УДК 519.837.2

М.Ш. Маматов, А.О. Зуннунов, Э.Э. Эсонов

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ МНОГИХ ИГРОКОВ НА ВЫПУКЛОМ КОМПАКТЕ*

Ключевые слова: дифференциальные игры, задача преследования, задача убегания, управление преследования, управление убегания, фазовые ограничения, групповое преследование.

Введение

Основы теории игр были заложены в первой половине XX века. Это были пошаговые и матричные игры, позже появились дифференциальные игры, изучаемые теперь в самых разных постановках. Неопределенность, с которой встречаемся в теории игр, может иметь различное происхождение. Однако, как правило, это — следствие сознательной деятельности другого игрока, отстаивающего свои интересы. В связи с этим под теорией игр часто понимают теорию математических моделей принятия решений в условиях конфликта нескольких сторон, имеющих различные интересы. Таким образом, моделями теории игр можно, в принципе, содержательно описывать весьма разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование, хозяйственные взаимоотношения между предприятиями промышленности и других отраслей и т.д. Такие модели принято называть играми. Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после выбора стратегии. Конфликтные ситуации можно представить как игру двух, трех и т.д. игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своей выгоды, своего выигрыша за счет другого [1–3].

Дифференциальные игры изучают задачу конфликтного управления при наличии двух или больше сторон, движения которых описываются дифференциальными уравнениями. Будем обозначать игроков буквами E — убегающий и P_i — i -й преследующий, они имеют возможность принимать решение непрерывно. В такой постановке траектории движения игроков представляют собой решения систем дифференциальных уравнений, правые части зависят от параметров, которые находятся под контролем игроков [3, 4].

Пусть $x_0 \in R^n$, $x_i \in R^n$, $1 \le i \le k$, $u_0 \in Q \subset R^n$, $u_i \in P \subset R^n$, $f(x_0, u_0)$, $g_i(x_i, u_i)$ — векторы функции размерности n, заданные на $R^n \times Q$ и $R^n \times P$ соответственно. Рассмотрим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_0 = f(x_0, u_0),\ \dot{x}_i = g_i(x_i, u_i),\ 1 \le i \le k, \tag{1}$$

с начальными условиями $x_0(0) = x_0^0$, $x_i(0) = x_i^0$, $1 \le i \le k$. Игроки E и P_i начинают движение из фазового состояния $x_0^0, x_i^0, 1 \le i \le k$, и перемещаются в фазовом пространстве R^n согласно (1), выбирая в каждом моменте времени значение

* Работа выполнена при финансовой поддержке Научных проектов фундаментальных исследований Министерство инновационного Развития Республики Узбекистан (проекты ОТ-Ф4-(36+32), ОТ-Ф4-33).

параметра $u_0 = u_0(t),\ u_0 \in Q \subset R^n,\ u_i = u_i(t),\ u_i \in P \subset R^n$ в соответствии со своими целями и информацией, доступной в каждом текущем состоянии.

Наиболее просто поддается описанию случай полной информации. В дифференциальной игре это означает, что игрокам в каждый момент времени t при выборе параметров $u_0 \in Q, u_i \in P$ известно время t и фазовые состояния — свое и противника. Иногда требуется знание одним из игроков, например игрокам P_i, в каждый текущий момент t значения параметра $u_0 \in Q$, выбранного игроком E в этот же момент [5–7]. В таком случае говорят, что игрок E дискриминирован, а сама игра называется игрой с дискриминацией игрока E. Параметры $u_0 \in Q, u_i \in P$ называются управлениями игроков E и P_i соответственно. Функции $x_0 = x_0(t),\ x_i = x_i(t),\ 1 \le i \le k$, удовлетворяющие уравнениям (1) и начальным условиям, называются траекториями движения игроков E и P_i.

Цели в дифференциальной игре определяются с помощью выигрыша, различным образом могут зависеть от реализовавшихся траекторий $x_0(t), x_i(t)$, $1 \le i \le k$. Например, предполагается, что процесс игры продолжается в некотором заранее заданном времени *T*. Пусть $x_0(T), x_i(T), 1 \le i \le k$ — фазовые состояния игроков E и P_i в момент окончания игры. Тогда выигрыш игрока E полагается равным

$$\min_{1 \le i \le k} \rho(x_0(T),\ x_i(T)),$$

где $\rho(x_0(T),\ x_i(T)) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(x_0^j(T) + x_i^j(T) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ — евклидово расстояние между точками $x_0(T),\ x_i(T)$, игра описывает процесс преследования, в котором цель игрока E — максимизация числа $\min\limits_{1 \le i \le k} \rho(x_0(T),\ x_i(T))$.

Существуют игры, в которых ограничение на продолжительность игры несущественно, и игра продолжается до достижения игроками определенного результата. В теории дифференциальных игр рассматриваются также задачи определения множества начальных состояний игроков, из которых игрок P_i может обеспечить встречу с игроком E на расстоянии l, и определения множества начальных состояний игроков, из которых игрок E может гарантировать, что встреча с игроком P_i на расстояние l за конечное время не произойдет. Первое множество называется областью встречи или захвата, второе — областью убегания [6–9].

Если дополнительно потребовать, чтобы в процессе игры фазовая точка $(x_0,\ x_i), 1 \le i \le k$, не покидала некоторое множество N, то получим дифференциальную игру с фазовыми ограничениями [10–13].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу простого преследования–убегания одного управляемого объекта $x_0, x_0 \in R^n$ другими управляемыми объектами $x_i, x_i \in R^n$, $1 \le i \le k$. Пусть движения точек $x_i, 0 \le i \le k$, описываются простейшими уравнениями

$$\dot{x}_0 = u_0,\ \dot{x}_i = u_i,\ \|u_0\| \le 1,\ \|u_i\| \le 1,\ 1 \le i \le k, \tag{2}$$

где R^n — n-мерное евклидово пространство, u_0, u_i — управляющие параметры, u_0 — управляющий параметр убегающего игрока, u_i — управляющий параметр

i-го преследующего игрока, и они — измеримые функции при $t \geq 0$, $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$, (z_1, z_2) — скалярное произведение векторов $z_1, z_2 \in R^n$. Известно, что для любого такого набора функций $u_i = u_i(t)$, $0 \leq i \leq k$, при $t \geq 0$ существует единственное решение системы (2), которое абсолютно непрерывно. Пусть, далее, в R^n задан связный компакт N, имеющий непустую внутренность, причем $x_i = x_i(t) \in N$ при всех $t \geq 0$ и $0 \leq i \leq k$. На этом компакте рассмотрим дифференциальную игру преследования–убегания одного объекта x_0, преследуемого другими k объектами x_i, $1 \leq i \leq k$, в постановке [10]. Предположим, что в момент времени t всем игрокам известны позиции $x_i(t), 0 \leq i \leq k$, а преследующим — измеримая функция $u_0(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$.

