

УДК 629.783

М.Ю. Ракушев

**МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПО ЭНЕРГИИ
ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА
ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Ключевые слова: прогнозирование движения космических аппаратов, стабилизация методом Баумгарта, дифференциально-тейлоровские преобразования, адаптивные схемы интегрирования.

Введение

Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения космических аппаратов (КА) неизбежно связано с определенными трудностями. Правые части дифференциальных уравнений, описывающих орбитальное движение КА, — быстро меняющиеся функции, которые необходимо интегрировать с малым шагом. Это приводит к увеличению объема вычислений, что, в свою очередь, сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Кроме того, уравнения движения КА неустойчивы по Ляпунову [1, 2], что дополнительно создает благоприятные условия для усиления разного рода неустраняемых ошибок численного интегрирования, в том числе описанных выше ошибок округления. Так, ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего шага, которые в последующем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому при численном интегрировании для борьбы с ляпуновской неустойчивостью предпочтение отдают устойчивым уравнениям.

Одним из простых, но мощных методов «искусственной» стабилизации для задач численного прогнозирования в небесной механике, в целом, и движения КА, в частности, является метод Баумгарта [2, 3]. Основой данного метода является «искусственное» введение в исходное дифференциальное уравнение стабилизирующих членов, компенсирующих отклонение численного решения в фазовом пространстве интегрируемых параметров от некоторой опорной интегральной поверхности. Как показывает практика, численное интегрирование стабилизированной системы обеспечивает устойчивое (невозрастающее) поведение ошибки в энергии и ее линейный рост в координатах, тогда как интегрирование исходной неустойчивой системы приводит к линейному росту ошибки в энергии и квадратичному — в координатах. Несмотря на то что после стабилизации уравнения становятся сложнее и требуют для интегрирования большего объема вычислений, для некоторых задач прогнозирования движения КА они значительно уменьшают

© М.Ю. РАКУШЕВ, 2021

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2021, № 2*

вычислительную сложность интегрирования, так как стабилизация позволяет увеличить шаг интегрирования, сохраняя при этом точность численного решения [2].

Возможным подходом к численному интегрированию дифференциальных уравнений, в целом, и движения КА, в частности, является использование математического аппарата дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразований [4, 5]. На основе данного математического аппарата разработано несколько методов численного прогнозирования движения КА, в том числе с адаптацией по шагу; по шагу и порядку интегрирования [5, 6]. Однако для интегрирования стабилизированных уравнений движения КА данный математический аппарат не применялся. В связи с этим остается открытым вопрос о выборе параметров стабилизации методом Баумгарта при решении задачи прогнозирования движения КА интегрированием на основе ДТ-преобразований.

Таким образом, цель статьи — разработка на основе ДТ-преобразований численно-аналитического метода интегрирования стабилизированных по энергии методом Баумгарта дифференциальных уравнений движения КА.

Изложение основного материала

Метод Баумгарта реализует численную стабилизацию решения заданного дифференциального уравнения и предусматривает введение в такое уравнение специальных «стабилизирующих» членов. Такие члены определяются из известных для исходного дифференциального уравнения интегралов, несут дополнительную (априорную) информацию о решении и рассматриваются как необходимые условия, накладываемые на решение. Из всех возможных интегральных соотношений для задачи орбитального полета КА отдельно выделяют энергетические, так как именно стабилизация по энергии наилучшим образом помогает в борьбе с ляпуновской неустойчивостью [2].

Рассмотрим задачу прогнозирования движения КА в Гринвичской прямоугольной системе координат (ГСК). Модель движения КА в ГСК имеет вид [2, 5, 7]

$$\frac{dq}{dt} = u(q, t) + g(q, t) \text{ при } q_0 = q(t_0), \quad (1)$$

где $q = (x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z)^T$, q_0 — вектор фазовых координат (положение и скорость) КА в ГСК и его начальное значение; t , t_0 — физическое время (независимая переменная дифференциального уравнения) и его начальное значение; $u(q, t)$, $g(q, t)$ — члены, определяющие ускорения от обобщенно-потенциальных и непотенциальных сил.

