Science China. Information Sciences*. 2018. **61**. Article number 112202. https://doi.org/ 10.1007/s11432-017-9293-4
8. Zhu Q., Shi Y. Nonzero-sum differential game of backward doubly stochastic systems with delay and applications. *Mathematical Control and Related Fields.* 2020. https://doi.org/ 10.3934/-mcrf.2020028
9. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1997. 424 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. **271**. P. 69–85. https://doi.org/10.1134/S0081543810040073
11. Chikrii A.A., Rutkas A.G., Vlasenko L.A. On a differential game in a system described by a functional differential equation. *Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Proceedings. Springer, Cham. 2020. P. 63–73. https://-doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_6

12. Curtain R.F., Falb P.L. Stochastic differential equations in Hilbert space. *J. Differential Equations.* 1971. **10**, N 3. P. 412–430. https://doi.org/10.1016/0022-0396(71)90004-0
13. Da Prato G., Zabchyk J. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press. 1992. 454p. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511666223
14. Hille E., Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. Providence: American Mathematical Society. 1957. 808 p.
15. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. **45**, N 9. P. 66–76. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60
16. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential games of pursuit. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. **43**, N 2. P. 233–245, https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x
17. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations.* 2015. **51**, N 6. P. 798–807. http://doi.org/10.1134/S0012266115060117
18. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 5. P. 12–26. http://doi.org/10.1615/ JAutomatinfScien.v48.i5.20
19. Rutkas A., Vlasenko L. On a differential game in a nondamped distributed system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2019. **42**, N 18. P. 6155–6164. http://doi.org/10.1002/mma.5712
20. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Game problems of approach for quasilinear systems of general Form. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2019. **304**, N 1 Supplement. P. 44–58. https://doi.org/10.1134/S0081543819020068
21. Chikrii A.A. Conflict Situations involving controlled object groups. Part 1. Collision avoidance. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. **52**, N 7. P. 19–37. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i7.30
22. Vlasenko L. Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2000. **23**, N 10. P. 937–948. https://doi.org/-10.1002/1099-1476(20000710)23:10<937::AID-MMA144>3.0.CO;2-B
23. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Stochastic optimal control of a descriptor system. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. **56**, N 2. P. 204–212. http://doi.-org/10.1007/s10559-020-00236-7
24. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 9. P. 60–75. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50
25. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 5. P. 1–15. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10
26. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Decomposition of descriptor control systems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. **56**, N 6. P. 924–933. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00312-y

Получено 20.12.2020