Игра (1) считается завершенной, если для некоторой i, $1 \leq i \leq k$, и времени T выполнено условие $x_0(T) = x_i(T)$. В таком случае говорят, что игра завершена в смысле точной поимки [10].

Далее требуется найти для игроков стратегии измеримых по t функциям для любых абсолютно непрерывных траекторий $x_i(t)$. С помощью этих стратегий обеспечивается уклонение убегающим от встречи с преследующими при всех $t \geq 0$ и при любых измеримых управлениях преследующих, или обеспечивается окончание игры за конечное время при любом измеримом управлении убегающего игрока.

Определение 1. Позиционной ε-стратегией убегающего игрока x_0 назовем такую измеримую по t функцию $u_0(x_0(t), x_1(t), ..., x_k(t))$, что

$$u_0(x_0(\tau), x_1(\tau), ..., x_k(\tau)) = u_0(x_0(t_j), x_1(t_j), ..., x_k(t_j)) \text{ при } t_j \leq \tau \leq t_{j+1},$$

где $0 = t_1 < t_2 < ... < t_j < ...$ и $\lim t_j = +\infty$.

Определение 2. Назовем стратегию i-го преследователя $u_i(t) = U_t^i(x_0^0, x_1^0, ..., x_k^0, u_0(t))$ отображение, где $1 \leq i \leq k$, определенное на множестве произвольных измеримых управлений $\|u_0(t)\| \leq 1$ и множестве произвольных векторов $x_i^0 \in R^n$, обладающее следующим свойством: для любого измеримого $\|u_0(t)\| \leq 1$, $x_i^0 \in R^n$, $u_i(t) = U_t^i(x_0^0, x_1^0, ..., x_k^0, u_0(t))$ как функция t, измерима и $\|u_i(t)\| \leq 1$. Стратегией преследования назовем вектор $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_k(t))$, где $u_i(t)$ — стратегия i-го преследователя.

Теоремы 1, 2 доказаны и опубликованы в [10].

Теорема 1. Пусть на компакте N задана игра «простое преследование–убегание» с одним убегающим и k преследователями, причем $k < n$ и $x_0(0)$ принадлежит замыканию внутренности компакта N. Тогда у убегающего игрока существует позиционная ε-стратегия, гарантирующая ему уклонение от встречи с преследующими при $t \geq 0$.

Предположим, что N — n-мерный единичный куб в первом ортанте $K = \{(x^1, x^2, ..., x^n) : 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, ..., 0 \leq x^n \leq 1\}$. Пусть e_i, $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_{n-1} = (0, 0, ..., 0, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$, $1 \leq i \leq n$, — единичные координатные векторы.

Теорема 2. Пусть на n-мерном единичном кубе $N = K$ задана игра «простое преследование» с такой начальной позицией, что

$$(x_0(0) - x_i(0), e_i) = \|x_0(0) - x_i(0)\|, \ 1 \le i \le n, \ k = n. \tag{3}$$

Тогда игру можно закончить не позже, чем за время $T = n$.

Далее, игра (2) считается завершенной, если, для некоторого заранее заданного $l > 0$ выполнено условие $\|x_0(T) - x_1(T)\| \le l$ в момент времени T. В таком случае говорят, что игра завершается в смысле l-поимки.

Одной из сложных и малоизученных проблем в теории дифференциальных игр преследования–убегания является решение задач с фазовыми ограничениями. Этот вопрос, в частности, исследуется в работах [10–15]. Настоящая статья примыкает к исследованиям многих авторов, см. [16–22].

В данной работе рассматривается задача преследования одного убегающего объекта несколькими преследующими объектами на компактном множестве N в n-мерном пространстве, причем движения объектов (игроков) описываются простейшими управляемыми системами дифференциальных уравнений [10]. Будем предполагать, что все игроки имеют одинаковые динамические возможности и, таким образом, единственное преимущество у преследующих — их количество. Доказано, что если количество преследующих игроков $k = n - 1$, то игру можно закончить за конечное время в смысле l-поимки. В то же время по теореме 1, когда $k = n - 1 < n$ у убегающего игрока существует позиционная ε-стратегия, которая гарантирует ему уклонение от встречи с преследующими игроками $t \ge 0$ в смысле точной поимки.

Формулировки основной теоремы и доказательство

Сначала решим вспомогательную задачу. Пусть в игре (2) $\pi(\theta)$: $: (x^1, x^2, ..., x^{n-1}, x^n) \to (x^1, x^2, ..., x^{n-1}, \theta \cdot \frac{l}{4}), \quad \theta \in \left\{0, 1, ..., \left[\frac{4(1-l)}{l}\right] + 1\right\}$ и игра (2) считается завершенной, если для некоторого $i = i_0$ выполнено условие $\pi(\theta) x_0(T) = x_{i_0}(T), \ 1 \le i_0 \le n - 1$, в момент времени T. Это означает, что хотя бы один преследующий поймает проекцию убегающего на подпространстве, $x^n = \theta \frac{l}{4}$ фиксированном θ в смысле точной поимки [10].

Теорема 3. Пусть на n-мерном единичном кубе $N = K$ задана игра «простое преследование» с такой начальной позицией, что

$$\left(\pi(\theta) x_0(0) - x_i(0), e_i\right) = \|\pi(\theta) x_0(0) - x_i(0)\|, \ x_i(0) = \pi(\theta) x_i(0) =$$
$$(x_i^1(0), x_i^2(0), ..., \ x_i^{n-1}(0), \theta \frac{l}{4}), 1 \le i \le n-1, k = n-1; \theta \in \left\{0, 1, ..., \left[\frac{4(1-l)}{l}\right] + 1\right\}. \tag{4}$$

Тогда игру можно закончить не позже чем за время $T = n - 1$, т.е. преследующие игроки поймают проекцию убегающего игрока на подпространстве, $x^n = \theta \frac{l}{4}$ фиксированном θ в смысле точной поимки.