В (1) обобщенно-потенциальные силы $u(q, t)$ определяют ускорение от притяжения Земли (геопотенциала), центробежное ускорение и ускорение Кориолиса. К непотенциальным силам $g(q, t)$ относятся аэродинамическое сопротивление атмосферы, притяжение Луны, Солнца, световое давление и т.д.

Интеграл от (1) — механическая энергия орбитального движения (далее энергия) КА в ГСК, определяется при условии учета только обобщенно-потенциальных сил $u(q, t)$ (непотенциальные силы $g(q, t) \ll u(q, t)$ рассматриваются как возмущение опорного движения) [7, 8]

$$c = \frac{v^2}{2} - U_n - \frac{1}{2} \Omega_3^2 (x^2 + y^2), \quad (2)$$

где c — энергия КА; U_n — потенциал земного притяжения (геопотенциал); $v = (v_x \ v_y \ v_z)^T$ — вектор скорости КА; Ω_3 — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси.

Метод Баумгарта для стабилизации уравнения (1) по энергии (2) имеет вид [2]

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = u(q, t) + g(q, t) - \gamma \Delta c \left(\frac{\partial c}{\partial q} \frac{\partial c}{\partial q} \right)^{-1}, \Delta c = c - c_*, \\ \frac{dc_*}{dt} = \left(\frac{\partial c}{\partial q} g(q, t) \right), \end{cases}$$

при $q_0 = q(t_0)$, $c_{*0} = c(q_0)$, (3)

где c , c_* , c_{*0} — энергия КА, ее опорное и начальное значения; γ — стабилизирующий параметр (задается опытным путем, $\gamma \neq 0$).

Отличительной особенностью системы (3) является то, что она асимптотически устойчива по выбранной интегральной поверхности — механической энергии КА c , т.е. $\Delta c \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых q . Описанное свойство дифференциального уравнения (3) существенно при его численном интегрировании, так как позволяет удерживать численное решение (на которое существенно влияют различные ошибки) около интегральной поверхности, если учитывать при этом топологические свойства точного решения. Для сравнения: численное интегрирование исходного уравнения (1) сопровождается дрейфом ошибки от интегральной поверхности.

Получим стабилизированную модель (3) для прогнозирования движения КА ближнего космоса. Для этого зададим вид обобщенно-потенциальных сил $u(q, t)$ и в непотенциальных силах $g(q, t)$ учтем только сопротивление атмосферы:

$$u(q, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x + 2\Omega_0 v_y \\ \frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y - 2\Omega_0 v_x \\ \frac{\partial U_n}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad g(q, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_x \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_y \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_z \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial c}{\partial q} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U_n}{\partial x} - \Omega_0^2 x \\ -\frac{\partial U_n}{\partial y} - \Omega_0^2 y \\ -\frac{\partial U_n}{\partial z} \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial q} \right)^{-2} = \left(\left(\frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x \right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y \right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial z} \right)^2 + v^2 \right)^{-1}, \quad (5)$$

$$\frac{dc_*}{dt} = \left(\frac{\partial c}{\partial q} g(q, t) \right) \Rightarrow \frac{dc_*}{dt} = -S_b \rho_{atm} v_{ka} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \Rightarrow \frac{dc_*}{dt} = -S_b \rho_{atm} v_{ka}^3, \quad (6)$$

где S_b , ρ_{atm} — баллистический коэффициент КА, плотность воздуха; v_{ka} — модуль скорости КА.

Для ГСК наиболее распространенной формой определения геопотенциала U_n является его разложение в ряд по сферическим функциям [2, 5, 7].

С учетом (2), (4)–(6) стабилизированное уравнение (3) запишем в виде (все обозначения совпадают с введенными ранее):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x \right), \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y \right), \\ \frac{dz}{dt} = -\gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} \frac{\partial U_n}{\partial z}, \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x + 2\Omega_0 v_y - S_b \rho_{atm} v_{ka} v_x + \gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y - 2\Omega_0 v_x - S_b \rho_{atm} v_{ka} v_y + \gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} v_y, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial U_n}{\partial z} - S_b \rho_{atm} v_{ka} v_z + \gamma \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} v_z, \\ \frac{\Delta c}{(\partial c / \partial q)^2} = \frac{0,5v^2 - U_n - 0,5\Omega_3(x^2 + y^2) - c_*}{(\partial U_n / \partial x + \Omega_0^2 x)^2 + (\partial U_n / \partial y + \Omega_0^2 y)^2 + (\partial U_n / \partial z)^2 + v^2}, \\ \frac{dc_*}{dt} = -S_b \rho_{atm} v_{ka}^3. \end{array} \right. \quad (7)$$

