УДК 517.93; 681.5

А.В. Лакеев, В.А. Русанов, А.В. Банщиков

К ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Ключевые слова: тензорный анализ, нелинейный системный анализ, билинейная дифференциальная реализация с запаздыванием, функциональный оператор Релея–Ритца.

Введение

Качественная теория дифференциальной реализации (КТДР), рассматриваемая в духе бесконечномерной постановки обратных задач математической физики, сложнее, интереснее, глубже в приложениях и очень важна для понимания основных свойств самих дифференциальных моделей. Ее геометрические конструкции могут служить отправными точками современного развития общей (аксиоматической) теории систем (в духе [1]), попутно создавая этим конструкциям репутацию полезного математического инструмента в прецизионном апостериорном моделировании нелинейных бесконечномерных динамических моделей.

В методологическом плане КТДР можно рассматривать как важный шаг на пути построения общей теории апостериорного математического моделирования сложных динамических систем в контексте теории идентификации эволюционных уравнений [2] на стыке функционального анализа [3, 4], теории меры и дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах [5]. Причем в теоретико-системном анализе непрерывных слабоструктурированных систем до какого-то момента «механический» перенос качественных результатов конечномерной теории реализации на бесконечномерный случай проходит без особых осложнений. Это относится как к стационарным, так и нестационарным дифференциальным моделям первого порядка (параболические уравнения и системы диффузионного типа) в равномерно выпуклых пространствах Гельдера [6], или гильбертовых пространствах [7, 8].

Существенные аналитические трудности начинаются при переходе к построению дифференциальной реализации с динамическим порядком выше первого [9], в том числе неноминальный учет структуры гиперболических моделей [10], при представлении уравнений которых нельзя обойтись без учета нелинейности их динамики. В частности, — билинейной структуры модели реализации [11, 12], учитывающей эффект запаздывания в моделируемых билинейных обратных связях, на чем и акцентируется основное внимание в данной статье. При этом покажем, что, осуществляя аналитическую связь между проективной геометрией и диффе-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00301).

ренциальной реализацией моделируемых бесконечномерных динамических процессов, конструкцию проективизации функционального оператора Релея–Ритца [7, 8] и функционально-геометрический анализ условий его непрерывности удобно формулировать на языке компактных топологических многообразий тензорных произведений гильбертовых пространств в терминах CW-комплексов Уайтхеда [13]. Такая качественная теория до конца еще не создана, и не так давно не существовало еще и базы для нее. За последние полтора десятилетия положение существенно изменилось [7–12], можно считать, что теперь такая аналитическая база существует в виде теории расширений нестационарных M_p-операторов [7].

Данная работа развивает изыскания [12], позволяя (в перспективе) учитывать в дифференциальном моделировании многомерных уравнений динамики локальных популяций нейронов [14], эффект запаздывания сигналов в нелинейных нейродинамических системах, задаваемых a posteriori функциональной моделью типа «вход–выход» (модель «черного ящика» [1, с. 21]).

Постановка задачи

Далее $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (т.е. нормы удовлетворяют «условию параллелограмма» [15, с. 47]); при этом ниже используем [3, с. 176] линейную изометрию (сохраняющую норму) $E: Y \to X$ пространств Y и X. Как обычно, $L(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ — банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных непрерывных операторов для двух банаховых пространств: $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$, $\mathcal{L}(X^2, X)$ — пространство всех непрерывных билинейных отображений из декартового квадрата $X \times X$ в пространство X, ниже активно используем линейную изометрию [3, с. 650] пространств $\mathcal{L}(X^2, X)$ и $L(X, L(X, X))$.

Пусть T — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ, $\wp_\mu$ — σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств из T, запись $S \underset{\mathrm{mod}\,\mu}{\subseteq} Q$ для $S, Q \in \wp_\mu$ означает $\mu(S \setminus Q) = 0$. Сверх того, примем, что $AC^1(T, X)$ — множество всех функций $\varphi: T \to X$, первая производная которых является абсолютно-непрерывной функцией (относительно меры μ) на интервале T.

Если ниже $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — некоторое банахово пространство, то $\mathrm{L}_p(T, \mathcal{B})$, $p \in [1, \infty)$, как обычно, — банахово пространство всех классов μ-эквивалентности интегрируемых по Бохнеру [16, с. 189] отображений $f: T \to \mathcal{B}$ с нормой $(\int_T \| f(\tau) \|^p \mu(d\tau))^{1/p} < \infty$, соответственно $\mathrm{L}_\infty(T, \mathcal{B})$ — банахово пространство данных классов с нормой $\operatorname{ess\,sup}_T \| f \| < \infty$. В данном контексте понадобятся следующие операторные пространства:

$$\mathbb{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times$$
$$\times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mathcal{L}(X^2, X)),$$

$$\mathbb{L}^* := L(X, X) \times L(X, X) \times L(Y, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times$$
$$\times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X) \times \mathcal{L}(X^2, X).$$

 ISSN 0572-2691

Далее считаем, что на временном интервале T фиксировано (возможно, a posteriori) поведение исследуемой бихевиористической системы [17] в виде неограниченного по мощности нелинейного пучка N управляемых динамических процессов из $\mathrm{L}_2(T, Y) \times AC^1(T, X)$ типа «вход–выход» (определение 1.2 [1, с. 21]), т.е. формально:

$$N \subset \{(u, x) : x \in AC^1(T, X),\ u \in \mathrm{L}_2(T, Y)\},\ \ \mathrm{Card}\ N \le \exp \aleph_0,$$

где (u, x) — пара «программное управление, траектория», $\aleph_0$ — алеф-нуль, $\exp \aleph_0$ — континуум; выше (и ниже) термин «нелинейный пучок» означает, что для траекторных кривых данного пучка a priori не предполагается наличие принципа суперпозиции, когда зависимость выходных величин от входных воздействий суть линейная (определение 1.1 [1, с. 85]). Кроме того, пусть задана, как инерционно-массовая характеристика моделируемой системы, оператор-функция при второй производной (в модели реализации) от траектории $t \mapsto x(t)$ вида

$$\hat{A} \in \mathrm{L}_\infty(T, L(X, X)),$$

$$\mu\{t \in T :\ \hat{A}(t) = 0 \in L(X, X)\} = 0;$$

при этом нарушение условия эквивалентности нормальной системе, а именно:

$$\mu\{t \in T :\ \mathrm{Ker}\ \hat{A}(t) \ne \{0\} \subset X\} \ne 0,$$

необременительно (допустимо); в данном контексте см. ниже замечание 1.

