УДК 517.5

У.З. Грабова, С.А. Сальникова

ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА И ЕГО ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ

Ключевые слова: социально-экономические системы, динамика социальных показателей, оптимальные стратегии, асимптотические равенства, линейные методы с дельта-подобным ядром, классы Липшица.

Введение

Социальные процессы, происходящие в современном обществе, относятся к числу трудно формализуемых объектов. Именно поэтому очевидным фактом является использование математических методов в социологии. Используемые в социологии математические модели охватывают лишь небольшую часть задач, поэтому необходимы как модели, так и инструмент, позволяющий анализировать и строить эти модели. Несмотря на то, что социология накопила значительный объем знаний по проблемам моделирования социальной динамики, до сих пор трудно говорить о наличии общей методологии построения социолого-математических моделей как инструмента исследования социальных процессов. Математическое моделирование таких задач может осуществляться методами теории динамических игр [1–5], что позволяет найти оптимальные стратегии поведения конкурирующих сторон сетевого анализа [6] и др. С развитием теории и методов аппроксимации, асимптотические методы становятся одним из главных инструментов исследования задач оптимизации. Применение асимптотических методов дает возможность получить качественную картину решения. Как известно, наличие периодических составляющих в случайном процессе проявляется в виде дельта-функций. Поэтому цель настоящей работы — изучение аппроксимативных свойств обобщенного интеграла Пуассона [7, 8] $P_{s.q}(f; x)$, оператора с дельта-подобным ядром, на классах периодических функций, которые удовлетворяют условию Липшица порядка α в равномерной метрике. Исследование таких задач представляет также интерес и для самой теории приближения функций, поскольку полученные формулы обобщают результаты предшественников [9–15] и тем самым раскрывают новые аспекты данного направления.

Постановка задачи

Пусть L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций f с нормой $\| f \|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} | f(t) | dt,$ C — пространство 2π-периодических непрерывных функций f, в котором норма определяется равенством $\| f \|_C = \max\limits_x | f(x) |.$

Пусть $H^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1,$ — класс Липшица порядка $\alpha,$ т.е. функций $f \in C,$ которые удовлетворяют условию $| f(x+h) - f(x) | \le | h |^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1,\ 0 \le h \le 2\pi,\ x \in R.$

Обозначим $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ (см., например, [16]) множество функций натурального аргумента, зависящих от параметра $\delta,$ изменяющегося на некотором множестве $E_\Lambda \subseteq R$, и содержащем, по крайней мере, одну предельную точку и, кроме того, $\lambda_\delta(0)=1$, $\forall\delta\in E_\Lambda$. С помощью множества Λ каждой функции $f\in L$ поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0(f)}{2}\lambda_\delta(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\delta(k)(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx),\ \delta\in E_\Lambda. \qquad (1)$$

Предположим, что (1) при каждом $\delta\in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_\delta(f;x;\Lambda)$. В этом случае говорят, что множество Λ определяет конкретный метод (Λ -метод) суммирования рядов Фурье [16, с. 36].

Если множество $\Lambda=\{\lambda_\delta(k)\}$ таково, что

$$\lambda_\delta(k)=\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)e^{-\frac{k}{\delta}},\ 0\le s\le 1/2,\ q\ge 1, \qquad (2)$$

то

$$U_\delta(f;x;\Lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+sk\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx). \qquad (3)$$

Такую функцию называют обобщенным интегралом Пуассона функции f и обозначают $P_{s,q}(\delta;f;x)$ [8].

При $s=0$ из (3) получим интеграл Абеля–Пуассона [17] $A_\delta(f;x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)$, функции f, или, что то же самое, интеграл Пуассона [18–20], а при $s=\frac{1}{2}$, $q=1$, соответственно — бигармонический интеграл Пуассона [21–23] $B_\delta(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx+$ $+b_k(f)\sin kx)$ функции f.