Последнее уравнение в (7) в дифференциальной форме определяет работу действующих на КА непотенциальных сил, изменяющих его механическую энергию орбитального движения. Для выбранной модели движения это — сила аэродинамического торможения.

Интегрирование стабилизированного дифференциального уравнения движения КА проведем на основе математического аппарата ДТ-преобразований Г.Е. Пухова [9]:

$$Z(k) = P\{(k)\} = \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k z(t)}{\partial t^k} \Big|_{t=t_*} = \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k z(t_*)}{\partial t^k}, \quad (8)$$

$$z(t) = P^{-1}\{Z(k)\} = \sum_{k_w=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_*)^k}{h^k} Z(k), \quad (9)$$

где $P\{\dots\}$, $P^{-1}\{\dots\}$ — оператор прямого и обратного ДТ-преобразований; $z(t)$ — скалярная функция, дифференцированная необходимое количество раз по t ; t — скалярный аргумент, по которому проводится преобразование; t_* — значение аргумента, при котором выполняется преобразование; h — отрезок аргумента, на котором функция $z(t)$ представляется рядом Тейлора по t ; k — целочисленный аргумент $0, 1, \dots$; $Z(k)$ — дискретная функция по аргументу k .

Множество значений $Z(k)$ называют ДТ-спектром, а значение функции $Z(k)$ при конкретных значениях аргумента k — дискретами ДТ-спектра, или Т-дискретами.

ДТ-преобразования — математический аппарат прикладного анализа, позволяющий решать интегро-дифференциальные задачи в численном, аналитическом и численно-аналитическом виде. Одним из основных свойств ДТ-преобразований является возможность рекуррентного вычисления Т-спектра (коэффициентов ряда

Тейлора) решаемой задачи. При этом такой расчет методически просто реализуется на основе специализированной библиотеки процедур на ЭВМ, заменяя методическую сложность проведения аналитических операций по взятию соответствующих производных на вычислительную сложность реализации рекуррентных зависимостей. Описанное свойство ДТ-преобразований в значительной степени определяет возможность и целесообразность их применения для решения интегро-дифференциальных задач.

ДТ-схему интегрирования (7) для уменьшения громоздкости конечных формул получим для стабилизированного дифференциального уравнения в форме (3) при значении энергии КА (2). Для этого с учетом свойств ДТ-преобразований [5, 9] применим к (3) прямое преобразование (8):

$$\begin{cases} P \left\{ \frac{dq}{dt} = u(q, t) + g(q, t) - \gamma \Delta c \frac{\partial c}{\partial q} \left(\frac{\partial c}{\partial q} \frac{\partial c}{\partial q} \right)^{-1} \right\}, \\ P \left\{ \frac{dc_*}{dt} = S_b \rho_{ka} v_{ka}^3 \right\}, \quad \Delta c = c - c_* \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \left\{ \frac{dq}{dt} \right\} = P \left\{ u(q, t) + g(q, t) - \gamma \frac{c - c_*}{(\partial c / \partial q)^2} \frac{\partial c}{\partial q} \right\}, \\ P \left\{ \frac{dc_*}{dt} \right\} = P \left\{ S_b \rho_{ka} v_{ka}^3 \right\}. \end{cases}$$