Рассмотрим задачу: для фиксированной пары $(N, \hat{A})$ определить необходимые и достаточные условия, выраженные в терминах нелинейного пучка динамических процессов N и оператор-функции $\hat{A}$, существования упорядоченного набора из восьми оператор-функций

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}_2,$$

для которого осуществима билинейная дифференциальная реализация (БДР) с постоянным запаздыванием $\overline{\tau} = \mathrm{const} \ge 0$, имеющая аналитическое представление вида

$$\hat{A} d^2 x / dt^2 + A_1 dx/dt + A_0 x \ = Bu + \mathbb{D}_1(x, x) + \mathbb{D}_2(x, dx/dt) + \mathbb{D}_3(dx/dt, dx/dt) + \qquad (1)$$

$$+ \mathbb{D}_4(E(u), y) + \mathbb{D}_5(E(u), dy/dt) \quad \forall (u, x) \in N;$$

$$t \mapsto y(t) := \begin{cases} x(t - \hat{\tau}), & \text{åñëè } t_0 + \hat{\tau} \le t \le t_1; \\ 0 \in X, & \text{åñëè } t_0 \le t < t_0 + \hat{\tau}. \end{cases}$$

(Равенство в дифференциальном уравнении (1) рассматривается как тождество в пространстве $\mathrm{L}_1(T, X)$.)

Если моделируемые операторы БДР-системы (1) предполагается искать в классе стационарных, то будем строить их в классе непрерывных и при этом писать

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*.$$

В связи с означенной математической постановкой отметим, что каждая область математики, как правило, содержит свои ведущие проблемы, которые настолько трудны, что их полное решение даже и не ожидается, но которые стимулируют постоянный поток работ и служат главными вехами на пути прогресса в этой области. В рамках КТДР-исследований такой проблемой является проблема классификации непрерывных бихевиористических систем, рассматриваемых так, как если бы они точно совпадали с решениями идеализированных дифференциальных моделей, в том числе высших порядков. В наиболее сильной форме она предполагает классификацию таких систем с точностью до соответствующего класса моделей дифференциальной реализации, в частности, и класса нестационарных БДР-моделей (1), в обосновании чего служат теоремы 1–3 (и их следствия), которые позволяют в означенной классификации значительно приблизиться к идеальному сочетанию функциональной прозрачности и геометрической наглядности [18, 19].

Характеристический признак БДР-модели с запаздыванием: эквивалентные формулировки

Опишем теперь аналитическую схему решения вопроса о разрешимости (или неразрешимости) БДР-задачи (1). Итак, пусть $Z := X \otimes X$ — гильбертово тензорное произведение [15, с. 54] гильбертовых пространств X и X с кросс-нормой $\|\cdot\|_Z$, определяемой внутренним произведением [4, с. 64]. Сверх того, введем новые обозначения, которыми в дальнейшем будем широко пользоваться:

$$U := X \times X \times Y \times Z \times Z \times Z \times Z \times Z ,$$

$$\|(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\|_U := (\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2 + \|\cdot\|_Z^2)^{1/2};$$

$$\mathbf{L}_2 := \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times$$

$$\times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X)) \times \mathrm{L}_2(T, L(Z, X));$$

ясно, что функциональное пространство $\mathbf{L}_2$ (с топологией произведения) линейно гомеоморфно банахову пространству $\mathrm{L}_2(T, L(U, X))$.

Пусть π — универсальное билинейное отображение $\pi : X \times X \to \; \to X \otimes X$; на языке категорий морфизм π определяет тензорное произведение как универсальный отталкивающий объект [15, с. 40]. Универсальность билинейного отображения π состоит также в том, что

$$\pi : X \times X \to X \otimes X,$$

$$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \mapsto \pi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2, \; \|\mathrm{x}_1 \otimes \mathrm{x}_2\|_Z = \|\mathrm{x}_1\|_X \, \|\mathrm{x}_2\|_X ;$$

данные соотношения важны для определения конструкции нелинейного функционального оператора Релея–Ритца в части конкретизации нормы $\|\cdot\|_U$.

Далее считаем, что декартов квадрат $X^2 = X \times X$ наделен нормой $(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_X^2)^{1/2}$. В данной постановке $\pi \in \mathcal{L}(X^2, Z)$ и с учетом теоремы 2 [3, с. 245], для любого билинейного отображения $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X^2, X)$ всегда найдется линейный непрерывный оператор $\mathrm{D} \in L(Z, X)$ такой, что $\mathcal{D} = \mathrm{D} \circ \pi$, при этом для любой пары $(u, x) \in N$ будут выполняться включения:

$$\pi(x, x), \, \pi(x, dx/dt), \, \pi(dx/dt, dx/dt) \in \mathrm{L}_\infty(T, Z),$$

$$\pi(E(u), y), \, \pi(E(u), dy/dt) \in \mathrm{L}_2(T, Z).$$

Данные построения подытоживает следующее утверждение.

