УДК 517.929

Д.Я. Хусаинов, А.С. Бычков, А.С. Сиренко, Ж.И. Буранов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ, СОСТОЯЩИМИ ИЗ ЛИНЕЙНЫХ ПОДСИСТЕМ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Ключевые слова: функция Ляпунова, уравнения с переключениями, дифференциальные подсистемы, разностные подсистемы, устойчивость, запаздывание.

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований устойчивости систем с переключениями [1]. Всевозможных классов динамических систем, описываемых уравнениями с переключениями, достаточно много. Можно указать гибридные системы, системы со скользящими режимами, логико-динамические системы [2–6, 9–12, 17–19]. Авторы настоящей работы разделяют системы с переключениями на два класса. Системы с определенными и неопределенными переключениями. В настоящей работе рассматриваются системы с определенными переключениями.

Системами с определенными переключениями будем называть системы, состоящие из динамических подсистем, представляющих дифференциальные подсистемы, функционирующие на заданных промежутках времени, и разностных, определяющих переключение дифференциальных подсистем. Существенной особенностью систем такого вида является то, что времена переключений точно известны. Известны также подсистемы, функционирующие на каждом промежутке времени. Таким образом, динамику системы можно записать в следующем формальном виде:

$$S(F, G, T) = \{S_i(f_i), i \in I, S_j(g_j), j \in J, T : t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots\},$$

$$S_i(f_i) : x'(t) = f_i(t, x(t)),\ \ t_{n-1} \le t < t_{n+1}\ \ i \in I,$$

$$S_j(g_j) : x(t_n) = g_j(t_n - 0, x(t_n - 0)),\ \ j \in J.$$

$$T : t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \tag{1}$$

и начальными условиями $x(t) = x_0$. Будем считать, что функции $f_i(x(t)t),\ i \in I,$ и $g_j(x(t), t),\ \ j \in J,$ принадлежат некоторым классам функций

$$f_i(x(t), t) \in \Phi,\ \ g_j(x(t), t) \in \Gamma,$$

удовлетворяют нулевым условиям, т.е. $x(t) \equiv 0$ является решением системы (1), последовательность $T : t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ задана и системы с переключениями таковы, что их решения удовлетворяют условиям существования и единственности и непрерывно зависят от начальных условий.

Предварительно приведем общие определения устойчивости.

Определение 1. Нулевое решение системы с переключениями (1) называется устойчивым по Ляпунову, равномерно по переключениям, если для произвольного ее решения $x(t)$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $t > 0$ будет выполняться $|x(t)| < \varepsilon$, если $|x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Определение 2. Нулевое решение системы с переключениями (1) называется равномерно асимптотически устойчивым, оно устойчиво по Ляпунову и $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$.

Системы с линейными подсистемами с непрерывными переключениями

Для систем такого вида с линейными подсистемами основные результаты по исследованию устойчивости нулевого решения были получены в работах [7, 8, 16]. Рассмотрим системы с переключениями, состоящие из линейных дифференциальных подсистем, с условием непрерывности в точках переключения. Обозначим их следующим образом:

$$S(A) = \{S_i(A_i) : i \in I\},\ S_i(A_i) : \dot{x}(t) = A_i x(t),\ \ i \in I,\ \ t \ge 0. \tag{2}$$

Фактически это системы вида (1), с линейными дифференциальными подсистемами (3), разностная часть которых имеет тождественный вид

$$x(t_n) = Ix(t_n - 0),$$

I — единичная матрица. Имеют место следующие условия асимптотической устойчивости.

Метод «сшивания поверхностей уровня»

Рассмотрим системы вида (3), состоящие из линейных дифференциальных подсистем вида

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),\ \ t_{i-1-} \le t < t_i,$$

в заданные моменты времени $t = t_i$ с сохранением условия непрерывности происходит переключение и функционирование системы продолжается по закону следующей дифференциальной подсистемы:

$$\dot{x}(t) = A_{i+1} x(t),\ t_{i+1} \le t < t_{i+2}.$$

При исследовании устойчивости такого вида системы используется второй метод Ляпунова с функцией квадратичного вида $V(x) = x^T Hx$. Функция строится в виде квадрата интеграла линейной системы

$$V(x,t) = x_0^T x_0 = (e^{-At}x)^T (e^{-At}x). \tag{3}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть на каждом временном промежутке $t_i \le t < t_{i+1}$ система с переключениями описывается подсистемами

$$x' = A_i x,\ i = \overline{1, n}.$$

Тогда при $t_{n-1} \le t < t_n$ будет выполняться

 ISSN 0572-2691

$$|x(t)| \le \frac{|x(t_0)|}{\prod\limits_{i=1}^{n} \min\limits_{t_{i-1} \le t < t_i} \{\sqrt{\lambda_{\min}[H_i(t)]}\}}, \quad H_i(t) = e^{-A_i^T(t-t_i)} e^{-A_i(t-t_i)}, \; i = 1, n, \tag{4}$$

$\lambda_{\min}[\bullet]$ — минимальное собственное число соответствующей симметричной матрицы.

Доказательство. При проведении доказательства используем «метод сшивания» поверхностей уровня функций Ляпунова, представляющих собой квадраты интегралов каждого из промежутков времени.