Для иллюстрации получения рекуррентных зависимостей раскроем оператор дифференцирования по независимой переменной дифференциального уравнения (времени):

$$\begin{cases} \frac{k+1}{h} Q(k+1) = P \{ u(q, t) \} + P \{ g(q, t) \} - \gamma P \left\{ \frac{c - c_*}{(\partial c / \partial q)^2} \frac{\partial c}{\partial q} \right\}, \\ \frac{k+1}{h} C_*(k+1) = P \{ S_b \rho_{ka} v_{ka}^3 \}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} U(Q(k)) = P \{ u(q, t) \}, \quad G(Q(k)) = P \{ g(q, t) \}, \quad C(Q(k)) = P \{ c \}, \\ B_{stabil}(C(k), C_*(k), Q(k)) = P \left\{ \frac{c - c_*}{(\partial c / \partial q)^2} \frac{\partial c}{\partial q} \right\}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{h} Q(k+1) = U(Q(k)) + G(Q(k)) - \gamma B_{stabil}(C(k), C_*(k), Q(k)), \\ A_{atm}(Q(k)) = P \{ S_b \rho_{ka} v_{ka}^3 \}, \quad \frac{k+1}{h} C_*(k+1) = A_{atm}(Q(k)). \end{cases}$$

Зададим начальные значения для рекуррентного расчета ДТ-спектра и проведем обратное ДТ-преобразование (9)

$$\begin{cases} Q(0) = q(t_i), \quad C_*(0) = c_*(t_i), \quad c_*(t_0) = C(0), \\ U(k) = U(Q(k)), \quad G(k) = G(Q(k)), \quad C(k) = C(Q(k)), \\ B_{stabil}(k) = B_{stabil}(C(k), C_*(k), Q(k)), \\ Q(k+1) = \frac{h}{k+1} (U(k) + G(k) - \gamma B_{stabil}(k)), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max} - 1, \\ A_{atm}(k) = A_{atm}(Q(k)), \\ C_*(k+1) = \frac{h}{k+1} A_{atm}(k), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max} - 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad q(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} Q(k), \quad c_*(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} C_*(k), \quad (11)$$

где $q(t_{i+1})$, $c_*(t_{i+1})$ — спрогнозированные координаты и энергия КА; h , i — шаг интегрирования и узел вычислительной сетки; $Q(k)$, $U(k)$, $G(k)$, $C(k)$, $C_*(k)$ — Т-спектры вектора q , ускорений $u(q, t)$ и $g(q, t)$, энергий c и c_* ; $B_{\text{stabil}}(k)$, $A_{\text{atm}}(k)$ — Т-спектры стабилизирующего члена и работы неконсервативных сил; k_{\max} — порядок точности интегрирования (определяется количеством учтенных при восстановлении Т-дискрет).

Прямое ДТ-преобразование $P\{.. \}$ проводится в такой последовательности [5, 9]:

- исходные оригиналы (функции) разделяются на «элементарные» математические операции (суммирование, вычитание, умножение, деление, тригонометрические, степенные функции и т.д.);
- каждая «элементарная» операция вместе с ее оригиналом (по таблице соответствий) заменяется ее Т-изображением.

На первом этапе оригиналами являются традиционные для задачи прогнозирования движения КА зависимости по расчету ускорений от геопотенциала (например, рекуррентный расчет членов ряда сферических функций) и по расчету плотности атмосферы (например, по соответствующей динамической или статической модели атмосферы Земли).

Отдельно следует отметить, что в (7) формулы для c , $\partial c / \partial q$, $(\partial c / \partial q)^{-2}$ и $u(q, t)$, а также для c_* и $g(q, t)$ имеют много одинаковых членов, что существенно влияет на эффективность организации вычислений.

В итоге прямое преобразование (10) является системой рекуррентных зависимостей относительно Т-дискрет для модели (7). Из этой системы последовательно определяются дискреты ДТ-спектра при задании значения целочисленного аргумента от $k = 0$ до $k_{\max} - 1$. Обратное преобразование (11) реализует восстановление полученного ДТ-спектра в область оригиналов в виде k_{\max} -частичной суммы отрезка ряда Тейлора.

Прямое и обратное ДТ-преобразования (10), (11) определяют численно-аналитический метод прогнозирования стабилизированного по энергии движения КА на основе ДТ-преобразований, который задает явную одношаговую с постоянным шагом и порядком вычислительную схему интегрирования (7). Данная схема позволяет последовательно (начиная с $i = 0$) при заданных начальных условиях q_0 , c_{*0} (3) провести прогноз.