Доказательство. Определим стратегии преследующих точек:

$$u_i : (u_i, e_j) = (\pi(\theta) u_0, e_j), (u_i, e_i) \ge 0,$$
$$u_i = \pi(\theta) u_i = (u_i^1, u_i^2, ..., \ u_i^{n-1}, 0), \|u_i\| = 1, 1 \le i, j \le n - 1. \tag{5}$$

Ясно, что если u_0 — измеримая функция, то и $u_i, 1 \le i \le n-1$, — также измеримые функции. Обозначим $y = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i, e_i) e_i$. Дифференцируя, в силу системы (2), получим $\dot{y} = \sum_{i=1}^{n-1} (u_i, e_i) e_i$. Отсюда с учетом стратегий (5) имеем

$$\|\dot{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (u_i, e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(u_i, e_i)^2 + \sum_{i \ne j} (u_i, e_j)^2 - \sum_{i \ne j} (u_i, e_j)^2 \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \|u_i\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i \ne j} (\pi(\theta) u_0, e_j)^2 = n - (n-1) \|\pi(\theta) u_0\|^2 \ge 1.$$

Поскольку $(\dot{y}, e_i) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} (u_j, e_j) e_j, e_i \right) = (u_i, e_i) \ge 0,$ то $\left(\dot{y}, \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) \ge \sqrt{n-1} / \sqrt{n-1} = 1.$ Так как $y \in K$ и

$$n - 1 \ge \left(y(T), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) = \left(y(0), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) + \int_0^T \left(\dot{y}(\tau), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) d\tau \ge T,$$

то не позже чем за время $T = n-1$ игра закончится.

Теорема доказана.

В случае простого преследования на кубе K маневром вдоль координатных осей можно добиться, чтобы хотя одна из координат преследующего x_i, $1 \le i \le n-1$, совпадала с соответствующей координатой $\pi(\theta) x_0$ проекции убегающего. Теперь каждую из координат $\pi(\theta) x_0$ проекцию убегающего игрока можно отслеживать хотя бы одним из преследующих. Не ограничивая общности конструкции и подводя ее под теорему 3, будем считать, что преследующий игрок с номером i только в последнюю очередь добьется равенства с i-й координатой $\pi(\theta) x_0$ проекции убегающего. Для описанного выше маневра потребуется время не больше единицы. Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть на n-мерном единичном кубе задана игра «простое преследование», для которой выполнено условие

$$\begin{aligned} &(x_i, e_{s_i}) = (\pi(\theta) x_0, e_{s_i}), \qquad \bigcup s_i \subset \{1, 2, ..., n-1\} \setminus i, \\ &(\pi(\theta) x_0(0) - x_i(0), e_{p_i}) < 0, \;\; p_i \notin \bigcup s_i, 1 \le i \le n-1, \; k = n-1. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда существуют такие стратегии для преследующих игроков, когда либо игра закончится за конечное время, либо для некоторого i и $r_i \ne i$, $r_i \notin \bigcup s_i$, $1 \le i \le n-1$, будем иметь, $(x_i, e_{r_i}) = (\pi(\theta) x_0, e_{r_i})$, сохраняя равенства (3), причем гарантированное время не больше $n-1$.

Доказательство. Определим стратегии преследующих точек, а именно:

$$\begin{gathered} u_i : (u_i, e_j) = (\pi(\theta) u_0, e_{s_i}), \;\; (u_i, e_{r_i}) \ge 0, \;\; (u_i, e_{p_i}) = 0, \\ u_i = \pi(\theta) u_i = (u_i^1, u_i^2, ..., u_i^{n-1}, 0), \; \|u_i\| = 1, \; p_i \notin \bigcup s_i, \; r_i \notin \bigcup s_i, \; r_i \ne i; \\ \bigcup p_i \ne \varnothing, \; 1 \le i, \; s_i, \; p_i, \; r_i \le n-1. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим $y = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i, e_{r_i}) e_{r_i}$. Дифференцируя, в силу системы (2) получим $\dot{y} = \sum_{i=1}^{n-1} (u_i, e_{r_i}) e_{r_i}$. Отсюда с учетом того, что $(\dot{y}, e_j) \ge 0, 1 \le j \le n-1,$ и стратегий (7) имеем

$$\|\dot{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (u_i, e_{r_i})^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(u_i, e_{r_i})^2 + \sum_{j \neq r_i} (u_i, e_j)^2 - \sum_{j \neq r_i} (u_i, e_j)^2 \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \|u_i\|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j \neq r_i} (\pi(\theta) u_0, e_j)^2 = n - (n-1) \|\pi(\theta) u_0\|^2 \geq 1.$$

Теперь, как и в доказательстве теоремы 3, получим

$$n - 1 \geq \left(y(T), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) = \left(y(0), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) + \int_0^T \left(\dot{y}(\tau), \sum_{i=1}^{n-1} e_i \right) d\tau \geq T .$$

Отсюда следует, что не позже чем за время $T = n - 1$ игра закончится, либо $(x_i, e_{r_i}) = (\pi(\theta) x_0, e_{r_i})$ для некоторого индекса $i, 1 \leq i \leq n-1$.

Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть на n-мерном пространстве R^n в единичном кубе $K = \{(x^1, x^2, ..., x^n) : 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, ..., 0 \leq x^n \leq 1\}$ рассматривается задача преследования вида (2), в смысле l-поимки. Тогда игра заканчивается за время

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(1-l)}{l} \right] + 1 \right) \cdot \frac{l}{4} + n \left(\left[\frac{4(1-l)}{l} \right] \right) + 2n + 1 . \tag{8}$$

Здесь l — положительное число, которое задано условием задачи, $[m]$ — целая часть числа m.

Доказательство. Согласно условию задачи x_0 — убегающий и x_i, $1 \leq i \leq n-1$, — преследующие, двигаются в K-единичном кубе n-мерного пространства, их максимальные скорости равны единице. Пусть $\theta = 0$ фиксирована. Тогда без ограничения общности можно считать, что в начале игры у всех $n-1$ преследующих и убегающего начальные позиции удовлетворяют условию теоремы 3. Если не удовлетворяют, то, применяя лемму, можно изменить начальные позиции так, чтобы они удовлетворяли условию теоремы 3. Теперь ясно, что по теореме 3 преследующие игроки поймают проекцию убегающего игрока за конечное время на подпространстве $x^n = \theta \frac{l}{4} = 0$ при фиксированном $\theta = 0$ в смысле точной поимки, т.е. некоторой $i = i_0$, $1 \leq i_0 \leq n-1$ и $t = t_0$ будет выполнено условие $x_{i_0}(t_0) = \pi(0) x_0(t_0)$, т.е. один из преследователей поймает проекцию убегающего. Именно в это время все преследующие с помошью управлений $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(t) = (0, ..., 0, 1)^{\mathrm{T}}, 1 \leq i \leq n-1$, вдоль координат осей x^n в одно и то же время переместятся на расстояние $\frac{l}{4}$, т.е. часть подпрострастcounter $x^n = \theta \frac{l}{4}$, $\theta = 1$, находящаяся в K. Тогда уравнение (2) запишем

$$\dot{x}_i = \tilde{u}_i(t), \ 1 \leq i \leq n-1, \tag{9}$$

имея в виду, что $x_i = (x_i^1, ..., x_i^{n-1}, x_i^n)^{\mathrm{T}}$, управление преследуюших $\tilde{u}_i(t) = (0, ..., 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $1 \leq i \leq n-1$, из (9) получим