 ISSN 0572-2691

Лемма 1. Для любого набора $(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}_2$ и отображения

$$F: \mathrm{L}_2(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, X) \times \mathrm{L}_2(T, Y) \times$$

$$\times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \times \mathrm{L}_2(T, X^2) \to \mathrm{L}_1(T, X),$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) :=$$

$$:= A_1 y_1 + A_0 y_2 + B y_3 + \mathbb{D}_1 y_4 + \mathbb{D}_2 y_5 + \mathbb{D}_3 y_6 + \mathbb{D}_4 y_7 + \mathbb{D}_5 y_8$$

существуют единственный кортеж оператор-функций

$$(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) \in \mathbf{L}_2$$

и, соответственно, единственное линейное отображение

$$M: \mathrm{L}_2(T, U) \to \mathrm{L}_1(T, X),$$

имеющее аналитическое представление вида

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) \mapsto M(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) :=$$

$$= D_1 z_1 + D_2 z_2 + D_3 z_3 + D_4 z_4 + D_5 z_5 + D_6 z_6 + D_7 z_7 + D_8 z_8,$$

такое, что выполняется следующее функциональное равенство:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) \mapsto F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) =$$

$$= M(y_1, y_2, y_3, \pi(y_4), \pi(y_5), \pi(y_6), \pi(y_7), \pi(y_8)),$$

которое, в свою очередь, индуцирует для оператор-функций из конструкций отображений F и M следующие операторные соотношения:

$$A_1 = D_1,\ A_0 = D_2,\ B = D_3,$$

$$\mathbb{D}_1 = D_4 \circ \pi,\ \mathbb{D}_2 = D_5 \circ \pi,\ \mathbb{D}_3 = D_6 \circ \pi,\ \mathbb{D}_4 = D_7 \circ \pi,\ \mathbb{D}_5 = D_8 \circ \pi.$$

Следующая лемма обобщает бихевиористическое условие (7) [7].

Лемма 2. Пусть $S, Q \in \wp_\mu$, тогда $S \underset{\mathrm{mod}\,\mu}{\subseteq} Q$, если имеют место равенства:

$$S := \{t \in T: (g(t), w(t), v(t), q(t), s(t), h(t), \hat{u}(t), \tilde{u}(t)) = 0 \in U\},$$

$$Q := \{t \in T: \dot{g}(t) = 0 \in X\},\ \dot{g} = dg/dt,\ (g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in V_N,$$

$$V_N := \mathrm{Span}\{(dx/dt, x, u, \pi(x, x), \pi(x, dx/dt), \pi(dx/dt, dx/dt),$$

$$\pi(E(u), y), \pi(E(u), dy/dt)) \in \mathrm{L}_2(T, U):\ (u, x) \in N\}.$$

Далее, пусть $(\mathrm{L}_+(T, R), \leq_\mathrm{L})$ — положительный конус [20, с. 194] классов μ-эквивалентности всех вещественных неотрицательных μ-измеримых на интервале T функций с квазиупорядочением $\leq_\mathrm{L}$, при котором $\xi' \leq_\mathrm{L} \xi''$ в том и только в том случае, если $\xi'(t) \leq \xi''(t)$ μ-почти всюду в T. При этом для заданного подмножества $W \subset \mathrm{L}_+(T, R)$ через $\sup_\mathrm{L} W$ обозначим наименьшую верхнюю грань подмножества W, если эта грань существует в конусе $\mathrm{L}_+(T, R)$ в структуре квазиупорядочения $\leq_\mathrm{L}$, в частности, легко установить, что имеет место соотношение

$$\sup_{\mathrm{L}}\{\xi',\xi''\}=\xi'\vee\xi'':=2^{-1}(\xi'+\xi''+|\,\xi'-\xi''\,|).$$

В данной постановке рассмотрим решетку с ортодополнением [4, с. 339]:

$$\mathcal{R}(W):=\{\xi\in \mathrm{L}_+(T,R)\colon \xi\le_{\mathrm{L}} \sup_{\mathrm{L}} W\}\,.$$

Тогда $(\mathcal{R}(W),\le_{\mathrm{L}})$ — решетка с наименьшим $\chi_{\varnothing}\in \mathrm{L}_+(T,R)$ и наибольшим $\sup_{\mathrm{L}} W\in\ \mathrm{L}_+(T,R)$ элементами; здесь и далее $\chi_{\varnothing}$ — «нуль–функция» конуса $\mathrm{L}_+(T,R)$. В контексте определения 3 [16, с. 504] из теоремы 17 [3, с. 68] и следствия 1 [3, с. 69] несложно извлечь более общее утверждение; ниже $\inf_{\mathrm{L}}$ — наибольшая нижняя $\le_{\mathrm{L}}$-грань.

Лемма 3. Решетка $\mathcal{R}(W)$ — полная, т.е. $\inf_{\mathrm{L}} V,\ \sup_{\mathrm{L}} V\in\mathcal{R}(W)\quad \forall V\subseteq\mathcal{R}(W)$.

Пусть $\Psi\colon V_N\to \mathrm{L}_+(T,\,R)$ — функциональный оператор Релея–Ритца [7, 8]:

$$t\mapsto\Psi(\varphi)(t):=\begin{cases}\left\|\hat{A}(t)\dot{g}(t)\right\|_X/\left\|\varphi(t)\right\|_U, & \text{åñëè }\ \varphi(t)\ne 0\in U;\\ 0\in R, & \text{åñëè }\ \varphi(t)=0\in U;\end{cases}$$

где $\varphi:=(g,\,w,\,v,\,q,\,s,\,h,\,\hat{u},\,\tilde{u})\in V_N$. Ясно, что имеет место равенство

$$\left\|(g(t),\,w(t),\,v(t),\,q(t),\,s(t),\,h(t),\,\hat{u}(t),\,\tilde{u}(t))\right\|_U:=$$

$$=(\left\|g(t)\right\|_X^2+\left\|w(t)\right\|_X^2+\left\|v(t)\right\|_Y^2+\left\|q(t)\right\|_Z^2+\left\|s(t)\right\|_Z^2+\left\|h(t)\right\|_Z^2+\left\|\hat{u}(t)\right\|_Z^2+\left\|\tilde{u}(t)\right\|_Z^2)^{1/2}.$$

В силу леммы 2 на интервале времени T выполняется

$$\operatorname{supp}\Psi(\varphi)=\operatorname{supp}\left\|\hat{A}\dot{g}\right\|_X\ (\mathrm{mod}\ \mu)\,;$$

здесь в определении supp-конструкции носителя функции следуем [3, с. 137] (т.е. носитель определяется с точностью до множества меры нуль; не путать с определением 4 [16, с. 45]).

