УДК 519.6

О.Л. Швай

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, краевая задача, граничные свойства, интеграл Гаусса–Вейерштрасса, модуль непрерывности.

Введение

Развитие современного математического моделирования социальных и естественных явлений практически невозможно без исследования методов решений дифференциальных уравнений в частных производных. Интеграл Гаусса–Вейерштрасса [1] является классическим примером решения соответствующего дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа, что представляет определенный интерес как с точки зрения игровых задач динамики [2–6], так и с точки зрения теории аппроксимации функций.

Интеграл Гаусса–Вейерштрасса относится к семейству линейных положительных интегралов типа Пуассона [7–13], аппроксимативные свойства которых достаточно хорошо описаны в зарубежной и отечественной научной литературе. В то же время оставались малоисследованными некоторые аппроксимативные свойства и характеристики интегралов Гаусса–Вейерштрасса на границе области, в которой они заданы. Именно поэтому данная работа посвящена исследованию граничных свойств интегралов Гаусса–Вейерштрасса в терминах модуля непрерывности второго порядка.

Постановка задачи

В [14] рассмотрена краевая задача (в единичном круге) для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{(-1)^{\gamma+1}}{r^2}\cdot\frac{\partial^{2\gamma}U}{\partial\theta^{2\gamma}}=0 \qquad (1)$$

(γ — натуральное число, $0<r<1$, $-\pi\le\theta\le\pi$) при условии, что функция $U(\theta, r)$ ограничена в единичном круге $\Omega=(0<r<1; -\pi\le\theta\le\pi)$ и

$$U(\theta, r)\big|_{r=1}=f(\theta), \qquad (2)$$

где $f(\theta)$ — суммируемая 2π-периодическая функция. Решением краевой задачи (1), (2), согласно [14], является функция

$$U_{r,\gamma}(f;\theta)=A_{r,\gamma}(f;\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\theta)K_\gamma(r,t)dt, \qquad (3)$$

которую принято называть интегралом типа Абеля–Пуассона. Соответственно величину

$$K_\gamma(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^{k^\gamma}\cos kt,\ \ 0<r<1,\ \ \gamma\in N, \qquad (4)$$

называют ядром интеграла типа Абеля–Пуассона.

Следует отметить, что если в соотношениях (3), (4), предположим, $\gamma=1$, то получим так называемый интеграл Пуассона [15, 16]

$$A_{r,1}(f;\theta)=P_r(f;\theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+\theta)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kt\right)dt\,.$$

Если в соотношениях (3), (4) предположим, что $\gamma=2$, то получим интеграл Гаусса–Вейерштрасса [1], а именно

$$A_{r,2}(f;\theta)=W_r(f;\theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+\theta)K(r,t)dt\,, \tag{5}$$

где

$$K(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^{k^2}\cos kt \tag{6}$$

— ядро этого интеграла.

Имеется цикл работ [17–26], в которых изучены аппроксимативные свойства интегралов типа Абеля–Пуассона для различных классов функций. Что же касается аппроксимативных свойств интегралов Гаусса–Вейерштрасса, то здесь успехи были более умеренными. Именно поэтому основная цель данной работы — детальное изучение некоторых аппроксимативных свойств интегралов Гаусса–Вейерштрасса.

О некоторых аппроксимативных свойствах интегралов Гаусса–Вейерштрасса

Пусть $L_p(-\infty;\infty),\ 1\le p<\infty,$ — класс функций $f(x),\ -\infty<x<\infty$, конечной нормы, определяемой с помощью соотношения

$$\|f\|_{L_p}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Известно [27, с. 44], что если $e^{-cx}f(x)\in L_1(-\infty;\infty)$ при некотором положительном c, то в каждой точке x_0 непрерывности функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{x\to x_0}W_r(f;x)=f(x_0)\,, \tag{7}$$

не зависящий от способа построения интеграла Гаусса–Вейерштрасса $W_r(f;x)$ [28, с. 229].

