УДК 519.6

Ю.И. Харкевич

ТОЧНЫЕ РАВЕНСТВА ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА СОБОЛЕВА ИХ ОБОБЩЕННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, точность результата математического моделирования, классы дифференцируемых периодических функций, абсолютно непрерывные функции, константы Ахиезера–Крейна–Фавара, точные равенства.

Введение

В настоящее время научно-технический прогресс невозможен без современных информационных технологий. Для обоснования алгоритмов, применяемых для написания программного обеспечения современных информационных технологий, используют математическое моделирование (вычислительный эксперимент). Дело в том, что с помощью современных методов математического моделирования можно существенно сократить потребность в реальных экспериментах, а в большинстве случаев и вообще заменить их. В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели как численными методами, так и методами игровых задач динамики [1–7]. Особенно последние сейчас очень актуальны в связи с интенсивным развитием разного рода комплексов и тренажеров, которые моделируют движущиеся объекты различной природы.

В то же время при постановке большинства задач динамических игр используют как сами уравнения в частных производных (например, для описания движения системы взаимодействующих материальных точек), так и их решения. Одним из таких решений уравнений в частных производных как раз и является так называемый обобщенный интеграл Пуассона [8], который в частных случаях превращается в более известные интеграл Абеля–Пуассона [9–11] и бигармонический интеграл Пуассона [12–15].

Постановка задачи

Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций, в котором норма задана следующим образом:

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|. \tag{1}$$

Как общепринято, $W^r, r \in N$, обозначим множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и почти всюду $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$.

Согласно [8]

$$P_{s,q}(\rho;\ f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_{s,\,q}(\rho;\,t)dt,\ \ 0\le\rho<1, \tag{2}$$

обозначим обобщенный интеграл Пуассона функции f, а

$$K_{s,q}(\rho;t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^{q})\rho^{k}\cos kt,\ \ 0\le s\le\frac{1}{2},\ \ q\ge 1, \tag{3}$$

— соответственно ядро этого обобщенного интеграла Пуассона.

Если $s=0,$ то из (2) получим интеграл Абеля–Пуассона [16], или, что то же самое, интеграл Пуассона [17]

$$A(\rho;\ f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k}\cos kt\right)dt,\ \ 0\le\rho<1.$$

Если в (2) положить $s=\frac{1}{2},\ q=1$, то в этом случае будем иметь хорошо известный в прикладной математике, и не только, бигармонический интеграл Пуассона [18, 19]

$$B(\rho;\ f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^{2})\right)\rho^{k}\cos kt\right)dt,\ \ 0\le\rho<1.$$

Аналогично терминологии А.И. Степанца [20] (см. также [21–24]) обозначим

$$\mathcal{E}(W^{r};P_{s,\,q}(\rho))_{C}=\sup_{f\in W^{r}}\left\|f(\cdot)-P_{s,q}(\rho;\ f;\cdot)\right\|_{C} \tag{4}$$

верхнюю грань уклонения функций из класса W^{r} от их обобщенных интегралов Пуассона в равномерной метрике. Если в явном виде найдена функция $g(\rho)$, такая, что при $\rho\to 1$

$$\mathcal{E}(W^{r};P_{s,\,q}(\rho))_{C}=g(\rho)+o(g(\rho)), \tag{5}$$

то, следуя А.И. Степанцу [20, с. 198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса функций Соболева [25] W^{r} и обобщенного интеграла Пуассона $P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ x)$ в равномерной метрике.