Интегралы Абеля–Пуассона и бигармонические интегралы Пуассона — это так называемые операторы с дельта-подобным ядром. К операторам такого типа относятся тригармонические интегралы Пуассона [24–28] $P_{3,\delta}(f;x)$ и интегралы Вейерштрасса [29–31] $W_\delta(f;x)$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_\Lambda)_X=$ $=\sup\limits_{f\in\mathfrak{N}}\|f(\cdot)-U_\Lambda(f;\cdot)\|_X$, где $\mathfrak{N}\subseteq X$ — некоторый класс в пространстве X 2π-периодических функций, следуя А. И. Степанцу [16, с. 9], будем называть задачей Колмогорова–Никольского. Если в явном виде найдена функция $\phi(\delta)=\phi(\mathfrak{N};U_\Lambda(\delta))$ такая, что $\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_\Lambda(f;\cdot))_X=\phi(\delta)+o(\phi(\delta))$, $\delta\to\infty$, то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса $\mathfrak{N}$ и метода $U_\Lambda(\delta)$ в пространстве X.

Следует отметить целый ряд работ [32–37], которые посвящены решению задачи Колмогорова–Никольского для вышеупомянутых линейных методов с дельта-подобными ядрами.

Что же касается обобщенного интеграла Пуассона, то его аппроксимативные свойства изучены на данный момент гораздо меньше. В связи с этим представляет особый интерес задача Колмогорова–Никольского, когда аппаратом приближения являются обобщенные интегралы Пуассона на классах Липшица, т.е. целью настоящей работы является получение асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(H^{\alpha}; P_{s,q})_C = \sup_{f\in H^{\alpha}} \left\| f(\cdot) - P_{s,q}(f;\cdot) \right\|_C, \quad 0<\alpha<1, \tag{4}$$

которые в ряде важных случаев дают решение задачи Колмогорова–Никольского для обобщенного интеграла Пуассона на классах Липшица в равномерной метрике.

Решение задачи Колмогорова–Никольского для обобщенного дельта-оператора Пуассона на классах Липшица

Теорема. Для $0<\alpha<1$ при $\delta\to\infty$ имеют место асимптотические равенства

$$\mathcal{E}(H^{\alpha}; P_{s,q})_C = (1-2s\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad q=1; \tag{5}$$

$$\mathcal{E}(H^{\alpha}; P_{s,q})_C = \sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{\alpha}} + \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\delta^{\alpha+q-1}}\right), & 1<\alpha+q<2; \\ O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & \alpha+q\geq 2. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Прежде чем перейти к непосредственному доказательству асимптотических равенств (5), (6), согласно терминологии работы Л.И. Баусова [9], определим множество F_{α} $(0\leq\alpha<1)$ следующим образом. А именно: если для абсолютно непрерывной функции $\lambda(u), u\in[0,\infty)$ и $\lambda(\infty)=0,$ производную $\lambda'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, что для некоторого $a>0$ интегралы

$$\int_0^{a/2} u^{1-\alpha}\left|d\lambda'(u)\right|, \quad \int_{a/2}^{3a/2} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\lambda'(u)\right|, \quad \int_{3a/2}^{\infty} (u-1)\left|d\lambda'(u)\right|, \tag{7}$$

сходятся (последний как несобственный), то будем записывать, что $\lambda(u)\in F_{\alpha}$.

Пусть $\lambda(u)\in F_{\alpha}$ и интеграл

$$A(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\alpha} \left|\int_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\right| dt \tag{8}$$

сходится. Здесь и в дальнейшем преобразование Фурье

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du \tag{9}$$

функции $\lambda(u)$ берется как несобственный интеграл. Если суммирующая функция $\lambda(u)=\lambda_{\delta}(u)$ такая, что $\lambda\left(\frac{k}{\delta}\right)=\lambda_{\delta,k}$, $\lambda(0)=1,$ то, как следует из равенства (2.3) работы [9], для $f\in H^{\alpha}$ и линейного метода $U_{\delta}(f;x)$ имеет место равенство