В адаптивных по шагу, а также по шагу и порядку ДТ-схемах шаг h_i и порядок $k_{\max i}$ интегрирования изменяются в разных узлах вычислительной сетки в зависимости от необходимой (заданной) точности интегрирования. Порядок разработки таких схем рассмотрен в [5, 6]. Основное их свойство — адаптация «а priori» (без пробных шагов), что обеспечивает их высокую вычислительную эффективность, так как практически отсутствуют дополнительные расчеты. Для сравнения: в традиционных численных методах такая адаптация происходит «а posteriori» (после выполнения шага), поэтому необходимо либо пересчитывать шаг, либо отбрасывать часть уже проведенных расчетов, что приводит к существенному увеличению дополнительных вычислений.

В [5, 6] для адаптации предложено использовать относительную ошибку интегрирования по координатам КА (фазовым переменным дифференциального

уравнения) — первая формула в (12). Однако для стабилизированного прогнозирования целесообразно рассмотреть адаптацию с использованием ошибки по энергии КА (выбранному для стабилизации интегралу исходного дифференциального уравнения) — вторая формула в (12). Такой подход по «искусственному» заданию ошибки использован, например, в [10].

$$h_i = h \left(\frac{\delta_x \|q_i\|}{\|Q(k_{\max})\|} \right)^{\frac{1}{k_{\max}}}, \text{ или } h_i = h \left(\frac{\delta_x \|c\|}{\|C(k_{\max})\|} \right)^{\frac{1}{k_{\max}}}. \quad (12)$$

Здесь h_i — адаптивный шаг; h — параметр, при котором проводится прямое ДТ-преобразование (10) (допускается $h = 1$, или $h = h_{i-1}$); δ_x — заданная относительная ошибка интегрирования на шаге; $\|\dots\|$ — оператор нормы, $Q(k_{\max})$, $C(k_{\max})$ — Т-дискреты с максимальными номерами.

При реализации адаптации (12) в (10), (11), обратное преобразование (11) изменяется на

$$t_{i+1} = t_i + h_i, \quad q(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{h_i^k}{h^k} Q(k), \quad c_*(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{h_i^k}{h^k} C_*(k). \quad (13)$$

Для оценки эффективности интегрирования стабилизированного по энергии дифференциального уравнения движения КА (7), на основе (10)–(13) проведено моделирование долгосрочного прогнозирования движения КА ближнего космоса для исходных данных из табл. 1 (параметры орбит КА). В модели движения КА учтены геопотенциал в форме разложения в ряд по сферическим функциям для поля 4×4 и статическая модель атмосферы ГОСТ-4401-64. Результаты моделирования приведены на рисунке (S — вычислительные затраты, оцененные в количестве вычислений правой части исходного (нестабилизованного) дифференциального уравнения; Δt_{BY} — абсолютное значение ошибки расчета времени прохождения восходящего узла орбиты); и в табл. 2 (h — шаг интегрирования; k_{\max} — порядок точности интегрирования; δ_x — заданная относительная ошибка интегрирования на шаге; γ — стабилизирующий параметр). На рисунке сплошная линия обозначает расчет без стабилизации и адаптации; точечная — со стабилизацией без адаптации; пунктирная — со стабилизацией и адаптацией по координатам КА (фазовым переменным интегрирования); штрих-пунктирная — со стабилизацией и адаптацией по энергии КА.

Таблица 1

Название	Апогей, км	Перигей, км	Наклонение, градусы	Интервал прогноза	
				витков	суток
МКС	440	417	51	500	33,13
МС-2-8	668	668	98	500	34
КА-1	300	300	63	300	18,76
КА-2	1100	300	98	300	20,49

Отдельно следует отметить, что стабилизация, усложняющая исходное дифференциальное уравнение (требующая большего количества вычислений для реализации одного шага), приводит к увеличению результирующей вычислительной сложности на одном шаге интегрирования. Однако для моделей движения в ГСК такое увеличение незначительно и составляет 3–7%. Это достигается за счет учета

«подобия» формул для c , $\partial c/\partial q$, $(\partial c/\partial q)^{-2}$ и $u(q, t)$, а также для c_* и $g(q, t)$ по расчету их одинаковых членов.