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i^1 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_i^{n-1} \\ \dot{x}_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n-1. \tag{10}$$

Решая уравнения (10) в следующих $x_i^1(0)=x_i^1,\ ...,\ x_i^{n-1}(0)=x_i^{n-1},\ \ x_i^n(0)=0$, $1\le i\le n-1$, начальных условиях, получаем соотношение

$$\begin{cases} x_i^1(t)=x_i^1(0)+\int\limits_0^t 0\,d\tau=x_i^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{n-1}(t)=x_i^{n-1}(0)+\int\limits_0^t 0\,d\tau=x_i^{n-1}, \\ x_i^n(t)=x_i^n(0)+\int\limits_0^t d\tau=t. \end{cases} \qquad (11)$$

Из (11) следует, что за время $t=\dfrac{l}{4}$ у преследующих первые $n-1$ координаты $x_i^1\left(\dfrac{l}{4}\right)=x_i^1,\ ...,\ x_i^{n-1}\left(\dfrac{l}{4}\right)=x_i^{n-1},\ 1\le i\le n-1$, не меняются, а последние поднимаются на расстояние $x_i^n\left(\dfrac{l}{4}\right)=\dfrac{l}{4},\ 1\le i\le n-1$.

Уравнение движения убегающего в это время со своими произвольно выбранными измеримыми управлениями $\tilde{u}_0(t)=(\tilde{u}_0^1(t),\ ...,\ \tilde{u}_0^n(t))^{\mathrm{T}}$, $\|\tilde{u}_0\|=$ $=\sqrt{(\tilde{u}_0^1)^2+\ldots+(\tilde{u}_0^n)^2}\le 1,$ имеет вид (2) $\dot{x}_0=\tilde{u}_0(t)$.

Отсюда с учетом $\|\tilde{u}_0\|\le 1$ получим неравенство

$$\|x_0(t)-x_0\|=\left\|\int\limits_0^t u_0(\tau)d\tau\right\|\le\left\|\int\limits_0^t\|u_0(\tau)\|\,d\tau\right\|=\left\|\int\limits_0^t 1\,d\tau\right\|\le t.$$

Из последного неравенства следует, что убегающий игрок за время $t=\dfrac{l}{4}$ не может уйти за пределы шара радиуса $\dfrac{l}{4}$ от начального положения. Значит, убегающий за время $t=\dfrac{l}{4}$ не может обойти преследующего игрока, т.е. x_{i_0} он останется над преследующими x_{i_0}, а преследующие уже находятся на поле подпространства $x^n=\theta\,\dfrac{l}{4},\ \ \theta=1$, которое находится в K. Если, начиная с момента $t=\dfrac{l}{4}$, для новых начальных позиций игроков выполняется условие теоремы 3, то преследующие игроки повторяют ту же процедуру и будут находиться на поле подпространства $x^n=\theta\,\dfrac{l}{4},\ \ \theta=2$, которое находится в выпуклом множестве K и т.д.

Если для новых начальных позиций игроков не выполняется условие теоремы 3, то, применяя лемму, изменим начальные позиции так, чтобы они удовлетворяли условию теоремы 3. Ясно, что за это время убегающий игрок не может обходить преследующих игроков и переходит вниз подпространства $x^n=\theta\,\dfrac{l}{4},\ \ \theta>1$. Так как при доказательстве теоремы 3 и леммы управление преследующих строится так, чтобы расстояние между каждым преследующим и проекцией убегающего со временем не увеличивалось.

Таким образом преследующие повторяют это движение несколько раз, и за конечное время число перемещений достигает $\theta = \frac{4(1-l)}{l}$ или $\theta = \left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1$. После того как преследующие поднимутся на часть пространства параллельной части $n-1$-мерного подпространства и на расстоянии $x^n = \theta\frac{l}{4}$ от этой части пространства, преследующие будут преследовать проекцию убегающего в смысле точной поимки, а самого убегающего будут преследовать в смысле l-поимки. И через конечное время будет выполняться условие $\left\|x_{i_0} - x_0\right\| \le l$ для некоторого $i = i_0,\ 1 \le i_0 \le n-1$ и игра закончится.

Перейдем к оценке времени окончания игры.

1. Пусть с самого начала игры преследующие будут расположены по одному на $n-1$ гранях единичного куба n-мерного пространства. На концах пересечений этих граней куба проведем координату осей $x^1, x^2, ..., x^n$, тогда соотвественно преследующие будут находиться на осях $x^1, x^2, ..., x^{n-1}$, и начальное положение в единичном кубе n-мерного пространства преследующих на части $n-1$-мерного подпространства и проекций убегающего на этой части подпространства будут соответствовать виду (4). Докажем, что преследующие затратят не больше времени чем $T(l) = T_1(l) + T_2(l)$, чтобы попасть в l-окрестности убегающего. Здесь $T_1(l)$ — время, истраченное преследующими на преследование убегающего вдоль координаты x^n. $T_2(l)$ — сумма времени, потраченная на процесс преследования преследующих проекции убегающего в единичном кубе в части $n-1$-мерного подпространства на расстоянии $x^n = \theta\frac{l}{4}$ $\left(1 \le \theta \le k,\ k = \frac{4(1-l)}{l}\right.$ или $\left.k = \left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)$. Проводим расчет времени $T_1(l)$ и $T_2(l)$.