Приближение функций класса W^{r} их обобщенными интегралами Пуассона

Имеется ряд работ, в которых решена задача Колмогорова–Никольского для различных классов функций как для интегралов Абеля–Пуассона [26–29], так и бигармонических интегралов Пуассона [30–34]. Но существенным недостатком всех этих перечисленных выше работ, с точки зрения математического моделирования (численного эксперимента), является то, что основные результаты в них записаны в виде асимптотического равенства (5). Иными словами, недостаток всех задач Колмогорова–Никольского с точки зрения прикладной математики состоит в том, что для численного эксперимента будут известны только главный и остаточный члены правой части равенства (5). При решении практически всех задач математического моделирования всегда важна точность приближения, полученного при решении задач типа (4). Именно поэтому основная цель работы — исследование верхних граней уклонений функций классов Соболева W^{r} от их обобщенных интегралов Пуассона $P_{s,q}(\rho;\, f;\, x)$ в целях получения точных равенств для величин (4) в равномерной метрике.

В принятых выше обозначениях имеют место утверждения.

Теорема 1. Если $r=2l,\ l\in N,$ то для всех $0<\rho<1$ имеет место точное равенство

$$\mathcal{E}(W^{2l};P_{s,q}(\rho))_C=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{2(l-i)+1}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho}-\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i)!}K_{2(l-i)}\ln^{2i}\frac{1}{\rho}+$$

$$+s(1+\rho)(1-\rho)^{q}\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}K_{2(l-i)}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho}-\sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{2(l-i)-1}\ln^{2i}\frac{1}{\rho}\right)-$$

$$-\beta_{\rho}^{2l}+s(1+\rho)(1-\rho)^{q}\beta_{\rho}^{2l-1}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{K}_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n\in N, \tag{7}$$

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ n=0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

— хорошо известные константы Ахиезера–Крейна–Фавара

$$\beta_{\rho}^{n}=\frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{t_1}^{1}\int_{t_2}^{1}\ldots\int_{t_{n-1}}^{1}\frac{1}{t_1\cdot t_2\ldots t_n}\operatorname{arctg}t_1\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n\,. \tag{9}$$

Доказательство. Согласно [35], для ядра обобщенного интеграла Пуассона (3) имеем, что $K_{s,q}(\rho;t)>0$ и $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{s,q}(\rho;t)dt=1$. Тогда из формул (1)–(4) с учетом разложения функции $f\in W^{r}$ $(r=2l,\, l\in N)$ в ряд Фурье получим, что

$$\mathcal{E}(W^{r};P_{s,q}(\rho))_C=\sup_{f\in W^{r}}\max_{-\pi\le t\le\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1+sk(1+\rho)(1-p)^{q}\rho^{k})\cos kt\,dt\right|. \tag{10}$$

Поскольку дальнейшие соображения полностью совпадают с началом доказательства теоремы 3 из работы [8], то исходя из (10) запишем, что при $r=2l,\, l\in N,$

$$\mathcal{E}(W^{r};P_{s,q}(\rho))_C=\sup_{f\in W^{r}}\max_{-\pi\le t\le\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^{q}\rho^{k}}{k^{r}}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)dt\right|=\frac{4}{\pi}\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^{q})\rho^{k}}{k^{r}}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)dt\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1-(1+s(2k+1)(1+\rho)(1-\rho)^{q})\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{2l+1}}+$$

$$+\frac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{2l}}-\frac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)^{2l}}\,. \tag{11}$$

Учитывая, что

$$\psi_n(\rho) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}, \quad n \geq 1, \tag{12}$$

(см., например, [29]), из (11) получим

$$\mathcal{E}(W^{2l}; P_{s,q}(\rho))_C = \psi_{2l}(\rho) + s(1+\rho)(1-\rho)^q \psi_{2l-1}(\rho) - s(1+\rho)(1-\rho)^q \psi_{2l-1}(0). \tag{13}$$

Для дальнейших преобразований в правой части (13) рассмотрим величину

$$\frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2 \ldots t_n} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n = \frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t_1^{2k+1}}{2k+1} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_3} \frac{1}{t_2 t_3 \ldots t_n} \cdot \frac{t_2^{2k+1}}{(2k+1)^2} dt_2 dt_3 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_4} \frac{1}{t_3 t_4 \ldots t_n} \cdot \frac{t_3^{2k+1}}{(2k+1)^3} dt_3 dt_4 \ldots dt_n =$$

$$= \ldots = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\rho}^{1} \frac{1}{t_n} \cdot \frac{t_n^{2k+1}}{(2k+1)^n} dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left. \frac{t_n^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}} \right|_{\rho}^{1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}. \tag{14}$$