Последнее соотношение (7) можно рассматривать как сходимость в метрике соответствующего пространства $L_p(-\infty;\infty)$, а именно

$$\lim_{r\to 1-}\left\|W_r(f;\cdot)-f(\cdot)\right\|_{L_p}=0\,. \tag{8}$$

Равенство (8) можно уточнить, указав скорость отклонения интеграла Гаусса–Вейерштрасса $W_r(f;x)$ при $r\to 1-0$ от функции $f(x)$, по которой фактически этот интеграл построен.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности некоторой точки $x,\ -\infty<x<\infty$, и модуль непрерывности второго порядка $\omega_2(f;t)\le\omega(t)$, где $\omega(t)$ (для всех $t>0$) — функция типа модуля непрерывности второго порядка, то в каждой точке $x,\ -\infty<x<\infty$, справедлива оценка

$$\left|W_r(f;x)-f(x)\right|\le\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\omega\left(\ln\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Перед тем как доказывать (9), найдем интегральное представление для величины

$$W_r(f;x)-f(x). \tag{10}$$

Так, с одной стороны, согласно формуле (19) из [14], интеграл Гаусса–Вейерштрасса можно представить в виде

$$W_r(f;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)e^{-\frac{t^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dt$$

или, что то же самое,

$$W_r(f;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\frac{(x-t)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dt. \tag{11}$$

Далее, если ввести обозначение

$$\frac{x-t}{2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}=y, \tag{12}$$

то $t=x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y$ è $dt=-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}dy$. Следовательно, интеграл (11) можно представить в виде

$$W_r(f;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)e^{-y^2}2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)\times$$

$$\times e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)e^{-y^2}dy+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)e^{-y^2}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(f\left(x+2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)+f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}y\right)\right)e^{-y^2}dy. \tag{13}$$

С другой стороны, легко показать, что имеет место равенство $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=1$ или, что то же самое, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}2f(x)e^{-t^2}dt. \tag{14}$$

Таким образом, объединяя (13) и (14), получим соотношение

$$W_r(f;x)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(f\left(x+2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)-2f(x)+f\left(x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)\right)e^{-t^2}dt. \tag{15}$$

Согласно обозначению (12) $x-2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t=y$ или, что то же самое, $t=\frac{x-y}{2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}$ и $dt=-\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}dy$. Следовательно, формула (15) приобретает вид

$$W_r(f;x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}\left(f\left(y+4\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)-2f\left(y+2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)+f(y)\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy. \qquad (16)$$

Согласно определению модуля непрерывности второго порядка, будем иметь

$$f\left(y+4\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)-2f\left(y+2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)+f(y)\le\omega\left(2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right). \qquad (17)$$

Далее, учитывая свойства модуля непрерывности, получим

$$\omega\left(2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}t\right)\le(1+2t)\omega\left(\sqrt{\ln\frac{1}{r}}\right). \qquad (18)$$

Если объединить соотношения (17) и (18), получим оценку сверху для интегрального представления (16)

$$\left|W_r(f;x)-f(x)\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{x-y}{\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}\right)\omega\left(\sqrt{\ln\frac{1}{r}}\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy=$$

$$=\omega\left(\sqrt{\ln\frac{1}{r}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy+\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}\frac{x-y}{\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy\right). \qquad (19)$$

Для вычисления первого интеграла из правой части (19) снова воспользуемся обозначением (12), в результате чего получим

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}. \qquad (20)$$

Аналогично для второго интеграла из правой части (19) получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln\frac{1}{r}}}\int_{-\infty}^{x}\frac{x-y}{\sqrt{\ln\frac{1}{r}}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\ln\frac{1}{r}}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}2te^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \qquad (21)$$

Подставляя (20) и (21) вместо соответствующих значений в правой части (19), убеждаемся в справедливости оценки (9).

Теорема доказана.

Заключение

В настоящей статье рассмотрены интегралы Гаусса–Вейерштрасса как решения соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, что, несомненно, вызывает определенный интерес с точки зрения игровых задач динамики. В ходе исследований изучены граничные свойства интегралов Гаусса–Вейерштрасса в терминах модуля непрерывности второго порядка. Доказанная в этой работе теорема устанавливает скорость сходимости интеграла Гаусса–Вейерштрасса от функции, по которой он фактически был построен. Результаты данной статьи будут способствовать дальнейшему распространению положений теории приближения функций на современные направления прикладной математики [29, 30].