Расчет времени $T_1(l)$. Вычислим число перемешений при построенной стратегии преследующих вдоль координаты осей x^n. Для этого $1-l$ расстояние делим на $\frac{l}{4}$, отсюда получится количество перемещений $\frac{(1-l)}{l/4} = \frac{4(1-l)}{l}$. Если $\frac{4(1-l)}{l}$ будет 0 или натуральное число, то необходимо провести $\frac{4(1-l)}{l}$ перемещений. Если $\frac{4(1-l)}{l}$ — дробное число, то следует провести $\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1$ перемещений. Ясно, что на каждое перемещение потребуется время, равное $\frac{l}{4}$, тогда соответственно время преследования вдоль координаты x^n будет $T_1(l) = \left(\frac{4(1-l)}{l}\right)\frac{l}{4} = (1-l)$ или не будет больше $T_1(l) = \left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4}$:

$$T_1(l) = \begin{cases} 1-l, & \text{åñëè } \frac{4(1-l)}{l} \text{— 0 èëè í àòóðàëüí î å ÷èñëî}, \\ \left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4}, & \text{åñëè } \frac{4(1-l)}{l} \text{— äðî áí î å ÷èñëî}. \end{cases} \quad (12)$$

Расчет времени $T_2(l)$. Его можно вычислить в виде $T_2(l)=t_2(0)+$ $+t_2\left(\frac{l}{4}\right)+...+t_2\left(\left(k-1\right)\frac{l}{4}\right)+t_2\left(k\frac{l}{4}\right)=\sum_{i=0}^{k} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$. Здесь k — количество перемещений вдоль координаты x^n. Также $t_2\left(\theta\frac{l}{4}\right)$ — время, потраченное на процесс преследования $(\theta=\overline{0,k})$ в части $n-1$-мерного подпространства в единичном кубе для θ-перемещений преследования преследующих проекции убегающего, на расстоянии $x^n=\theta\frac{l}{4}$ $\left(1\le\theta\le k,\ k=\frac{4(1-l)}{l}\ \text{или}\ k=\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)$.

Итак, $t_2(0)$ — время, потраченное на преследование проекции убегающего на части подпространства $x^n=\theta\frac{l}{4}$ при $\theta=0$, т.е. $x^n=0$ расположено в K. Тогда $t_2(0)$ согласно теореме 3 не будет превышать $n-1$ единичного времени, т.е. понадобится не более $t_2(0)=n-1$ времени. По крайней мере один из преследующих поймает проекцию убегающего в смысле точной поимки: для некоторого $i=i_0$ выполнено условие $\pi(0)x_0(t_2(0))=x_{i_0}(t_2(0)),\ 1\le i_0\le n-1$. Именно в это время все преследующие переместятся на расстояние $\frac{l}{4}$ по x^n, т.е. часть подпространства $x^n=\theta\frac{l}{4},\ \theta=1$ которая находится в K. Ясно, что новые начальные позиции преследующих и убегающих могут не удовлетворять условию теоремы 3.

Теперь вычислим время $t_2\left(\frac{l}{4}\right)$, потраченное на преследование при первом перемещении на части подпространства $x^n=\theta\frac{l}{4}$ при $\theta=1$, т.е. $x^n=\frac{l}{4}$ расположено в единичном кубе. В этом случае преследующие, в первую очередь, в этой части подпространства в силу леммы свое положение приводят к виду (4) и продолжают преследование. Для этого преследующие начинают движение по закрепленным за ними координатам, за одну единицу времени можно перейти из одного конца грани куба на второй конец грани, проекцию убегающего на эту часть пространства и за время $t_2'\left(\frac{l}{4}\right)=1$ свое положение приводят к виду (4). После того как положение приведено к виду (4), преследующие применяют стратегию (5), и в этой части пространства понадобится время преследования не более $t_2''\left(\frac{l}{4}\right)=n-1$ единичного времени согласно теореме 3. Итак, при первом перемещении для преследования понадобится не более $t_2\left(\frac{l}{4}\right)=t_2'\left(\frac{l}{4}\right)+t_2''\left(\frac{l}{4}\right)=1+\left(n-1\right)=n$ единичного времени.

Как в предыдушем пункте, в то время, по крайней мере, один из преследующих поймает проекцию убегающего в смысле точной поимки на подпространстве $x^n=\frac{l}{4}$: для некоторого $i=i_1$ выполнено условие $\pi\left(1\right)x_0\left(t_2\left(\frac{l}{4}\right)\right)=$ $=x_{i_1}\left(t_2\left(\frac{l}{4}\right)\right),\ 1\le i_1\le n-1$. Именно в это время все преследующие переместятся на расстоянии $\frac{l}{4}$ по x^n, т.е. часть подпространства $x^n=\theta\frac{l}{4},\ \theta=2$, которая находится в K. Ясно, что новые начальные позиции преследующих и убегающих могут не удовлетворять условию теоремы 3.

Вычислим время $t_2\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)$, потраченное на преследование при втором перемещении на части подпространства $x^n=\theta\,\frac{l}{4}$ при $\theta=2$, т.е. $x^n=2\cdot\frac{l}{4}$ расположено в единичном кубе. Преследующие, в первую очередь, в этой части подпространства в силу леммы свое положение приводят к виду (4) и продолжают преследование. Для этого преследующие начинают движение по закрепленным соответственно за ними координатам и за одну единицу времени проекцию убегающего на эту часть пространства и за время $t_2'\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)=1$ свое положение приводят к виду (4). После того как положение приведено к виду (4), преследующие применяют стратегию (5), и время преследования в этой части пространства понадобится не более $t_2''\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)=n-1$ единичного времени согласно теореме 3. Итак, при втором перемещении для преследования понадобится не более $t_2\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)=t_2'\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)+t_2''\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)=1+\left(n-1\right)=n$ единичного времени.

Далее, как в предыдушых пунктах, в то время по крайней мере один из преследующих поймает проекцию убегающего в смысле точной поимки на подпространстве $x^n=2\cdot\frac{l}{4}$: для некоторого $i=i_2$ выполнено условие $\pi\left(2\right)x_0\left(t_2\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)\right)=x_{i_2}\left(t_2\left(2\cdot\frac{l}{4}\right)\right), 1\le i_2\le n-1$. Именно в это время все преследующие переместятся на расстояние $\frac{l}{4}$ по x^n, т.е. часть подпространства $x^n=\theta\frac{l}{4},\ \theta=3$, которая находится в K. Ясно, что, вообще говоря, новые начальные позиции, преследующих и убегающих могут не удовлетворять условию теоремы 3. Преследующие, в первую очередь, в этой части подпространства, в силу леммы свое положение приводят к виду (4) и продолжают преследование и так далее.

На θ-перемещении преследующие игроки поднимутся на ту часть K, которая расположена на подпространстве $x^n=\theta\,\frac{l}{4}$ $\left(3\le\theta\le k-1,\ k=\frac{4(1-l)}{l}\right.$ или $\left.k=\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)$. Преследующие за время $t_2'\left(\theta\cdot\frac{l}{4}\right)=1$ свое положение приводят к виду (4) и продолжают преследование. Теперь преследующие применяют стратегию (5) и в этой части пространства понадобится не более $t_2''\left(\theta\cdot\frac{l}{4}\right)=n-1$ единичного времени согласно теореме 3. Итак, при θ-перемещении для преследования понадобится не более $t_2\left(\theta\cdot\frac{l}{4}\right)=t_2'\left(\theta\cdot\frac{l}{4}\right)+$ $+t_2''\left(\theta\cdot\frac{l}{4}\right)=1+\left(n-1\right)=n$ единичного времени.