Нелинейный оператор Ψ удовлетворяет весьма простым (но важным) соотношениям:

$$\chi_{\varnothing}\le_{\mathrm{L}}\Psi(\varphi)=\Psi(r\varphi),\quad r\in R^*:=R\backslash\{0\},\quad \varphi\in V_N;$$

ниже будем различать в обозначениях образ точки $\Psi(\varphi)$ и образ множества $\Psi[\{\varphi\}]$.

Теория оператора Релея–Ритца нуждается в точном функционально-геометрическом языке, что заставляет уделять этому языку особое внимание. Поэтому введем дополнительную терминологию. А именно, функциональный оператор Ψ индуцирует отображение $P\Psi\colon P_N\to \mathrm{L}_+(T,R)$, которое, по сложившейся в теории представлений традиции [15, с. 239], назовем проективизацией оператора Релея–Ритца:

$$P\Psi(\gamma):=\Psi[\gamma],\ \ \gamma\in P_N\ \ (\gamma\subset V_N).$$

Здесь P_N — вещественное проективное пространство, ассоциированное с линейным многообразием V_N (с топологией, индуцированной из пространства $\mathrm{L}_2(T,U)$); т.е. P_N — множество орбит мультипликативной группы R^*, действующей на $V_N\setminus\{0\}$. В данной геометрической трактовке ключевым моментом являются топологические свойства пространства P_N, $\dim P_N < \aleph_0$, разумеется, в первую очередь (в контексте теоремы 2), его компактность, в частности, если имеет место $\dim V_N = 3$, то компактное 2-многообразие P_N устроено как лист Мебиуса, к которому по его границе приклеен круг [13, с. 162]. Попутно отметим, что на P_N можно ввести геометрическую структуру *CW*-комплекса [13, с. 140], что, в свою очередь, упрощает рассмотрение вопроса о геометрической реализации многообразия P_N — теорема 9.7 [13, с. 149].

Теорема 1. Каждое из следующих трех условий влечет за собой два других:

(i) БДР-задача (1) разрешима относительно $(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}_2$;

(ii) $\exists \theta \in \mathrm{L}_2(T, R): \Psi(\varphi) \leq_{\mathrm{L}} \theta,\ \forall \varphi \in V_N$;

(iii) $\exists \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]:\ \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N] \in \mathrm{L}_2(T, R)$.

При этом для выполнения $(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*$ необходимо, чтобы

$$\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset \mathrm{L}_\infty(T, R).$$

Замечание 1. Теорему 1 можно рассматривать как начальный этап в изучении проблемы, когда пучку N от неявного дифференциального уравнения с запаздыванием высшего порядка требуется сопоставить явную нестационарную билинейную дифференциальную систему второго порядка с тем же запаздыванием и тем же динамическим пучком N. В частности, данная постановка уместна, когда разрешимую для пары $(N, \hat{A}_1)$ БДР-задачу необходимо редуцировать к разрешимой БДР-задаче для пары $(N, \hat{A}_2)$ в положении, когда $\mu\{t \in T : \mathrm{Ker}\ \hat{A}_1(t) \neq 0 \in X\} \neq 0$, $\hat{A}_2$ — оператор гомотетии с коэффициентом 1; характер сопутствующих вычислений проиллюстрирован в примерах 1, 2.

Доказательство. Будем пользоваться идеями работы [18]. Придерживаясь определения 1 [18], введем в рассмотрение конструкцию M_2-оператора $M: \mathrm{L}_2(T, U) \to \mathrm{L}_1(T, X)$ вида

$$\exists (D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) \in \mathbf{L}_2 : M(g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) := $$
$$= D_1 g + D_2 w + D_3 v + D_4 q + D_5 s + D_6 h + D_7 \hat{u} + D_8 \tilde{u}\ ,$$

$\forall (g, w, v, q, s, h, \hat{u}, \tilde{u}) \in \mathrm{L}_2(T, U)$.

Остальные детали доказательства с небольшими уточнениями (с учетом леммы 1–3 для решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$) содержит схема M_2-продолжимости в форме следствия 2 и теоремы 3 [18], при этом необходимое условие для

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*$$

устанавливается модификацией доказательства теоремы 3 [7]. ■

Замечание 2. Необходимо отметить, что даже в случае $1 < \mathrm{Card}\, N < \aleph_0$ имеет место положение $\mathrm{Card}\, P_N = \exp \aleph_0$; но можно показать, что существует (теорема 17 [3, с. 68]) такое счетное множество $G \subset P_N$, что если в пространстве $\mathrm{L}_+(T, R)$ лежит $\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$, то вещественную функцию $\zeta := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$ осуществляет следующая $\sup$-конструкция:

$$t \mapsto \zeta(t) = \sup\{P\Psi(\gamma)(t) \in R\colon \gamma \in G\}.$$

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 легко модифицировать так, чтобы сформулировать критерий теоремы 3, выражающий в терминах углового расстояния (в гильбертовом пространстве) условия существования билинейной системы (1), реализующей пучки N_1, N_2, каждый из которых обладает своей БДР-моделью, в том числе, в математической постановке [7, 19], когда моделируемые операторы дифференциальной системы (1) суть стационарные, т.е.

$$(A_1, A_0, B, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_5) \in \mathbb{L}^*,$$

в частности, с минимальной нормой [18, 28].