Таким образом, принимая во внимание соотношения (14) и (12), придем к заключению, что

$$\psi_n(\rho) = \frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 t_2 \ldots t_n} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \tag{15}$$

Далее произведя некоторые преобразования для функции $\psi_n(\rho)$, $n > 1$, будем иметь

$$\psi_n(\rho) = \frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_n} \operatorname{arctg} t_1 dt_1 dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{t_{n-1}}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_n} \operatorname{arctg} t_1 dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} dt_n -$$

$$- \frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{t_n}^{1}\int_{0}^{t_{n-1}}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_n} \operatorname{arctg} t_1 dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} dt_n =$$

$$= \psi_{n-1}(0)\int_{\rho}^{1} \frac{1}{t_n} dt_n - \int_{\rho}^{1} \frac{1}{t_n} \psi_{n-1}(t_n) dt_n. \tag{16}$$

Полученная таким образом рекуррентная формула (16) может быть представлена в виде

$$\psi_n(\rho) = \psi_{n-1}(0)\int_{\rho}^{1} \frac{dt_1}{t_1} - \int_{\rho}^{1} \frac{1}{t_1}\left(\psi_{n-2}(0)\int_{t_1}^{1} \frac{dt_2}{t_2} - \int_{t_1}^{1} \frac{1}{t_2} \psi_{n-2}(t_2) dt_2 \right) =$$

 ISSN 0572-2691

$$= \psi_{n-1}(0)\int_{\rho}^{1}\frac{dt_1}{t_1} - \psi_{n-2}(0)\int_{\rho}^{1}\int_{t_1}^{1}\frac{dt_2 dt_1}{t_2 t_1} + \int_{\rho}^{1}\int_{t_1}^{1}\frac{1}{t_1 t_2}\psi_{n-2}(t_2)\,dt_1 dt_2 =$$

$$= \ldots = \psi_{n-1}(0)\ln\frac{1}{\rho} - \psi_{n-2}(0)\frac{1}{2!}\ln^2\frac{1}{\rho} + \psi_{n-3}(0)\frac{1}{3!}\ln^3\frac{1}{\rho} - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\int_{\rho}^{1}\int_{t_1}^{1}\int_{t_2}^{1}\ldots\int_{t_{n-2}}^{1}\frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_{n-1}}\psi_1(t_{n-1})dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} + \frac{4}{\pi}(-1)^{n-1}\int_{\rho}^{1}\int_{t_1}^{1}\int_{t_2}^{1}\ldots\int_{t_{n-1}}^{1}\frac{1}{t_1 t_2 \ldots t_n}\,\mathrm{arctg}\,t_1 dt_1 dt_2 \ldots dt_n\,. \quad (17)$$

Применяя ко второму слагаемому правой части равенства (17) обозначение (9), получаем

$$\psi_n(\rho) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} + (-1)^{n-1}\beta_\rho^n. \quad (18)$$

Переходя к окончательной фазе доказательства теоремы, из соотношений (13) и (18) получим, что

$$\mathcal{E}(W^{2l}; P_{s,q}(\rho))_C = \sum_{k=1}^{2l-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{2l-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} - \beta_\rho^{2l} + s(1+\rho)(1-\rho)^q \times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2l-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{2l-k-1}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} - \beta_\rho^{2l+1} - \psi_{2l-1}(0)\right) = \sum_{k=1}^{2l-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{2l-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} +$$