 ISSN 0572-2691

По крайней мере, один из преследующих поймает проекцию убегающего в смысле точной поимки на подпространстве $x^n = \theta \cdot \frac{l}{4}$: для некоторого $i = i_\theta$ выполнено условие $\pi(\theta) x_0 \left(t_2 \left(\theta \cdot \frac{l}{4} \right) \right) = x_{i_\theta} \left(t_2 \left(\theta \cdot \frac{l}{4} \right) \right)$, $1 \le i_\theta \le n-1$. В это время все преследующие переместятся на расстоянии $\frac{l}{4}$ по x^n, т.е. часть подпространства $x^n = \theta \frac{l}{4}$, $3 \le \theta \le k-1$, которая находится в K. Ясно, что, новые начальные позиции преследующих и убегающих могут не удовлетворять условию теоремы 3. Преследующие, в первую очередь, в этой части подпространства в силу леммы свое положение приводят к виду (4) и продолжают преследование и так далее.

Теперь преследующие поднимутся в паралельной единичному кубу n–1-мерной части пространства и расположенного на расстоянии $x^n = k \frac{l}{4}$ часть пространства. В этом случае также положение координат преследующих и убегающего отличается от вида (3). В то время как преследующие перейдут на эту часть пространства, отпадет необходимость перемещения их на расстоянии $\frac{l}{4}$ вдоль координаты x^n. В этой части пространства преследующие ловят проекцию убегающего не по смыслу наложения друг на друга, а именно самого убегающего в окружении l. Для того чтобы привести в этой части пространства положения преследующих и убегающего к виду (3) понадобится время не более $t_2' \left(k \frac{l}{4} \right) = 1$ единичного времени. Итак, для того чтобы преследующие поймали убегающего в окружении l данной плоскости, необходимо время не более $t_2 \left(k \frac{l}{4} \right) =$ $= t_2' \left(k \frac{l}{4} \right) + t_2' \left(k \frac{l}{4} \right) = 1 + (n-1) = n$.

В общем случае необходима сумма времени для $T_2(l)$, которая понадобится для того, чтобы поймать преследующими проекцию убегающего в единичном кубе части n–1-мерного пространства, а также в паралллельной этому пространству и находящегося на расстоянии $x^n = \frac{il}{4} \left(1 \le i \le k, \quad k = \frac{4(1-l)}{l} \right.$ или $\left. k = \left[\frac{4(1-l)}{l} \right] + 1 \right)$ понадобится время не более

$$T_2(l) = \sum_{i=0}^{k} t_2 \left(i \frac{l}{4} \right) = t_2(0) + t_2 \left(\frac{l}{4} \right) + \ldots + t_2 \left((k-1) \frac{l}{4} \right) + t_2 \left(k \frac{l}{4} \right) =$$

$$= (n-1) + n + \ldots + n + n = n - 1 + nk, \tag{13}$$

т.е.

$$T_2(l) = \begin{cases} n - 1 + n \dfrac{4(1-l)}{l}, & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l} - 0 \text{ èëè í àòóðàëüí î å ÷èñëî}, \\ n - 1 + n \left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l} \right] + 1 \right), & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l} \text{ — äðî áí î å ÷èñëî}. \end{cases} \tag{14}$$

Итак, чтобы закончить игру, понадобится следующее время согласно (13), (14)

$$T(1-l)=\begin{cases} n-l+n\dfrac{4(1-l)}{l}, & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}-\text{ 0 èëè íàòóðàëüíîå ÷èñëî},\\ \left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\dfrac{l}{4}+n\left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)+n-1, & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}-\text{äðîáíîå ÷èñëî}.\end{cases} \tag{15}$$

В общем случае игру (12), (15) можно закончить за время не более

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+n\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+2n-1. \tag{16}$$

2. Пусть тепер преследующие по одному будут расположены на $n-1$ гранях в единичном кубе n-мерного пространства. В точках пересечения данных граней куба проведем координату осей $x^1, x^2, ..., x^n$, тогда преследующие соответственно будут расположены на осях $x^1, x^2, ..., x^{n-1}$, и пусть начальное положение преследующих, расположенных в части $n-1$-мерного пространства и проекции убегающего на этом пространстве, т.е. в единичном кубе n-мерного пространства отличаются от вида (3). Докажем, что и в этом случае преследующие, чтобы поймать убегающего в окружении l, потратят время не более $T(l)=T_1(l)+T_2(l)$. Здесь $T_1(l)$ и $T_2(l)$ описаны в п.1. Найдем $T_1(l)$ и $T_2(l)$.

Расчет времени $T_1(l)$. В этом случае $T_1(l)$ вычисляется так же, как и в п. 1, т.е. время, потраченное на преследование преследующих убегающего вдоль координаты x^n (см. (12)).

Расчет времени $T_2(l)$. Вычислим $T_2(l)=\sum\limits_{i=1}^{k} t_2\left(i\dfrac{l}{4}\right)$. В этом случае посчитаем время $t_2(0)$, т.е. время, которое понадобится для того, чтобы поймать в смысле точной поимки, в части $n-1$-мерного пространства и проекции убегающего в этом пространстве. Для того чтобы в этой части пространства можно было привести положения преследующих и проекции убегающего к виду (3) понадобится время не более $t_2'(0)=1$. Понадобится еще время не более $t_2''(0)=n-1$ для того, чтобы преследующие смогли поймать проекцию убегающего, применяя стратегию (4) теоремы 3. Итак, нам понадобится время не более $t_2(0)=$ $=t_2'(0)+t_2''(0)=1+(n-1)=n$ для того, чтобы в смысле точной поимки в единичном кубе в части $n-1$-мерного пространства преследующие смогли поймать проекцию убегающего на этом пространстве. Остальные $t_2\left(i\dfrac{l}{4}\right)$ $(i=\overline{1,k})$ вычисляются, как в п. 1. Итак, в общем случае тратится время не более, чем

$$T_2(l)=\sum_{i=0}^{k} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)=t_2(0)+t_2\left(\frac{l}{4}\right)+...+t_2\left((k-1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left(k\frac{l}{4}\right)=$$

$$=n+n+...+n+n=n(k+1), \tag{17}$$

т.е.

$$T_2(l)=\begin{cases} n\left(\dfrac{4(1-l)}{l}+1\right), & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}\text{ — 0 èëè íàòóðàëüíîå ÷èñëî},\\ n\left(\left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)+1\right), & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}\text{ — äðîáíîå ÷èñëî}.\end{cases} \tag{18}$$