ISSN 0572-2691

$$f(x)-U_\delta(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f(x)\right)\int\limits_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\,dt, \qquad (10)$$

которое является интегральным представлением правой части (4). Далее, выбрав в качестве линейного метода $U_\delta(f;x)$ в (10) обобщенный интеграл Пуассона $P_{s,q}(f;x)$ и учитывая при этом (4), получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}(H^\alpha;P_{s,q})_C\le\frac{1}{\pi\delta^\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\right|dt. \qquad (11)$$

Пусть число $\theta=\theta_\delta$, $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$, таково, что функция $T(t)$ вида (9) сохраняет знак в каждом из интервалов $(-\theta,0)$ и $(0,\theta)$.

Рассмотрим функцию

$$G(x)=\begin{cases}\chi|x|^\alpha\operatorname{sign}T(x)+C, & |x|<\theta,\\ \chi(\pi-x)^\alpha\left(\dfrac{\theta}{\pi-\theta}\right)^\alpha\operatorname{sign}T\left(\dfrac{\theta}{2}\right)+C, & x\in[\theta,\pi],\\ \chi(\pi+x)^\alpha\left(\dfrac{\theta}{\pi-\theta}\right)^\alpha\operatorname{sign}T\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)+C, & x\in[-\pi,-\theta],\end{cases}$$

где $\chi=1$ при $T\left(\frac{\theta}{2}\right)T\left(-\frac{\theta}{2}\right)>0$ и $\chi=2^{\alpha-1}$ при $T\left(\frac{\theta}{2}\right)T\left(-\frac{\theta}{2}\right)<0$, а C определено условием $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(x)\,dx=\frac{a_0}{2}$; $G(x+2\pi)=G(x)$. Очевидно, что функция $G(x)\in H^\alpha$ и

$$G(0)-P_{s,q}(G,0)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(G\left(\frac{t}{\delta}\right)-C\right)\int\limits_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\,dt=$$

$$=\frac{\chi}{\pi\delta^\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^a\left|\int\limits_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\right|dt+O\left(\frac{1}{\delta^\alpha}a(\alpha,\lambda)\right), \qquad (12)$$

где

$$a(\alpha,\lambda)=\int\limits_{|t|\ge\delta\theta}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^{\infty}\lambda(u)\cos ut\,du\right|dt. \qquad (13)$$

Из (11) и (12) при $0\le\alpha<1$ и $2^{\alpha-1}\le\chi=\chi(\alpha)\le1$ получаем равенство

$$\mathcal{E}(H^\alpha;P_{s,q})_C=\frac{\chi}{\delta^\alpha}A(\alpha,\lambda)+O\left(\frac{1}{\delta^\alpha}a(\alpha,\lambda)\right). \qquad (14)$$

Пользуясь формулами (14), находим оценки верхних граней величины (4).

Как следует из (2), метод суммирования обобщенного интеграла Пуассона определяется суммирующей функцией $\lambda(u):=\left(1+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q u\right)e^{-u}$, причем $\lambda_{\delta,k}=\lambda\left(\frac{k}{\delta}\right)$. Тогда $\lambda''(u)=e^{-u}(1+\gamma_{s,q}(\delta)(u-2))$. Поскольку $\lambda(u)$ выпуклая вниз и $e^{-u}\left(1+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q (u-2)\right)<1$, то получим следующие оценки интегралов (7), положив $a=1$:

$$\int_0^{1/2} u^{1-\alpha}\,|d\lambda'(u)|=\int_0^{1/2} u^{1-\alpha}e^{-u}\left(1+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q (u-2)\right)du\le\int_0^{1/2} u^{1-\alpha}du\le K_1;$$

$$\int_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}\,|d\lambda'(u)|\le 2^{\alpha}\int_{1/2}^{3/2}u\,|d\lambda'(u)|\le K_2,$$

а также очевидно, что

$$\int_{3/2}^{\infty}(u-1)|d\lambda'(u)|\le\left(1-2\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\right)\int_{3/2}^{\infty}ue^{-u}du+$$

$$+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\int_{3/2}^{\infty}u^2e^{-u}du\le K_3.$$

Таким образом, интегралы (7) сходятся.

