УДК 519.6

Ю.И. Харкевич, А.Г. Ханин

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ТИПА АБЕЛЯ–ПУАССОНА НА ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

Ключевые слова: модуль непрерывности, обобщенные классы Гельдера, дифференциальные уравнения в частных производных, оператор Лапласа, краевая задача.

Введение

Наилучшую характеристику непрерывным функциям относительно их применения к решению многих задач прикладной математики можно получить посредством понятия модуля непрерывности. Само понятие модуля непрерывности первого порядка введено А. Лебегом в далеком 1910 году. И с тех пор оно не только не утратило актуальности, но и приобрело еще большую значимость при решении многих современных задач народного хозяйства.

Классы функций, определяемые с помощью модуля непрерывности, — тонкий математический аппарат, применяемый к решению многих задач прикладной математики. Особенно это относится к игровым задачам динамики [1–7], которые на современном этапе научно-технического прогресса занимают ключевые позиции.

С другой стороны, классы непрерывных периодических функций H^{ω}, определяемые с помощью модуля непрерывности первого порядка, являются важнейшим инструментом при изучении аппроксимативных характеристик операторов типа Абеля–Пуассона [8, 9]. Операторы типа Абеля–Пуассона — решения уравнений в частных производных эллиптического типа — в частных случаях превращаются в хорошо известные операторы Пуассона [10–14] и Якоби–Вейерштрасса [15, 16]. Именно поэтому в данной работе рассматриваются аппроксимативные свойства операторов типа Абеля–Пуассона на классах непрерывных периодических функций H^{ω} в целях дальнейшего применения к теории игровых задач динамики.

Постановка задачи

Оператор типа Абеля–Пуассона [17] обозначим

$$A_{\rho,l}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,K_{\rho,l}(t)\,dt, \tag{1}$$

где

$$K_{\rho,l}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^l}\cos kt,\quad 0<\rho<1,\quad l>0. \tag{2}$$

Следует отметить, что оператор (1) является решением краевой задачи (в единичном круге) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{(-1)^{l+1}}{\rho^2}\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}}=0 \tag{3}$$

(l — натуральное число, $0<\rho<1$, $-\pi\le x\le\pi$), при условии, что функция $u(x,\rho)$ в (3) ограничена в единичном круге

$$\Sigma=\{0<\rho<1; -\pi\le x\le\pi\}$$

и

$$u(x,\rho)\big|_{\rho=1}=f(x), \tag{4}$$

где $f(x)$ — 2π-периодическая функция.

Если $l=1$, то оператор (1) — линейный положительный оператор Абеля–Пуассона [8, 9], или, что то же самое, оператор Пуассона [18, 19].

При $l=2$ оператор (1) является линейным положительным оператором Якоби–Вейерштрасса [15, 16].

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, т.е. $f(x)\in C$ с нормой

$$\| f\|_C=\max_{-\pi\le x\le\pi}|f(x)|. \tag{5}$$

Тогда аналогично [20, с. 9] обозначим

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; A_{\rho,l})_C=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\left\| f(\cdot)-A_{\rho,l}(f;\cdot)\right\|_C. \tag{6}$$

Если в явном виде найдена функция $g(\rho)=g(\mathfrak{M};\rho)$, такая, что при $\rho\to 1-0$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; A_{\rho,l})_C=g(\rho)+o(g(\rho)),$$

то, следуя А. И. Степанцу [20, с. 9], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для данного класса $\mathfrak{M}$ и оператора типа Абеля–Пуассона, заданного соотношениями (1)–(2), в метрике пространства C.

Приближение функций класса H^{ω} операторами типа Абеля–Пуассона

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения.

Определение 1 [20, с. 12]. Модулем непрерывности функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, называют функцию $\omega(t)=\omega(f;t)$, определенную для всех $t\in[0,b-a]$ посредством соотношения

$$\omega(t)=\omega(f;t)=\sup_{0\le h\le t}\max_{a\le x\le b-h}|f(x+h)-f(x)|=\sup_{\substack{|x'-x''|\le t\\ x',x''\in[a,b]}}|f(x')-f(x'')|.$$

Следует отметить, что согласно определению 1 модуль непрерывности $\omega(f,t)$ функции $f(x)$ при каждом фиксированном $t\in[0,b-a]$ указывает на величину максимального колебания функции на произвольном сегменте длины t, содержащемся на $[a,b]$.