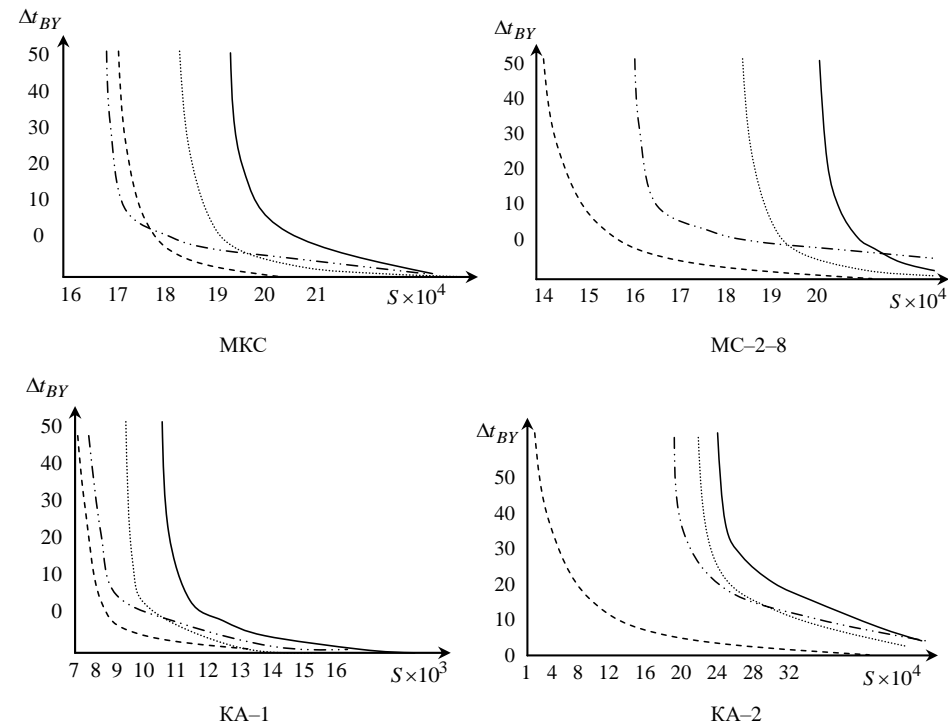


Таблица 2

Вариант прогноза		Параметры интегрирования			
Стабилизация	Адаптация	h, c	k_{\max}	δ_x	γ
нет	нет	400–1200	12		
есть	нет	500–1300	12		10^{-5} – 10^{-4}
есть	по координатам	300–1300	8–20	10^{-9} – 10^{-5}	10^{-5} – 10^{-3}
есть	по энергии	100–2000	8–35	10^{-15} – 10^{-8}	10^{-4} – 10^{-2}

Из результатов моделирования видно, что стабилизация по энергии при долгосрочном прогнозе движения КА ближнего космоса в Гринвичской прямоугольной системе координат позволяет на 10–15 % уменьшить вычислительные затраты на прогноз. Дополнительная реализация адаптации по шагу и порядку интегрирования обеспечивает уменьшение вычислительных затрат до 35 %.

Сравнение адаптивных схем интегрирования для адаптации по фазовым переменным дифференциального уравнения (координатам КА) и энергии КА (12) демонстрирует следующее:

- ДТ-схемы требуют задания различных параметров адаптации. При адаптации по энергии КА заданная относительная ошибка интегрирования на шаге на три–шесть порядков меньше, при этом значение стабилизирующего параметра на один порядок больше;
- оба подхода имеют соизмеримую вычислительную эффективность. Поэтому в общем случае следует использовать адаптацию по фазовым переменным интегрирования (самый обобщенный вариант), однако для некоторых орбит адаптация по энергии все же более предпочтительна.

Заключення

В статті розробтан численно-аналитический метод інтегрування стабілізованих по енергії методом Баумгарта диференціальних рівнянь руху КА. Отличительной особеностю запропонованого методу являється використання для інтегрування стабілізованого рівняння руху КА математического апарату диференціально-тейлоровських перетворень. Метод ефективний для довгострочного прогнозування руху КА.

Использование вместе со стабилизацией адаптивных ДТ-схем позволяет дополнительно повысить вычислительную эффективность решения задачи прогноза движения КА.