Для доказательства сходимости интеграла (8), т.е.

$$A(\alpha,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}t^{\alpha}\left|\left(\int_0^{\infty}1+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\right)e^{-u}\cos ut\,du\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}t^{\alpha}\left|\int_0^{\infty}e^{-u}\cos ut\,du+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\int_0^{\infty}ue^{-u}\cos ut\,du\right|dt, \tag{15}$$

применим формулы 3.893.2 и 3.944.6 из [38], согласно которым

$$\int_0^{\infty}e^{-u}\cos ut\,du=\frac{1}{1+t^2},\quad \int_0^{\infty}ue^{-u}\cos ut\,du=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}. \tag{16}$$

Пользуясь формулами 3.241.2 и 3.241.5 из [38], находим

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}}{1+t^2}dt=\sec\frac{\alpha\pi}{2},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2}dt-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2}}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha-1)\pi}{2}-\frac{(\alpha+1)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha+1)\pi}{2}=-\alpha\sec\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{17}$$

На основании (15)–(17) получаем

$$A(\alpha,\lambda)=\sec\frac{\alpha\pi}{2}-\alpha\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\sec\frac{\alpha\pi}{2}=$$

$$=\sec\frac{\alpha\pi}{2}\left(1-\alpha\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\right). \tag{18}$$

Далее, используя разложение экспоненциальной функции в ряд Тейлора, имеем

$$\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q=\delta s\left(1+1-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2\delta^2}-\ldots\right)\left(1-1+\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2\delta^2}+\ldots\right)^q=$$

$$=\begin{cases}2s+O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & q=1;\\[2ex] \dfrac{2s}{\delta^{q-1}}+O\left(\dfrac{1}{\delta^q}\right), & q>1.\end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, согласно (18) и (19) получаем оценку

$$A(\alpha,\lambda)=\begin{cases}(1-2s\alpha)\sec\dfrac{\alpha\pi}{2}+O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & q=1;\\[2ex] \sec\dfrac{\alpha\pi}{2}+O\left(\dfrac{1}{\delta^{q-1}}\right), & q>1.\end{cases} \tag{20}$$

Для оценки интеграла (13) воспользуемся равенствами (16), положив в (13) $\theta=\frac{\pi}{2}$. Тогда получим

$$a(\alpha,\lambda)=2\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left|\int_0^\infty\left(1+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q u\right)e^{-u}\cos ut\,du\right|dt=$$

$$=2\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left(\frac{1}{1+t^2}+\delta s\left(1+e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^q\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right)dt.$$

Приняв во внимание, что

$$\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty\frac{t^\alpha dt}{1+t^2}\le\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^{\alpha-2}dt\le\frac{K_1}{\delta^{1-\alpha}},$$

$$\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2} \le \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty} \frac{t^{\alpha}dt}{1+t^2} \le \frac{K_2}{\delta^{1-\alpha}},$$

получаем искомую оценку интеграла $a(\alpha, \lambda)$:

$$a(\alpha, \lambda) = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\right). \tag{21}$$

С учетом (14), (20) и (21) для величины (4) вытекают оценки (5) и (6).

Теорема доказана.

Как отмечалось выше, при $s = 0$ из (3) получаем интеграл Абеля–Пуассона $A_\delta(f; x)$, а при $q = 1, s = 1/2$ — бигармонический интеграл Пуассона $B_\delta(f; x)$. Поэтому из теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие. Для $0 < \alpha < 1$ при $\delta \to \infty$ имеют место асимптотические равенства

$$\mathcal{E}(H^\alpha; A_\delta)_C = \sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right), \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = (1-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{23}$$

Справедливость асимптотических равенств (22), (23) установлена в [39, 13] соответственно.