Определение 2 [20, с. 15]. Пусть $\omega=\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на $[a,b]$, принадлежит классу $H^{\omega}_{[a,b]}$ ($f\in H^{\omega}_{[a,b]}$), если ее модуль непрерывности $\omega(f,t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f;t)\le\omega(t). \tag{7}$$

Если $f \in H^{\omega}_{[a,b]}$, то для произвольных точек t_1 и $t_2 \in [a, b]$ всегда верно соотношение

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le \omega(|t_1 - t_2|). \tag{8}$$

Верно и обратное: если для любых двух точек $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполнено неравенство (8), то $f \in H^{\omega}_{[a,b]}$. В самом деле

$$\omega(f; t) = \sup_{|t_1 - t_2| \le t} |f(t_1) - f(t_2)| \le \sup_{|t_1 - t_2| \le t} \omega(|t_1 - t_2|) = \omega(t).$$

Таким образом, $H^{\omega}_{[a,b]}$ — класс функций $f(x)$, которые на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условию (8).

В частности, если $\omega(t) = M t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, $M = \mathrm{const}$, $M > 0$, то класс $H^{\omega}_{[a,b]}$ называют классом Гельдера (или Липшица) порядка α и записывают $f \in MH^{\alpha}_{[a,b]}$ (или $f \in M\,\mathrm{Lip}\alpha$). При $M = 1$ полагают $1 \cdot H^{\alpha}_{[a,b]} = H^{\alpha}_{[a,b]}$ [20, с. 15].

Следует отметить, что решению задачи Колмогорова–Никольского типа (6) на различных классах функций $\mathfrak{M}$ для операторов типа Абеля–Пуассона и им подобным посвящен цикл робот [21–36]. Что касается изучения аппроксимативных свойств рассматриваемых операторов (1) на классах 2π-периодических непрерывных функций класса H^{ω}, то здесь успехи более умеренны. Именно поэтому основная цель работы — нахождение точных верхних граней уклонений функций класса H^{ω} от операторов типа Абеля–Пуассона (1) в равномерной метрике, т.е.

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \sup_{f \in H^{\omega}} \left\| f(\cdot) - A_{\rho,l}(f; \cdot) \right\|_C . \tag{9}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях для всех $0 < \rho < 1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) \int_0^{\infty} \rho^{z^l} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kz \right) \cos zt \, dz dt. \tag{10}$$

Доказательство. Очевидно, что для ядра (2) оператора типа Абеля–Пуассона (1) имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{\rho,l}(t)\, dt = 1.$$

Следовательно, имеем

$$A_{\rho,l}(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt \right) dt. \tag{11}$$

Наряду с функцией $f(t) \in H^{\omega}$ рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t + x)$. Тогда $f_1(0) - A_{\rho,l}(f_1; 0) = f(x) - A_{\rho,l}(f; x)$. Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно удовлетворяют соотношению (9), запишем следующее:

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \sup_{f \in H^{\omega}} \left\| f(0) - A_{\rho,l}(f; 0) \right\|_C . \tag{12}$$

Далее для каждой функции $f(x)$ класса H^{ω} построим функцию $f_2(x) = f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H^{ω}, причем $f_2(0) = 0$. Отсюда сделаем вывод, что

$$A_{\rho,l}(f;0) = A_{\rho,l}(f;0) - f(0),$$

именно поэтому из формул (9), (11) и (12) получаем

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \sup_{\substack{f \in H^{\omega} \\ f(0)=0}} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt \right) dt \right|. \tag{13}$$

Вследствие четности ядра $K_{\rho,l}(t)$, определенного посредством соотношения (2), ограничимся случаем четных функций $f(x)$. Таким образом, из (13) следует, что

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \sup_{f \in H} \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(t) K_{\rho,l}(t)\, dt \right|, \tag{14}$$

где H — множество четных функций $f \in H^{\omega}$, таких, что $f(0) = 0$.