$$+s(1+\rho)(1-\rho)^q\sum_{k=1}^{2l-2}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{2l-k-1}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} - \beta_\rho^{2l} + s(1+\rho)(1-\rho)^q\beta_\rho^{2l-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}\psi_{2(l-i)+1}(0)\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i)!}\psi_{2(l-i)}(0)\ln^{2i}\frac{1}{\rho} + s(1+\rho)(1-\rho)^q \times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}\psi_{2(l-i)}(0)\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{(2i)!}\psi_{2(l-i)-1}(0)\ln^{2i}\frac{1}{\rho}\right) -$$

$$-\beta_\rho^{2l} + s(1+\rho)(1-\rho)^q\beta_\rho^{2l-1}. \quad (19)$$

И наконец, принимая во внимание обозначения (7) и (8) и учитывая при этом, что

$$\psi_n(0) = \begin{cases} K_n, & n = 2l, \\ \tilde{K}_n, & n = 2l+1, \end{cases} \qquad l \in N,$$

из равенства (19) получим формулу (6).

Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Если $r = 2l+1,\ l \in N,$ то при всех $0 < \rho < 1$ для величины (4) имеет место точное равенство

$$\mathcal{E}(W^{2l+1}; P_{s,q}(\rho))_C = \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{2(l-i+1)}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i)!}K_{2(l-i)+1}\ln^{2i}\frac{1}{\rho} +$$

$$+s(1+\rho)(1-\rho)^q\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(2i-1)!}K_{2(l-i)+1}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho}-\sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{(2i)!}\tilde{K}_{2(l-i)}\ln^{2i}\frac{1}{\rho}\right)-$$

$$-\alpha_\rho^{2l+1}-s(1+\rho)(1-\rho)^q\alpha_\rho^{2l},$$

где

$$\alpha_\rho^n=\frac{2}{\pi}\int_\rho^1\int_{t_1}^1\int_{t_2}^1\ldots\int_{t_{n-2}}^1\int_{t_{n-1}}^1\frac{1}{t_1t_2\ldots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_2}dt_1dt_2\ldots dt_n,$$

а K_n, $\tilde{K}_n$ — константы Ахиезера–Крейна–Фавара, заданные формулами (7), (8).

Заключение

В настоящей работе решена задача о приближении классов периодических дифференцируемых функций их обобщенными интегралами Пуассона. В результате проведенных исследований получены точные равенства для верхних граней уклонений функций классов Соболева от их обобщенных интегралов Пуассона. В частных случаях из доказанных в работе теорем следуют ранее известные результаты как для интегралов Пуассона, так и для бигармонических интегралов Пуассона, которые являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Таким образом, полученные в работе результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании теории дифференциальных игр в динамических системах.

Ю.І. Харкевич

ТОЧНІ РІВНОСТІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ СОБОЛЄВА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Розв’язання задач про рух системи взаємодіючих матеріальних точок у більшості випадків зводиться як до звичайних диференціальних рівнянь, так і до рівнянь в частинних похідних. Одним із розв’язків такого типу рівнянь є так звані узагальнені інтеграли Пуассона, які в окремих випадках перетворюються в добре відомі інтеграли Абеля–Пуассона або бігармонічні інтеграли Пуассона. Існує ряд результатів по наближенню різних класів диференційовних періодичних і неперіодичних функцій вищезазначеними інтегралами (так звана задача Колмогорова–Нікольського в термінології О.І. Степанця). Але практично в усіх розв’язаних задачах Колмогорова–Нікольського як для інтегралів Абеля–Пуассона, так і для бігармонічних інтегралів Пуассона з точки зору математичного моделювання (обчислювального експерименту) є істотний недолік. Суть цього недоліку полягає в тому, що в більшості розв’язаних раніше задач Колмогорова–Нікольського для інтегралів Абеля–Пуассона і бігармонічних інтегралів Пуассона (в кінцевому результаті) було отримано тільки головний і залишковий члени наближення, що істотно може впливати на точність обчислювального експерименту. Дану роботу присвячено отриманню точних рівностей наближення функцій класів Соболєва їх узагальненими інтегралами Пуассона. Отже, доведена в роботі теорема є узагальненням і уточненням раніше відомих результатів, які характеризують апроксимативні властивості інтегралів Абеля–Пуассона і бігармонічних інтегралів Пуассона на класах диференційовних періодичних функцій. Особливістю розв’язаної в роботі задачі наближення для узагальненого інтеграла Пуассона на класах диференційовних функцій є те, що отриманий результат вдалося записати за допомогою відомих констант Ахієзера–Крейна–Фавара. Зазначений факт значно підвищує точність результату математичного моделювання (обчислювального експерименту) будь-якого реального процесу, що описується за допомогою узагальненого інтеграла Пуассона. Ці результати в подальшому зможуть значно розширити рамки застосування задач Колмогорова–Нікольського до математичного моделювання.