В конкретных рассуждениях важен также следующий частный случай.

Следствие 1. Если $\dim V_N < \aleph_0$, $\Psi[V_N] \subset \mathrm{L}_2(T, R)$ и найдется $p \in [1, \infty)$, при котором

$$\Psi(\varphi_1 + \varphi_2) \leq_{\mathrm{L}} p\Psi(\varphi_1) + p\Psi(\varphi_2),\ (\varphi_1, \varphi_2) \in V_N \times V_N,$$

то БДР-задача (1) разрешима.

Заметим, что при $p = 1$ данное свойство в (контексте квазиупорядочения $\leq_{\mathrm{L}}$) сродни свойству «сублинейности» [20, с. 400] функциональных операторов.

Непрерывность оператора Релея–Ритца в анализе разрешимости БДР-задачи с запаздыванием

В случае компактности проективного многообразия P_N (равносильно, $\dim P_N < \aleph_0$) естественно попытаться связать это свойство с задачей построения решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$ в контексте условий непрерывности проективизации оператора Релея–Ритца (см. также [21]); ниже при выборе в теореме 2 метрической структуры в конусе $\mathrm{L}_+(T, R)$ прибегли к теоремам 15, 16 [3, с. 65, 67] (в данной постановке $\mathrm{L}_+(T, R)$ — полное сепарабельное метрическое пространство).

Теорема 2. Пусть $\dim P_N < \aleph_0$ и конус $\mathrm{L}_+(T, R)$ наделен топологией, индуцированной сходимостью по мере μ, или, что эквивалентно, инвариантной метрикой

$$\rho_T(f_1, f_2) := \int_T |f_1(\tau) - f_2(\tau)|(1 + |f_1(\tau) - f_2(\tau)|)^{-1} \mu(d\tau), \quad f_1, f_2 \in \mathrm{L}_+(T, R).$$

Тогда оператор $P\Psi : P_N \to \mathrm{L}_+(T, R)$ будет непрерывным, если пучок N таков, что

$$\forall \varphi \in V_N \setminus \{0\}: \operatorname{supp} \|\varphi\|_U = T \ (\mathrm{mod}\ \mu), \tag{2}$$

в частности, если

$$\forall \gamma \in P_N: \operatorname{supp} P\Psi(\gamma) = T \ (\mathrm{mod}\ \mu). \tag{3}$$

(Инвариантность предполагает $\rho_T(f + q, g + q) = \rho_T(f, g)$ для любых $f, g, q \in$ $\in \mathrm{L}_+(T, R)$; вариант неинвариантной неполной метрики, обеспечивающей непрерывность оператора Релея–Ритца, рассмотрен в [21]).

Отметим, что теорема 2 является развитием теоремы 3 [8], что подтверждает ее методологическую важность в математическом (апостериорном) моделировании сложных динамических систем [7, 8, 18, 19]. Одним из приложений этого результата (с учетом теоремы 3 [22, с. 61] и следствия 5.3 [23, с. 137]) является следующее геометрическое утверждение.

Следствие 2. Если при выполнении (2) или (3) оператор $P\Psi$ взаимнооднозначный, то $P\Psi$ — гомеоморфизм, а фундаментальная группа метрического пространства $(P\Psi[P_N], \rho_T)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$ при $\dim \mathrm{Span}\, N = 2$ и группе вычетов $\mathbb{Z}_2$ при $\dim \mathrm{Span}\, N \geq 3$, причем пространство $(P\Psi[P_N], \rho_T)$ ориентируемо, если размерность линейной оболочки $\mathrm{Span}\ N$ четная, и неориентируемо, если она нечетная.

Принимая во внимание, что непрерывная вещественная функция на компактном пространстве достигает своих наибольшего и наименьшего значений, приходим к заключению, что в положении следствия 2 и теоремы 5 [3, с. 28], для случая, когда $1 \leq \dim P_N < \aleph_0$ и при наличии $\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]$, найдутся такие точки $\gamma', \gamma'' \in P_N$, что

$$\rho_T(P\Psi(\gamma'), \chi_{\varnothing}) = \sup\{\rho_T(P\Psi(\gamma), \chi_{\varnothing}) : \gamma \in P_N\} \leq \rho_T(\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N], \chi_{\varnothing}) < \mu(T),$$

$$\rho_T(P\Psi(\gamma''), \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]) = \inf\{\rho_T(P\Psi(\gamma), \sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N]) : \gamma \in P_N\} \geq 0.$$

Заметим, что включение $P\Psi(\gamma') \in \mathrm{L}_2(T, R)$ не гарантирует вложения $\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset \mathrm{L}_2(T, R)$ (см. пример 1 из [8]). При этом отметим, что $\dim P_N = 0$ приводит к положению

$$\sup_{\mathrm{L}} P\Psi[P_N] = P\Psi[P_N] = \left\|\hat{A} d^2x/dt^2\right\|_{\mathrm{X}} / (\| dx/dt\|_X^2 + \|x\|_X^2 + \|u\|_Y^2 + \|x\|_X^4 +$$

$$+ \|x\|_X^2 \| dx/dt\|_X^2 + \| dx/dt\|_X^4 + \|E(u)\|_X^2 \|y\|_X^2 + \|E(u)\|_X^2 \| dy/dt\|_X^2)^{1/2}. \qquad (4)$$

В контексте теорем 1, 2 можно уточнить условия существования решетки $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$. В качестве отправной точки введем вспомогательную конструкцию: для натурального i обозначим через W_i некоторое конечное i^{-1} — плотное подмножество в метрическом пространстве $(P\Psi[P_N], \rho_T)$; подмножество W_i найдется в силу теоремы 2. Ниже $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{\xi_n\}$ означает предел последовательности $\{\xi_n\} \subset \mathrm{L}_+(T, R)$ в топологии, индуцированной метрикой ρ_T.