О.Л. Швай

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ГАУССА–ВЕЙЄРШТРАССА

Розглядаючи різні схеми і алгоритми ігрових задач динаміки, дослідники часто стикаються з розв'язуванням диференціальних рівнянь в частинних похідних. Особливе місце серед останніх займають так звані рівняння еліптичного типу (згідно з відповідною класифікацією), за допомогою яких найбільш повно і якісно можна описати природні і соціальні процеси. Крім того, математичний апарат диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу дозволяє проникати в середовище детермінованих явищ і передбачати їх майбутнє. В той же час одним із найважливіших понять прикладної математики є поняття модуля неперервності. Термін «модуль неперервності» і його визначення було введено Анрі Лебегом на початку минулого століття з метою вивчення різноманітних властивостей неперервних функцій. Використовуючи поняття модуля неперервності і його властивості, можна досліджувати належність об'єкта, який вивчають, до певного класу функцій: Гельдера, Ліпшиця, Зигмунда та ін. Це, безсумнівно, дає можливість найбільш ефективно здійснювати наближення функцій різного роду операторами. У даній роботі на прикладі інтеграла Гаусса–Вейєрштрасса, як розв'язку відповідного диференціального рівняння еліптичного типу, досліджується його швидкість збіжності в термінах модуля неперервності другого порядку до функції, по якій його фактично було побудовано. А саме, були вивчені граничні властивості інтеграла Гаусса–Вейєрштрасса, як лінійного додатного оператора, який здійснює своє найкраще наближення на функціях класу Зигмунда. Отримані в даній статті результати в подальшому можуть використовуватися при розв'язанні багатьох задач прикладної математики.

Ключові слова: диференціальні рівняння в частинних похідних, крайова задача, граничні властивості, інтеграл Гаусса–Вейєрштрасса, модуль неперервності.

O.L. Shvai

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY GAUSS-WEIERSTRASS INTEGRALS

When considering various schemes and algorithms for game problems of dynamics, researchers often have to deal with solutions of partial differential equations. A special place among the latter is occupied by the so-called equations of elliptic type (according to the corresponding classification), with the help of which natural and social processes can be described most fully and qualitatively. Moreover, the mathematical apparatus of partial differential equations of elliptic type makes it possible to get into the environment of deterministic phenomena and thus makes it possible to foresee their future. This fact undoubtedly increases the significance of the above type of equations among others in the sense of their application to mathematical modeling. At the same time, one of the most important concepts in applied mathematics is the concept of the modulus of continuity. The term "modulus of continuity" and its definition were introduced by Henri Lebesgue at the beginning of the last century in order to study various properties of continuous functions. Using the concept of the modulus of continuity and its properties, it is possible to investigate the belonging of the object under study to a certain class of functions: Hölder, Lipschitz, Zygmund, etc. This undoubtedly makes it possible to approximate functions of various kinds of operators most effectively. In this paper, using the example of the Gauss-Weierstrass integral as a solution to the corresponding differential equation of elliptic type, we study its rate of convergence in terms of the modulus of continuity of the second order to the function by which it was actually constructed. Namely, the boundary properties of the Gauss-Weierstrass integral were studied as a linear positive operator that realizes its best approximation on functions from the Zygmund class. The results obtained in this article can further be used to solve many problems in applied mathematics.

Keywords: partial differential equations, boundary value problem, limit properties, Gauss-Weierstrass integral, modulus of continuity.

1. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
2. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
3. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
4. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
5. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
6. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. and Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
7. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu.* Math. 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
8. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment.* Univ. Tartu. Math. 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
9. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
10. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
11. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
12. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W^r_{\beta,\infty}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ*. 2019. **11**, N 2. P. 10–23. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334.
13. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4.
14. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel–Poisson type. *Math. Notes.* 1975. **17**, N 2. P. 101–107. DOI: 10.1007/BF01161864.
15. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/cmp.12.1.138-147.

16. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J*. 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
17. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
18. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. 72, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
20. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
25. Kharkevych Yu.I., Kal’chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
26. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^{\psi}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
27. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. 480 с.
28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 735 с.
29. Tovkach R., Kharkevych Y., Kal'chuk I. Application of a Fourier series for an analysis of a network signals. *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory*. ATIT 2019 Proceedings. 2019. P. 107–110. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030488.
30. Makarchuk A., Kal’chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)*. Ukraine: Kyiv. 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

Получено 08.12.2020