Ключові слова: диференціальні рівняння в частинних похідних, точність результату математичного моделювання, класи диференційовних періодичних функцій, абсолютно неперервні функції, константи Ахієзера–Крейна–Фавара, точні рівності.

Yu.I. Kharkevych

EXACT EQUALITIES FOR APPROXIMATION OF FUNCTIONS FROM THE SOBOLEV CLASS BY THEIR GENERALIZED POISSON INTEGRALS

In most cases, solutions to problems of the motion of a system of interacting material points are reduced to either ordinary differential equations or partial differential equations. One of the solutions of this type of equations is the so-called generalized Poisson integrals, which in partial cases turn into the well-known Abel-Poisson integrals or biharmonic Poisson integrals. A number of results is known on the approximation of various classes of differentiable periodic and nonperiodic functions by the mentioned above integrals (the so-called Kolmogorov-Nikol'skii problem in the terminology of A.I. Stepanets). Nevertheless, there is a significant drawback practically in all of the solved Kolmogorov-Nikol'skii problems for both Abel-Poisson integrals and Poisson biharmonic integrals from the mathematical modeling (computational experiment) point of view. The core point here is that in most of the previously solved Kolmogorov-Nikol'skii problems for both Abel-Poisson integrals and Poisson biharmonic integrals only the leading and remainder terms of the approximation were obtained, that can significantly affect the accuracy of the computational experiment. In the present paper we obtain exact equalities for approximation of functions from the Sobolev classes by their generalized Poisson integrals. Consequently, the theorem proved in this paper is a generalization and refinement of previously known results characterizing the approximation properties of Abel-Poisson integrals and biharmonic Poisson integrals on the classes of differentiable periodic functions. A peculiarity of the solved in this work problem of approximation for the generalized Poisson integral on the classes of differentiable functions is that the result obtained is successfully written using the well-known Akhiezer-Krein-Favard constants. This fact substantially increases the accuracy of the mathematical modeling result (computational experiment) for a real process described using the generalized Poisson integral. These results can further significantly expand the scope of application of the Kolmogorov-Nikol'skii problems to mathematical modeling.

Keywords: partial differential equations, accuracy of the result of mathematical modeling, classes of differentiable periodic functions, absolutely continuous functions, Akhiezer-Krein-Favard constants, exact equalities.

1. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences* 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
2. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
3. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
4. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. and Systems Anal.* 2014. **50,** N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.

5. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. and Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. *In Breton M., Szajowski K. (eds) Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games, Birkhäuser Boston* 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
8. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50,** N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
9. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
10. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/cmp.12.1.138–147.
11. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$. *Mathematical Notes*. 2014. 9, N 5–6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/S0001434614110406.
12. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^\psi$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
14. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
15. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69,** N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
16. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
17. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/-A:1005285818550.
20. Степанец А.И. Методы теории приближения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
22. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
23. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 2020. **246,** N 2. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4.
24. Hrabova U. Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^r$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ*. 2019. **11**, N 2. P. 10–23. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321–334.

25. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
26. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
27. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
28. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
30. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
32. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60,** N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
33. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
34. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. **72**, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
35. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.

Получено 27.10.2020