Итак, для того чтобы определить время окончания игры в случае 2, получены следующие оценки из (17), (18):

$$T(l)=\begin{cases} 1-l+n\dfrac{4(1-l)}{l}+n\,, & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}-\ 0 \text{ èëè í àòóðàëüí î å ÷èñëî}\,,\\ \left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\dfrac{l}{4}+n\left(\left[\dfrac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)+n, & \text{åñëè } \dfrac{4(1-l)}{l}-\text{äðî áí î å ÷èñëî}\,. \end{cases} \tag{19}$$

В общем случае для времени окончания игры (19) в п. 2 понадобится время не более

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+n\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+2n\,. \tag{20}$$

3. Если с начала игры положения преследующих будут отличаться от п. 1 или п. 2, докажем, для того чтобы преследующие поймали убегающего, понадобится время не более $T(l)=T_1(l)+T_2(l)+T_3(l)$. Здесь $T_1(l)$ и $T_2(l)$ — время, определенное в п. 1. В отличие от них, $T_3(l)$ — это время, которое необходимо, чтобы кратчайшим путем добраться от координаты грани, закрепленной за преследующими.

Расчет времени $T_3(l)$. Если учитывать что данный куб является единичным кубом, получается, что $T_3(l)=t=1$. Значит, для $T_3(l)$ необходимо время не более

$$T_3(l)=1\,. \tag{21}$$

Таким образом, в общем случае игру (20), (21) можно окончить за время не более

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+n\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]+2n+1\,.$$

Теорема 4 доказана.

Обобщение полученных результатов

Теорема 5. Пусть на n-мерном пространстве R^n в кубе $K_r=$ $=\left\{(x^1,x^2,...,x^n):0\le x^1\le r,\quad 0\le x^2\le r,...,0\le x^n\le r\right\}$, рассматривается задача преследования вида (2), в смысле l-поимки. Тогда игра заканчивается за время

$$T_r(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+n\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]\right)+2nr+r\,.$$

Пусть теперь $a_1=\sqrt{2}\,r$ — сторона вписанного, а $a_2=2r$ сторона описанного n-мерного куба шара $K_{sh}=\left\{(x^1,x^2,...,x^n):\ (x^1)^2+(x^2)^2+...+(x^n)^2\le r^2,\ r>0\right\}$.

Теорема 6. Предположим, что на n-мерном пространстве R^n в шаре $K_{sh}=\left\{(x^1,x^2,...,x^n):\ (x^1)^2+(x^2)^2+...+(x^n)^2\le r^2,\ r>0\right\}$ рассматривается задача преследования в смысле l-поимки (2). Тогда для времени $T_{sh}(l)$ завершения преследования имеют место оценки

$$\frac{\left(\left[\dfrac{4\left(\sqrt{2}r-l\right)}{l}\right]+1\right)\cdot\dfrac{l}{4}+\left[\dfrac{4\left(\sqrt{2}r-l\right)}{l}\right]\sqrt{2}r+2\sqrt{2}r}{2}<T_{sh}(l)<$$

$$<\frac{\left(\left[\dfrac{4(2r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\dfrac{l}{4}+\left[\dfrac{4(2r-l)}{l}\right]2r+4r}{2}.$$

Теорема 7. Предположим, что на n-мерном пространстве R^n на выпуклом множестве K рассматривается задача преследования в смысле l-поимки. Тогда в игре (2) преследующие завершают игру за время

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]2d+4d,$$

где d — диаметр множества K.

Определение 3. Пусть K — компактное подмножество R^n и $\xi\subset R^n$ — гиперплоскость, тогда $\Omega=K\bigcap\xi$ называется сечением множества K.

Определение 4. Компактное множество K называется выпуклым по направлению вектора $e\notin\Omega$ относительно сечения Ω, если для любых двух точек $x,\ y\in K$ из прямой η параллельной e, проходящей через любую точку множества Ω и $\lambda\in[0,\ 1]$, точка $\lambda x+(1-\lambda)y$ также принадлежит множеству K.

Теорема 8. Предположим, что на n-мерном пространстве R^n на множестве K, выпуклом по направлению вектора $e\notin\Omega$ относительно сечения Ω, рассматривается задача преследования в смысле l-поимки. Тогда в игре (2) преследующие завершают игру за время

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]2d+4d\ .$$

Здесь $d=\max\{d_1,\ d_2\}$, где $d_1=\max\{\|z\|:z=x-y,\ x,y\in\Omega\}$, $d_2=\max\{\|z\|:z=$ $=x-y,\ x,y\in\eta\}$.

Заключение

В работе [10] изучена дифференциальная игра преследования–убегания со многими участниками и простыми движениями. Игра происходит в n-мерном евклидовом пространстве на компакте. Убегающий игрок и преследователи имеют одинаковую максимальную скорость. Доказано, что если число преследующих игроков меньше n, то убегающий избежит поимки, если число преследующих равно n, то можно завершить игру в смысле точной поимки. В данной работе рассмотрена задача, когда число преследующих игроков $n-1$, т.е. меньше n, в смысле l-поимки. В таком случае результаты работы [10] неприменимы. Положительный ответ дают теоремы 3, 4. Теоремы 5–8 обобщают результаты теоремы 4. Здесь вводится новое понятие выпуклости множества по направлению. Предложена структура построения управлений преследования, которая обеспечит завершение игры за конечное время. Получена оценка сверху времени игры для завершения преследования. Предлагается прием, расширяющий область применимости одного эффективного метода преследования в дифференциальной игре с несколькими преследователями и фазовыми ограничениями на состояние игроков. С помощью рассматриваемого метода решается ряд модельных примеров дифференциальных игр преследования с «простым движением» и фазовыми ограничениями [14, 15].

Заметим, что задача l-поимка вполне естественна как прикладная, в частности в робототехнике (см., например, [8, 9]), поскольку реальные объекты имеют некоторый размер, и поимка понимается в смысле соприкосновения с границей данного объекта.