Заключение

Построение и анализ модели любого социального явления или процесса весьма сложно из-за сложности самой формализации. Явное знание динамики социальных показателей, порождаемых внутренними свойствами социума, требует, по мнению многих исследователей, нового подхода к построению моделей социальных процессов. Таким образом, актуально развитие асимптотических методов, которые могут применяться в тех случаях, когда создание математической модели для описания процессов, протекающих в обществе, сталкивается с трудностями. Рассмотренная в работе задача Колмогорова–Никольского для обобщенных интегралов Пуассона на классах функций Липшица не только способствует дальнейшему развитию данного направления исследований, но и раскрывает новые перспективы его прикладного характера [40, 41].

Получена оценка равномерных уклонений обобщенных дельта-операторов Пуассона $P_{s,q}(f; x)$ от непрерывных функций f, удовлетворяющих условию Липшица порядка α. При $s = 0$ и $s = 1/2, q = 1$ получаем решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Абеля–Пуассона $A_\delta(f; x)$ и бигармонических интегралов Пуассона $B_\delta(f; x)$ на классах H^α, $0 < \alpha < 1$.

У.З. Грабова, С.А. Сальнікова

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА І ЙОГО ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ

Математичні методи дослідження, засновані на статистиці, застосовуються в соціології досить давно. Функціонування соціально-економічних систем —

складний процес, обумовлений великою кількістю різноманітних факторів. Таким чином, при побудові моделей соціально-економічних процесів необхідно вирішувати завдання як декомпозиції структур і процесів, так і їх інтеграції в єдину системну модель з урахуванням мінливих умов зовнішнього середовища. Математичне моделювання таких завдань може здійснюватися методами мережевого аналізу або теорії ігор, що дозволяє знайти оптимальні стратегії поведінки конкуруючих сторін. Центральну роль в теорії ігор відіграють асимптотичні постановки, оскільки в силу складної стратегічної природи явні рішення вдається знайти лише в дуже рідкісних випадках. Велика кількість моделей, що створюються для вивчення складних процесів, які відбуваються в суспільстві, — це динамічні системи або неавтономні диференціальні чи різницеві рівняння з великим числом параметрів. У цій ситуації важливо вибрати відповідний інструмент для вивчення поведінки таких систем. У даній роботі в якості агрегатів наближення розглядаються узагальнені дельта-оператори Пуассона, оскільки періодичні процеси, що поділяються на гармонічні і полігармонічні, забезпечують внутрішню цілісність складних систем та їх динамічне функціонування. Вивчаються питання асимптотичної поведінки точних верхніх граней наближень узагальненими дельта-операторами Пуассона на класах періодичних функцій, що задовольняють умові Ліпшиця. Отримані оцінки забезпечують розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для узагальнених дельта-операторів Пуассона і класів Ліпшиця. Доведення побудовано на використанні формул, що дають інтегральні представлення відхилень лінійних методів, які породжуються лінійними методами підсумування рядів Фур'є на множинах періодичних функцій в рівномірній метриці, отриманих у роботах Л.І. Баусова. Результати можуть бути ефективним інструментом моделювання процесів соціальної динаміки.

Ключові слова: соціально-економічні системи, динаміка соціальних показників, оптимальні стратегії, асимптотичні рівності, лінійні методи з дельта-подібним ядром, класи Ліпшиця.