Очевидно, что какой бы ни была функция $f \in H$, всегда имеет место неравенство

$$\left| \int_0^{\pi} f(x) K_{\rho,l}(t)\, dt \right| \le \int_0^{\pi} \omega(t) K_{\rho,l}(t)\, dt. \tag{15}$$

С другой стороны, так как

$$K_{\rho,l}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt \ge 0,$$

для функции $f_0(t) \in H$, $f_0(t) = \omega(|t|)$, $|t| \le \pi$, имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(t) K_{\rho,l}(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) K_{\rho,l}(t)\, dt. \tag{16}$$

Поэтому, объединяя соотношения (14)–(16), получаем равенство

$$\mathcal{E}(H^{\omega}; A_{\rho,l})_C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) K_{\rho,l}(t)\, dt. \tag{17}$$

Для завершения доказательства теоремы запишем ядро (2) оператора типа Абеля–Пуассона в виде

$$K_{\rho,l}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt = \frac{1}{2} \varphi_{\rho,l}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{\rho,l}(k),$$

где $\varphi_{\rho,l}(k) := \rho^{k^l} \cos kt$. Применяя к последнему соотношению формулу суммирования Пуассона [17], получим

$$K_{\rho,l}(t) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{2} \Phi_{\rho,l}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{\rho,l}(2\pi k) \right), \tag{18}$$

где $\Phi_{\rho,l}(u)$ — косинус-преобразование Фурье функции $\varphi_{\rho,l}(u)$, т.е.

$$\Phi_{\rho,l}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_{\rho,l}(z)\cos zu\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \rho^{z^l}\cos zt\cos zu\,dz. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$K_{\rho,l}(t)=2\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho^{z^l}\cos zt\,dz+\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty \rho^{z^l}\cos zt\cos 2\pi kz\,dz\right). \tag{20}$$

Наконец, подставляя (20) в (17), получаем равенство (10).

Теорема доказана.

Как отмечено ранее, рассматриваемый в работе оператор типа Абеля–Пуассона (1) в частных случаях превращается в хорошо известные операторы Пуассона (при $l=1$), т.е. $A_{\rho,1}(f;x)=P_\rho(f;x)$, и операторы Якоби–Вейерштрасса (при $l=2$), т.е. $A_{\rho,2}(f;x)=W_\rho(f;x)$. Отметим, что из доказанной выше теоремы в частных случаях следуют результаты о приближении функций классов H^α операторами Пуассона $P_\rho(f;x)$ и Якоби-Вейерштрасса $W_\rho(f;x)$, полученными в [17].

Следствие 1. Если в равенстве (10) положить $\omega(t)=t$, то в принятых выше обозначениях имеют место следующие асимптотические равенства:

$$\mathcal{E}(H^1;A_{\rho,1})_C=\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}\ln\rho\cdot\ln\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)+O\left(\ln\frac{1}{\rho}\right),\ \rho\to 1-0,$$

$$\mathcal{E}(H^1;A_{\rho,2})_C=\mathcal{E}(H^1;W_\rho)_C=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln\frac{1}{\rho}}+O\left(\sqrt{\ln\frac{1}{\rho}e^{\frac{\theta_1}{\ln\rho}}}\right),\ \rho\to 1-0,\ \ 0<\theta_1\le\frac{\pi^2}{4}.$$

Следствие 2. Если в равенстве (10) положить $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$, то в принятых выше обозначениях будут иметь место такие асимптотические равенства:

$$\mathcal{E}(H^\alpha;A_{\rho,1})_C=\mathcal{E}(H^\alpha;P_\rho)_C=\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^\alpha+O\left(\ln\frac{1}{\rho}\right),\ \rho\to 1-0,$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha;A_{\rho,2})_C=\mathcal{E}(H^\alpha;W_\rho)_C=$$

$$=\frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^\alpha+O\left(e^{\frac{\theta_2}{\ln\rho}}\right),\ \rho\to 1-0,\ 0<\theta_2<\frac{\pi^2}{16}.$$

Заключение

В результате выполненных в работе исследований доказана теорема о нахождении точной верхней грани уклонения функций класса H^ω от их операторов типа Абеля–Пуассона. Таким образом решена классическая задача Колмогорова–Никольского в терминологии А.И. Степанца о приближении непрерывных периодических функций, определенных с помощью модуля непрерывности первого порядка, их операторами типа Абеля–Пуассона. Как следствие из доказанной теоремы следуют ранее известные результаты, касающиеся приближения операторов Пуассона и операторов Якоби–Вейерштрасса функциями класса Гельдера.