М.Ю. Ракушев

МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ СТАБІЛІЗОВАНОГО ЗА ЕНЕРГІЄЮ РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Для прогнозування руху космічних апаратів запропоновано чисельно-аналітичний метод інтегрування стабілізованого методом Баумгарта диференціального рівняння орбітального руху космічного апарата. Стабілізація диференціального рівняння руху методом Баумгарта здійснюється за енергією космічного апарата для зменшення впливу нестійкості за Ляпуновим на накопичення числових похибок інтегрування диференціального рівняння, що ефективно при довгостроковому числовому прогнозуванні руху космічних апаратів. Інтегрування стабілізованого рівняння проводиться на основі диференціально-тейлорівських перетворень. Розглянуто обчислювальні схеми зі сталим кроком та порядком інтегрування, а також схеми з адаптацією за кроком та порядком інтегрування. Для адаптивних схем наведено результати прогнозування руху космічних апаратів за критерієм «точність-обчислювальна складність» для заданої відносної похибки інтегрування за фазовими змінними інтегрування та енергією космічного апарата. Показано, що обидва варіанти потребують завдання різних внутрішніх параметрів адаптації, однак мають співмірну ефективність. Запропоновано використання розробленого методу інтегрування стабілізованих за енергією рівнянь для прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу в Гринвіцькій прямокутній системі координат.

Ключові слова: прогнозування руху космічних апаратів, стабілізація методом Баумгарта, диференціально-тейлорівські перетворення, адаптивні схеми інтегрування.

M.Yu. Rakushev

A METHOD FOR PREDICTING ENERGY-STABILIZED MOTION OF SPACECRAFT BASED ON DIFFERENTIAL TAYLOR TRANSFORMATIONS

To predict the motion of spacecrafts, a numerical-analytical method for integrating the differential equation of the orbital motion of a spacecraft stabilized by the Baumgart differential method is proposed. The stabilization of the differential equation of motion by the Baumgart method is carried out according to the energy of the spacecraft. Stabilization is carried out to reduce the influence of the Lyapunov instability on the accumulation of numerical errors in the integration of the differential equation,

which is effective when conducting a long-term numerical prediction of the motion of spacecraft. Integration of the stabilized equation is based on differential Taylor transformations. Computational schemes with a constant step and an integration order are considered, as well as schemes with adaptation by an integration step and order. For adaptive schemes, the results of forecasting the motion of spacecraft according to the criterion “accuracy-computational complexity» for a given relative error of integration with respect to integration phase variables and spacecraft energy are presented. It is shown that both options require setting various internal adaptation parameters, but they have comparable efficiency. Recommendations are proposed on the use of the developed method for integrating energy-stabilized equations for predicting the motion of spacecraft in the near space in the Greenwich rectangular coordinate system.

Keywords: spacecrafts motion prediction, Baumgart stabilization, differential Taylor transformations, adaptive integration schemes.

1. Иванов Д.С., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов. Под общ. ред. М.Ю. Овчинникова. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 118 с. doi:10.20948/mono-2016-trofimov.
2. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Учебное пособие. Томск : Томский государственный университет, 2007. 178 с.
3. Flores P., Machado M., Seabra E.A.R., Silva M.T. A parametric study on the baumgarte stabilization method for forward dynamics of constrained multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2011. **6** : 011019 P. 1–9. doi: 10.1115/1.4002338.
4. Sakka A.H., Sulayh A.M. On taylor differential transform method for the first painleve’ equation. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*. 2019. **12**(3). P. 391–408.
5. Ракушев М.Ю. Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень: монографія. Житомир : Видавець О.О. Євенок, 2015. 224 с. ISBN 978-617-7265-43-5.
6. Rakushev M. Computational scheme of ordinary differential equations integration on the basis of differential Taylor transformation with automatic step and order selection. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. **44**, N 12. P. 12–22. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i12.20.
7. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М. : Сов. радио, 1978. 384 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 2-е изд., испр. М. : Наука, 1966. 300 с.
9. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. К. : Наук. думка, 1986. 159 с.
10. Rakushev M. Prediction of spacecraft motion according to a stochastic model based on differential transformations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. 2017. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.30.

Получено 24.06.2020