Теорема 3. Пусть $\{W_i\}_{i=1,\ldots,n}$, $W_i = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_{k_i}\} \subset P\Psi[P_N]$ и

$$f_n := \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n,\ \xi_i = \zeta_1 \vee \ldots \vee \zeta_{k_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

Тогда конус $\mathrm{L}_+(T, R)$ содержит решетку $\mathcal{R}(P\Psi[P_N])$, если и только если

$$\rho_T(f_n, f_m) \to 0\ (n, m \to \infty),$$

причем БДР-разрешимость приобретает вид: пара $(N, \hat{A})$ обладает дифференциальной реализацией (1) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lim}_{\rho_T}\{f_n\} \in \mathrm{L}_2(T, R)$, что равносильно

$$\mathcal{R}(P\Psi[P_N]) \subset \mathrm{L}_2(T, R).$$

В завершение приведем примеры, снимающие возможное представление, что выше особое ударение всюду делали исключительно на идейном аспекте каждого понятия, тем самым невольно пренебрегая его рассмотрением с вычислительной точки зрения; всюду ниже считаем, что моделирование осуществляется с нулевым запаздыванием $\bar{\tau} = 0$ (т.е. $y(\cdot) = x(\cdot)$).

Пример 1. Пусть $T = [0, 10]$, $Y := X$, $\hat{A}$ — оператор гомотетии с единичным коэффициентом [20, с. 87]

$$A_1 = 0 \in L(X, X),\ \mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_3 = \mathsf{D}_4 = \mathsf{D}_5 = 0 \in \mathsf{L}(X^2, X),\ e \in X,\ \| e \|_X = 1,$$

$$t \mapsto u(t) = 0 \in \mathrm{L}_2(T, X),\ t \mapsto x(t) = (t \sin t) e.$$

Тогда функция $f := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N) = \| d^2 x / dt^2 \|_X (\| x \|_X^2 + \| x \|_X^2 \| dx / dt \|_X^2)^{-1/2}$ (рис. 1, где $f^2(t) = (2\cos t - t\sin t)^2 ((t\sin t)^2 + (t\sin t)^2 (\sin t + t\cos t)^2)^{-1})$ не принадлежит пространству $\mathrm{L}_2(T, R)$ и согласно теореме 1 и формуле (4) реализация (1) для неуправляемого процесса $N = \{(u, x)\}$ не существует.

Пример 2. Изменим постановку примера 1: $t \mapsto u(t) = (t\sin^2 t + 2^{-1} t^2 \sin 2t + {} + \cos t)e$. Тогда (рис. 2, где $f^2(t) = (2\cos t - t\sin t)^2 \times ((t\sin t)^2 + (t\sin t)^2 (\sin t + {} + t\cos t)^2 + (t\sin^2 t + 2^{-1} t^2 \sin 2t + \cos t)^2)^{-1})$ $f := \sup_{\mathrm{L}} P\Psi(P_N) = \| d^2 x / dt^2 \|_X (\| x \|_X^2 + {} + \| x \|_X^2 \| dx / dt \|_X^2 + \| u \|_Y^2)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, R)$ и, значит, реализация (1) для управляемого процесса $N = \{(u, x)\}$ существует; нетрудно установить, что

$$d^2 x / dt^2 + x = 2u - 2\mathsf{D}_2(x, dx / dt),$$

где $\mathsf{D}_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_X\, e$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — скалярное произведение в X.

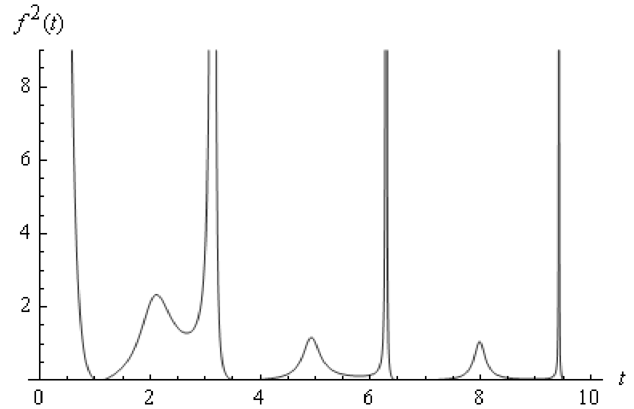

Рис. 1

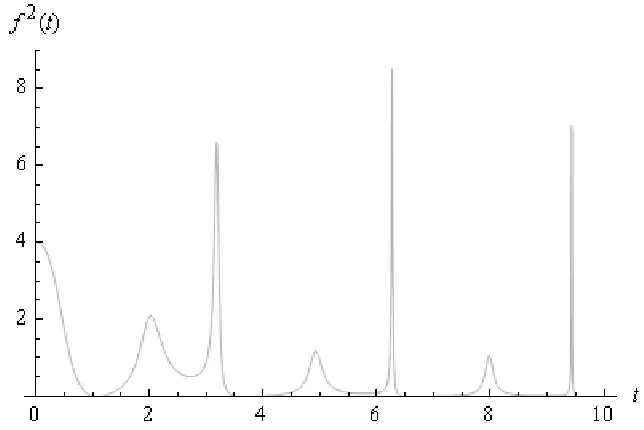

Рис. 2

Отметим, что для более сложных вариантов задания пары ($t \mapsto u(t)$, $t \mapsto x(t)$) символьные вычисления функции $f^2(\cdot)$ (аналогичной рис. 1, 2) можно проводить средствами компьютерной алгебры математической физики [24].

В данном контексте схему анализа разрешимости БДР-задачи примеров 1, 2 можно модифицировать для качественного анализа редукции точных многомерных решений диффузии со степенными нелинейностями [25] к задаче Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полилинейной структурой.