Ю.І. Харкевич, О.Г. Ханін

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ ТИПУ АБЕЛЯ–ПУАССОНА НА УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСАХ ГЕЛЬДЕРА

Роботу присвячено актуальним проблемам сучасної прикладної математики, а саме вивченню апроксимативних властивостей операторів типу Абеля–Пуассона на так званих узагальнених класах функцій Гельдера. Відомо, що під узагальненими класами функцій Гельдера прийнято називати класи неперервних 2π-періодичних функцій, що визначаються за допомогою модуля неперервності першого порядку. Саме поняття модуля неперервності першого порядку сформульовано в роботах відомого французького математика Лебега на початку минулого століття і з тих пір є найважливішою характеристикою гладкості неперервних функцій, якими можна описувати всі природні процеси в математичному моделюванні. У той же час самі по собі оператори типу Абеля–Пуассона є розв'язками диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. Саме тому отримані в даній роботі результати мають важливе значення для подальших досліджень у галузі прикладної математики. Доведена теорема характеризує верхню межу відхилення неперервних 2π-періодичних функцій, визначених за допомогою модуля неперервності першого порядку, від їх операторів типу Абеля–Пуассона. Таким чином розв'язано класичну задачу Колмогорова–Нікольського в термінології О.І. Степанця про наближення функцій класу H^{ω} їх операторами типу Абеля–Пуассона. Відомо, що оператори типу Абеля–Пуассона в окремих випадках перетворюються в добре відомі в прикладній математиці оператори Пуассона і Якобі–Вейєрштрасса. Тому з доведеної в роботі теореми як наслідок записано асимптотичні рівності верхніх граней відхилень функцій класу Гельдера порядку α $(0<\alpha\le 1)$ від їх операторів Пуассона і Якобі–Вейєрштрасса відповідно. Отримані рівності узагальнюють раніше відомі в цьому напрямку результати з області прикладної математики.

Ключові слова: модуль неперервності, узагальнені класи Гельдера, диференціальні рівняння в частинних похідних, оператор Лапласа, крайова задача.

Yu.I. Kharkevych, A.G. Khanin

APPROXIMATIVE PROPERTIES OF ABEL–POISSON-TYPE OPERATORS ON THE GENERALIZED HÖLDER CLASSES

The paper deals with topical issues of the modern applied mathematics, in particular, an investigation of approximative properties of Abel–Poisson-type operators on the so-called generalized Hölder's function classes. It is known, that by the generalized Hölder's function classes we mean the classes of continuous 2π-periodic functions determined by a first-order modulus of continuity. The notion of the modulus of continuity, in turn, was formulated in the papers of famous French mathematician Lebesgue in the beginning of the last century, and since then it belongs to the most important characteristics of smoothness for continuous functions, which can describe all natural processes in mathematical modeling. At the same time, the Abel-Poisson-type operators themselves are the solutions of elliptic-type partial differential equations. That is why the results obtained in this paper are significant for subsequent research in the field of applied mathematics. The theorem proved in this paper characterizes the upper bound of deviation of continuous 2π-periodic functions determined by a first-order modulus of continuity from their Abel–Poisson-type operators. Hence, the classical Kolmogorov–Nikol'skii problem in A.I. Stepanets sense is solved on the approximation of functions from the classes H^{ω} by their Abel–Poisson-type operators. We know, that the Abel–Poisson-type operators, in partial cases, turn to the well-known in applied mathematics Poisson and Jacobi–Weierstrass operators. Therefore, from the obtained theorem follow the asymptotic equalities for the upper bounds of deviation of functions from the Hölder's classes of order α $(0 < \alpha \leq 1)$ from their Poisson and Jacobi–Weierstrass operators, respectively. The obtained equalities generalize the known in this direction results from the field of applied mathematics.

Keywords: modulus of continuity, generalized Hölder classes, partial differential equations, Laplace operator, boundary value problem.

1. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
2. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. 293 (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
3. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. 291 (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
4. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. and Systems Anal.* 2014. **50**, N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
5. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. and Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. 268 (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (eds). Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston : Birkhäuser. 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
8. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
9. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
10. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
11. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
12. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
13. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
14. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$. *Mathematical Notes.* 2014. **96**, N 5-6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/S0001434614110406.
15. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 9. P. 1342–1363. DOI: 10.1007/s11253-007-0091-3.
16. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
17. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel–Poisson type. *Math. Notes.* 1975. **17**, N 2. P. 101–107. DOI: 10.1007/BF01161864.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
19. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/cmp.12.1.138–147.

20. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев : Наук. думка, 1981. 340 с.
21. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
22. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
23. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
24. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
25. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
26. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. **72**, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
27. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
28. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
29. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N.Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4.
30. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^{r}_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2. P. 321–334. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334.
31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
32. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
33. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
34. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
35. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
36. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.

Получено 29.07.2020