U.Z. Hrabova, S.A. Salnikova

GENERALIZED POISSON INTEGRAL AND ITS APPLIED ASPECTS

Mathematical methods based on statistics have been used in sociology for a long time. The functioning of socio-economic and socio-politic systems is a complex process, which is caused by a number of various factors. Thus, the construction of models of socio-economic and socio-politic processes requires solving problems of both the decomposition of structures and processes, and their integration into a single system model, taking into account the changing conditions of the external environment. Mathematical modeling of such problems can be carried out by methods of network analysis or game theory, which allows finding optimal strategies for the behavior of competitive parties. Asymptotic formulations have a central role in game theory, since, due to the complex strategic nature, explicit solutions can be found only in very rare cases. A large number of models created to study complex social processes that occur in society are dynamical systems, or non-autonomous differential equations, or difference equations with a large number of parameters in any cases. In this situation, it is important to choose an appropriate tool for studying the behavior of such systems. In this paper, generalized Poisson delta operators are considered as approximating aggregates, since periodic processes, which are subdivided into harmonic and polyharmonic, provide the internal integrity of complex systems and their dynamic functioning. Questions of the asymptotic behavior of the exact upper bounds for approximations by generalized Poisson delta operators on classes of periodic functions that satisfy the Lipschitz condition are also studied. The received formulas provide a solution to the Kolmogorov-Nikol'ski problem for generalized Poisson delta operators and Lipschitz classes. The proof is based on the use of formulas that give integral representations of the deviations of linear methods generated by linear processes of summation of Fourier series on sets of periodic functions in the uniform metric obtained in the works of L.I. Bausov. The results can be an effective tool for modeling the processes of social dynamics.

Keywords: socio-economic systems, dynamics of social indicators, optimal strategies, asymptotic equalities, linear methods with a delta-like kernel, Lipschitz classes.

1. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI:10. 1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
2. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293**(Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
3. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291**(Suppl 1). P. 56–65. DOI:10.1134/S0081543815090047.
4. Chikrii A.O., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst.Math.* 2010. **268** (Suppl 1), P. 54–70. DOI:10.1134/s0081543810050056.
5. Chikrij A.A., Matichin I.I., Riemann-Liouville. Caputo and sequential derivatives in differential games. In Breton M., Szajowski K. (eds) *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games*, Birkhauser Boston. 2011. **11**. P. 61–81. DOI:10.1007/978-9-8176-8089-3_4.
6. Zholtkevych G., Muradyan O., Ohulchanskyi K., Shelest S. About one approach to modelling dynamics of network community opinion. *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications.* CCIS. Springer, Cham. 2020. **1175**. P. 327–347. DOI: 10.1007/978-3-030-39459-2_15.
7. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
8. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/ JAutomatInfScien.v49.i10.80.
9. Bausov L.I. Linear methods of summation of Fourier series with prescribed rectangular matrices. II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1966. **55**, N 6. P. 3–17.
10. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
11. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/ A:1005285818550.
12. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 0.1007/s11253-018-1528-6.
13. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
14. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. **72**, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
15. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. P. 77–86. DOI: 10.1615/ jautomainfscien.v50.i8.70.
16. Степанец А. И. Методы теории приближения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
17. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
19. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/ cmp.12.1.138-147.
20. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ ACUTM.2018.22.19.
21. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.

22. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P.1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
23. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N8. P. 1224–1237. DOI:10.1007/s11253-007-0082-4.
24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
25. Hrabova U. Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 12. P. 57–70. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60.
26. Hrabova U. Z. Uniform approximations by the Poisson threeharmonic integrals on the Sobolev classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. **51**, N 12. P. 46–55. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i12.50.
27. Грабова У.З. Приближение сопряженных периодических функций их тригармоническими интегралами Пуассона. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2020. N 5. С. 3–10.
28. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by threeharmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: org/10.1007/s10958-020-04721-4.
29. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^r_\beta H^\alpha$. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2018. **231**, N 1. P. 41–47. DOI:10.1007/s10958-018-3804-2.
30. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P.1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
31. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. Approximation of functions from the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
32. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
33. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^\psi_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
34. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9
35. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^\psi_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1
36. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2
37. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2. P. 321–334. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334
38. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
39. Баскаков В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона. *Мат. заметки.* 1975. **17**, № 2. С. 169–180.
40. Tovkach R., Kharkevych Y. and Kal'chuk I. Application of a Fourier series for an analysis of a network signals. 2019 *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT),* Kyiv, Ukraine. 2019. P. 107–110. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030488.
41. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y. and Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC),* Kyiv, Ukraine. 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

Получено 08.11.2020