Пример 3. В силу (4) и теоремы 1 покажем, что любой динамический процесс

$$(u,\, x),\;\; x \in AC^1(T,\, X),\, u \in \mathrm{L}_2(T, Y),$$

обладающий дифференциальной реализацией (1), имеет реализацию в классе линейных систем (т.е. с нулевыми операторами $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \mathsf{D}_3, \mathsf{D}_4, \mathsf{D}_5$) — факт полезный, поскольку применим в рамках метода «квазилинеаризации» [17, с. 168], используемого для построения оптимального программного управления по технологии последовательных приближений [17, с. 174] (известной как метод Пикара [20, с. 215]) в решении двухточечной краевой задачи.

Представляется, что приведенные выше примеры дают дополнительные основания для дальнейшего изучении БДР-моделей с запаздыванием (в контексте развития тензорного анализа квазилинейных векторных полей [26, 27], в том числе с минимальной операторной нормой [28]), в частности, для апостериорного моделирования нестационарных билинейных динамических систем, траектории которых суть аналитические функции, что a priori обеспечивает условие (2) теоремы 2 в силу принципа изолированности нулей [29, с. 228].

Заключение

Настоящий период развития КТДР в бесконечномерной постановке в значительной мере связан с созданием нового языка — теории расширений M_p-операторов [18]. Данная теория существенным образом перестроила и укрепила теоретико-системные основания КТДР и обеспечила гармоничную связь чисто геометрических идей M_p-продолжимости с методами теории дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах [5], причем делая упор на приложения [17], а не на достижение максимальной общности изложения. К тому же, не будет преувеличением заметить, что «билинейный аппарат» КТДР, получивший продвижение выше, доставляет, по меньшей мере, эстетическое удовлетворение; аналитик, преследующий чисто эстетические цели, как правило, содействует созиданию нового формального языка, более приспособленного к тому, чтобы удовлетворить математические запросы физики. Действительно, часто математические модели и законы постулируются на основе философии Аристотеля и эстетического подхода и только позднее выясняется, что они также могли быть до некоторой степени выведены из имеющихся (или пополненных) знаний и наблюдаемых фактов. В качестве примера можно указать на историю разработки гиперболоидной модели сетчатой башни Шухова. Еще более показательна история открытия закона всемирного тяготения [30, с. 115], сформулированного Гуком в одном из писем Ньютону. Гук считал [31, с. 410], что сила притяжения тела распространяется равномерно по сфере, окружающей (равноудалено) это тело, и, следовательно, обратно пропорциональна квадрату радиуса данной сферы, т.е. фактически Гук утверждал, что этот закон является следствием трехмерной геометрии окружающего физического пространства. Это побудило Ньютона отказаться от намерения оставить занятия наукой, в итоге по существу послужив для него поводом написания знаменитых «Principia» [32], с которых практически началась современная математическая физика.

Последнее обстоятельство не могло не наложить свой отпечаток и на содержание данной работы, а именно, — так как во многих практически важных задачах реализации дифференциального представления моделируемых континуальных пучков программно-управляемых динамических процессов необходимо учитывать нелинейную взаимосвязь как от самой траектории и скорости движения на ней, так и от программного управления, то выше основное внимание было сосредоточено на модели реализации, зависящей от пяти нестационарных билинейных структур. Первая из них задана на самой траектории, второй билинейный оператор зависит от траектории и скорости движения по ней, третий зависит только от скорости движения по этой траектории и два других учитывают эти переменные в связи с влиянием на них программного управления и эффекта запаздывания.

Для того чтобы пойти дальше, можно вполне уверенно указать теоретико-системное направление, которое составит алгебраическую основу (без чрезмерного нагнетания технических средств алгебраической геометрии) следующего этапа развития качественной теории дифференциальной реализации высших порядков [33], а именно, переход от билинейной структуры нелинейных связей к полилинейным. Методологически данный переход состоит в использования геометрического языка тензорных структур пространств Фока [4, с. 68] и проективных представлений [15, с. 238] в контексте исследования метрических свойств операторов Релея–Ритца [21] средствами компьютерной алгебры в математической физике [24, 34].

А.В. Лакеєв, В.А. Русанов, А.В. Банщіков

ДО ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ РЕАЛІЗАЦІЇ БІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Визначено аналітичні умови (необхідні/достатні) розв'язності задачі диференціальної реалізації континуального пучка керованих траєкторних кривих у класі білінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь (із запізненням і без) другого порядку в матеріальному сепарабельному гільбертовому просторі. Ця задача відноситься до типу обернених задач для адитивної комбінації нестаціонарних лінійних і білінійних операторів еволюційних рівнянь у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Метамовою даної теорії служать конструкції тензорних добутків гільбертових просторів, структури решіток з ортодоповненням і функціональний апарат нелінійного оператора Релея–Рітца. При цьому показано, що в разі кінцевого пучка траєкторій наявність властивостей типу сублінійності даного оператора дозволяє отримати достатні умови для існування таких реалізацій. Попутно обґрунтовуються тополого-метричні умови безперервності проективізації нелінійного функціонального оператора Релея–Рітца з обчисленням фундаментальної групи його образу. Отримані результати спонукають до розвитку теорії нелінійної структурної ідентифікації полілінійних диференціальних моделей вищих порядків (наприклад, для моделювання багатоканальних нейроімплантів типу «Neuralink»).

Ключові слова: тензорний аналіз, нелінійний системний аналіз, білінійна диференціальна реалізація із запізненням, функціональний оператор Релея–Рітца.