М.Ш. Маматов, А.О. Зуннунов, Е.Е. Есонов

ОЦІНКИ ЧАСУ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ БАГАТЬОХ ГРАВЦІВ НА ОПУКЛОМУ КОМПАКТІ

Стаття присвячена вивченню завдання побудови стратегії переслідування в простих диференціальних іграх багатьох осіб з фазовими обмеженнями в стані гравців, в сенсі попадання в деякій окіл втікача. Гра відбувається в n-мірному евклідовому просторі на опуклому компакті. Розглядається задача переслідування, коли число переслідувачів $n-1$, тобто менше ніж n, в сенсі — l-упіймання. Запропоновано структуру побудови керувань переслідування, яка забезпечить завершення гри за кінцевий час. Отримано оцінку зверху часу гри для завершення переслідування. Розглянуто допоміжне завдання простого переслідування на одиничному кубі в першому ортантові і побудовано стратегії переслідувачів для завершення гри з особливими початковими позиціями. Отримані результати застосовуються для вирішення диференціальних ігор з довільними початковими позиціями. Для цього завдання запропонована структура побудови стратегії переслідування, яка забезпечить завершення гри за кінцевий час. Також розглядається узагальнення завдання в сенсі ускладнення перешкоди. Розглядається більш загальна задача простого переслідування на кубі довільного розміру в першому ортантові. За допомогою запропонованих стратегій доведено можливості завершення переслідування і отримано оцінку часу. Як наслідок цього результату, отримано оцінки знизу і зверху для часу переслідування в грі з перешкодами типу кулі. Отримано оцінки часу переслідування, коли компакт — довільно опукла множина. Визначено поняття опуклої множини відносно напрямку перетину, який необов'язково опуклий. В ньому вивчено задачу простого переслідування в диференціальній грі багатьох гравців і показано можливості завершення переслідування із застосуванням запропонованої стратегії. Оцінюється зверху час завершення переслідування даної гри.

Ключові слова: диференціальні ігри, завдання переслідування, завдання втечі, управління переслідування, управління втечі, фазові обмеження, групове переслідування.

M.Sh. Mamatov, A.O. Zunnunov, E.E. Esonov

EVALUATION OF THE PURSUIT TIME IN DIFFERENTIAL GAMES OF MANY PLAYERS ON A CONVEX COMPACT

The paper is devoted to the study of the problem of constructing a pursuit strategy in simple differential games of many persons with phase constraints in the state of the players, in the sense of getting into a certain neighborhood of the evader. The game takes place in n-dimensional Euclidean space on a convex compact set. The pursuit problem is considered when the number of pursuing players is $n-1$, that is, less than n, in the sense of — l captures. A structure for constructing pursuit controls is proposed, which will ensure the completion of the game in a finite time. An upper bound is obtained for the game time for the completion of the pursuit. An auxiliary problem of simple pursuit on a unit cube in the first orthant is considered, and strategies of pursuing players are constructed to complete the game with special initial positions. The results obtained are used to solve differential games with arbitrary initial positions. For this task, a structure for constructing a pursuit strategy is proposed that will ensure the completion of the game in a finite time. The generalization of the problem in the sense of complicating the obstacle is also considered. A more general problem of simple pursuit on a cube of arbitrary size in the first orthant is considered. With the help of the proposed strategies, the possibilities of completing the pursuit are proved and an estimate of the time is obtained. As a consequence of this result, lower and upper bounds are obtained for the pursuit time in a game with ball-type obstacles. Estimates are obtained for the pursuit time when the compact set is an arbitrarily convex set. The concept of a convex set in a direction relative to a section, which is not necessarily convex, is defined. And in it the problem of simple pursuit in a differential game of many players is studied and the possibilities of completing the pursuit using the proposed strategy are shown. The time of completion of the pursuit of the given game is estimated from above.

Keywords: differential games, pursuit problem, evasion problem, pursuit control, evasion control, phase constraints, group pursuit.

1. McKunsay J.C. Iintroduction to the theory of games. Nev York. Toronto. London McGraw-HILL Book Company, INC. 1952. 420 p.
2. Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1990. 666 p.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр/СПб.: БХВ. Петербург, 2012. 432 с.
4. Isaacs R. Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit. John Wiley. Sons, Inc., New York, 1965. 480 p.
5. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, 40:3, P. 285–303.
6. Mishchenko E.F., Nikol'skii M.S. , Satimov N.Yu. The problem of avoiding encounter in n — person differential games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1980. 143, P. 111–136.
7. Satimov N.Yu. and Mamatov M.Sh. The pursuit-evasion problem in differential games between the groups of pursuers and evaders. *Diff. Uravn*., 1990. **26**, N 9. P. 1541–1551.
8. Steinhaus, H. Definitions for a theory of games and pursuit. *Mysl. Academicka*. 1925. **1**, N 1. P. 13–14.
9. Chung T.H., Hollinger G.A., Isler V. Search and pursuit-evasion in mobile robotics. Autonomous robots. 2011. **31**, N 4. P. 299–316.
10. Иванов Р.П. Простое преследование –убегание на компакте. *Док. АН СССР*. 1980. **254**. № 6. С. 1318–1321.
11. Пшеничный Б. Н. , Чикрий А. А. , Раппопорт И. С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *Докл. АН СССР*. 1981. **259**, N 4, С. 785–789.
12. Чикрий А. А. , Шишкина Н. Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений. *Автоматика и телемеханика*. 1985. **2.** P. 59–68.
13. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Game problems of approach for quasilinear systems of general form, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl)*. 2019. **304**, N 1. P. 44–58.
14. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Задача преследования в простых дифференциальных играх в квадрате. *Научный вестник СамГУ*. Самарканд, 2019. № 1. С. 20–26.
15. Маматов М.Ш.,Зуннунов А.О.,Эсонов Э.Э. Количественный анализ задачи «Лев и Человек» при наличии кругового препятствия. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2020. № 1. С. 57–66.
16. Chodun W. Avoidance of many pursuers in differential games described by differential inclusions. J. Math. Anal. and Appl. 1988. 135, № 2. P. 581–590.
17. Рихсиев Б.Б., Кучкаров А.Ш. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями. *Автоматика и телемеханика*. 2001. № 8. С. 41–45.
18. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями. *Автоматика и телемеханика.* 1992. № 5. С. 22–26.
19. Константинов Р.В. О квазилинейной дифференциальной игре с простой динамикой при наличии фазового ограничения. *Математические заметки*. 2001. **69.** Вып. 4. С. 581–590.
20. Shcherban I.V. An efficient suboptimal algorithm for player-ally control in a conflict problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2007. **46**, N 1. P. 3–8.
21. Melikyan A., Akhmetzhanov A., Hovakimyan N. On initial value and terminal value problems for Hamilton-Jacobi equation. *System Control Letters.* 2007. **56**, N 11–12. P. 714–721.
22. Polovinchuk N.Y., Ivanov S.V., Kotelnitskaya L.I. Synthesis of evasive maneuver control of unmanned aerial vehicle for terminal restrictions. *Vestnik of Don State Technical University*. 2018. **18(2)**. P. 190–200.

Получено 22.07.2020