A.V. Lakeyev, V.A. Rusanov, A.V. Banshchikov

TO A TENSOR ANALYSIS OF THE SOLVABILITY OF THE PROBLEM OF REALIZATION OF A SECOND-ORDER BILINEAR SYSTEM WITH DELAY

The analytical conditions (necessary and sufficient) are defined for the solvability of the problem of differential realization of a continuous beam of controlled trajectory curves in the class of bilinear nonautonomous ordinary differential equations (with delay and without it) of the second order in a real separable Hilbert space. The problem under consideration belongs to the type of inverse problems for an additive combination of nonstationary linear and bilinear operators of evolution equations in an infinite-dimensional Hilbert space. The meta-language of this theory is the constructions of tensor products of Hilbert spaces, the structures of lattices with ortho-complementation, and the functional apparatus of the nonlinear Rayleigh-Ritz operator. It is shown that in the case of a finite bundle of trajectories, the presence of a sublinearity-type property of this operator allows us to obtain sufficient conditions for the existence of such realizations. Along the way, the topological-metric conditions for the continuity of the projectivization of the nonlinear Rayleigh-Ritz functional operator with the calculation of the fundamental group of its image are justified. The results obtained provide the motivation for the development of a qualitative theory of nonlinear structural identification of higher-order multi-linear differential models (e.g. for processes, induced by the «brain–machine» interface-platform of the type of Neuralink).

Keywords: tensor analysis, nonlinear system analysis, bilinear delay differential realization, functional Rayleigh-Ritz operator.

1. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. М. : Мир, 1978. 312 с.
2. Ahmed N.U. Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space. New York : John Wiley and Sons, 1988. 187 p.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М. : Мир, 1977. 360 с.
5. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М. : Наука, 1983. 384 с.
6. Гольдман Н.Л. Определение коэффициентов при производной по времени в квазилинейных параболических уравнениях в пространствах Гельдера. *Дифференциальные уравнения.* 2012. **48**, № 12. С. 1597–1606. https://doi.org/10.1134/S0012266112120026 .
7. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.É. On the differential realization theory of nonlinear dynamic processes in Hilbert space. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* 2015. **97**, N 4. P. 495–532. http://dx.doi.org/10.17654/FJMSJun2015_495_532.
8. Русанов В.А., Данеев А.В., Линке Ю.Э. К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. **53**, № 4. С. 71–83. DOI: 10.1007/s10559-017-9957-z.
9. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Sizykh V.N. Higher-order differential realization of polylinear-controlled dynamic processes in a Hilbert space. *Advances in Differential Equations and Control Processes.* 2018. **19**, N 3. P. 263–274. http://dx.doi.org/10.17654/DE019030263.
10. Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. *Сиб. журн. индустр. математики.* 2011. **14**, № 1. С. 27–39. https://doi.org/10.1134/S1990478911040053; № 2. С. 28–33. https://doi.org/10.1134/S1990478912010024.
11. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Lakeyev A.V. Maximum entropy principle in the differential second-order realization of a nonstationary bilinear system. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. 2019. **20**, N 2. P. 223–248. http://dx.doi.org/10.17654/DE020020223.
12. Daneev A.V., Lakeyev A.V., Rusanov V.A. Existence of a bilinear differential realization in the constructions of tensor product of Hilbert spaces. *WSEAS Transactions on Mathematics.* 2020. **19**. P. 99–107. DOI: 10.37394/23206.2020.19.9.
13. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014. 360 с.
14. Brzychczy S., Poznanski R. Mathematical neuroscience. New York : Academic Press, 2013. 208 p.
15. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М. : Наука, 1978. 344 с.
16. Иосида К. Функциональный анализ. М. : Мир, 1967. 624 с.

17. Willems J.C. System theoretic models for the analysis of physical systems. *Ric. Aut.* 1979. N 10. P. 71–106.
18. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до M_p-операторов. *Дифференциальные уравнения.* 2013. **49**, № 3. С. 358–370. DOI: 10.1134/S0012 266113030105.
19. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения.* 2015. **51**, № 4. С. 524–537. DOI: 10.1134/S037406411504010X.
20. Эдвардс Р. Функциональный анализ: Теория и приложения. М. : Мир, 1969. 1072 с.
21. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. On the theory of differential realization: Criteria of continuity of the nonlinear Rayleigh–Ritz operator. I*nternational Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications.* 2020. **12**, N 1. P. 1–22. http://dx.doi.org/10.17654/FA012010001.
22. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М. : Наука, 1989. 528 с.
23. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М. : МЦНМО, 2014. 584 с.
24. Banshchikov A.V., Bourlakova L.A. Computer algebra and problems of motion stability. *Mathematics and Computer in Simulation*. 2001. **57**, N 3. P. 161–174.
25. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии. *Дифференциальные уравнения.* 2018. **54**, № 1. С. 108–122. DOI: 10.1134/S0374064118010090.
26. Brockett R.W. Nonlinear control theory and differential geometry. *Proceeding ICM-82 in Warsaw. Polish Scientific Publishers*. 1984. P. 1357–1368.
27. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeyev A.V., Linke Yu.É. To existence of a nonstationary quasilinear vector field realizing the expansion of a control trajectory bundle in Hilbert space. *WSEAS Transactions on Systems.* 2020. **19**. P. 115–120. DOI: 10.37394/23202.2020.19.16
28. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V., Mironov A.S. Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. 2013. **11**, N 1. P. 1–40.
29. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М. : Мир, 1964. 431 с.
30. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : МЦНМО, 2012. 344 с.
31. Клайн М. Математика. Утрата определенности. М. : Мир, 1984. 434 с.
32. Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1686; русский перевод: И. Ньютон Математические начала натуральной философии. Пер. А.Н. Крылова. В кн.: *Собрание трудов академика А.Н. Крылова*. М. ; Л. : Изд. АН СССР. 1936. **7**.
33. Ван дер Шафт А. К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка. Теория систем. Математические методы и моделирование. Пер. с англ. сб. статей (ред. А.Н. Колмогоров, С.П. Новиков). М. : Мир, 1989. С. 192–237. [Van der Schaft A.J. On Realization of Nonlinear Systems Described by Higher-Order Differential Equations. Mathematical Systems Theory. 1987 **19**. P. 239–275.]
34. Банщиков А.В., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.* №2016618253 от 25.07.2016. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ).

Получено 18.11.2019
После доработки 16.11.2020