На первом промежутке $0 \le t < 0$ функцию Ляпунова выбираем в виде $V_1(x,t) = x^T H_1(t) x$, $H_1(t) = e^{-A_1^T(t-t_0)} e^{-A_1(t-t_0)}$, где $e^{A_1 t}$ — фундаментальная матрица системы

$$x' = A_1 x, \; t_0 \le t < t_1, \; t_0 = 0,$$

нормированная при $t_0 = 0$. Для этой функции выполняются неравенства квадратичных форм

$$\lambda_{\min}[H_1(t)]|x|^2 \le V_1(x,t) = x^T H_1(t) x \le \lambda_{\max}[H_1(t)]|x|^2,$$

$\lambda_{\max}[\bullet]$, $\lambda_{\min}[\bullet]$ — экстремальные собственные числа соответствующей симметричной матрицы. И, поскольку функция Ляпунова представляет собой квадрат интеграла системы, то полная производная в силу системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} V_1(x(t),t) = x'^T(t)\left[e^{-A_1^T t} e^{-A_1^T}\right] x(t) + x^T(t) \frac{d}{dt}\left[e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}\right] x(t) +$$

$$+ x^T(t)\left[e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}\right] x'(t) = x^T(t) A_1^T \left[e^{-A_1^T t} e^{-A_1^T t}\right] x(t) +$$

$$+ x^T(t)\left[-A_1^T e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t} - e^{-A_1^T t} A_1 e^{-A_1 t}\right] x(t) + x^T(t)\left[e^{-A_1^T t} e^{-A_1 t}\right] A_1 x(t).$$

Поскольку матрица коммутирует со своим матричным экспоненциалом, т.е.

$$A_1 e^{A_1 t} = e^{A_1 t} A_1 \text{ и } A_1^T e^{A_1^T t} = e^{A_1^T t} A_1^T, \text{ то } \frac{d}{dt} V_1(x(t),t) \equiv 0.$$

Поэтому вдоль решений функция Ляпунова постоянная, или $V_1(x(t),t) = \text{const}$, $t_0 \le t < t_1$. А поскольку при $t = 0$ выполняется $H_1(0) = I$, то на первом интервале $t_0 \le t < t_1$ выполняется неравенство

$$\lambda_{\min}[H_1(t)]|x(t)|^2 \le V_1(x(t),t) \equiv V_1(x(t_0),t_0) \le \lambda_{\max}[H_1(t_0)]|x(t_0)|^2 = |x(0)|^2.$$

И для первого промежутка времени получаем

$$|x(t)| \le \frac{|x(0)|}{\min\limits_{t \in [t_0, t_1]} \left\{\sqrt{\lambda_{\min}[H_1(t)]}\right\}}.$$

Рассмотрим второй промежуток времени: $x' = A_2 x$, $t_1 \le t < t_2$.

Для этого промежутка времени будем иметь следующее. Функция Ляпунова имеет вид квадратичной формы

$$V_2(x,t)=x^T H_2(t)x\,,\ H_2(t)=e^{-A_2^T(t-t_1)}e^{-A_2(t-t_1)}.$$

Двустороннее неравенство запишем

$$\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]|x|^2\le V_2(x,t)=x^T H_2(t)x\le\lambda_{\max}\left[H_2(t)\right]|x|^2.$$

Для полной производной в силу второй подсистемы также будет выполняться

$$\frac{d}{dt}V_2\left(x(t),t\right)\equiv 0\,,\ t_1\le t<t_2.$$

Соответственно,

$$V_2(x(t),t)=V_2\left(x(t_1+0),t_1+0\right)=\mathrm{const}\,,\ t_1\le t<t_2.$$

Аналогично на промежутке $t_1\le t<t_2$ получаем

$$\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]|x(t)|^2\le V_2(x(t),t)\equiv V_1\left(x(t_1+0),t_1+0\right)\le$$
$$\le\lambda_{\max}\left[H_1\left(t_1+0\right)\right]\left|x\left(t_1+0\right)\right|^2=\left|x\left(t_1\right)\right|^2.$$

Отсюда на промежутке $t_1\le t<t_2$ получаем

$$|x(t)|\le\frac{|x(t_1)|}{\min\limits_{t_1\le t<t_2}\left\{\sqrt{\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]}\right\}}\le\frac{|x(t_0)|}{\min\limits_{t_0\le t<t_1}\left\{\sqrt{\lambda_{\min}\left[H_1(t)\right]}\right\}\min\limits_{t_1\le t<t_2}\left\{\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]\right\}}.$$

Продолжая процесс, получаем, что на промежутке $t_{n-1}\le t<t_n$ будет выполняться

$$|x(t)|\le\frac{|x(t_0)|}{\prod\limits_{i=1}^{n}\min\limits_{t_{i-1}\le t<t_i}\left\{\sqrt{\lambda_{\min}\left[H_i(t)\right]}\right\}}.$$

Теорема доказана.

Имеет место следующее следствие.

Следствие 1. Чтобы нулевое решение системы с переключениями с сохранением условия непрерывности (3) было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы на произвольном промежутке $t_{n-1}\le t<t_n$ функция $\lambda_{\min}\left[H_n\right]$ была ограниченной снизу, т.е. $\lambda_{\min}\left[H_n\right]\ge N$ и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x(t_0)|}{\prod\limits_{i=1}^{n}\min\limits_{t_{i-1}\le t<t_i}\left\{\sqrt{\lambda_{\min}\left[H_i(t)\right]}\right\}}=0.$$

При доказательстве теоремы 1 в моменты переключений накладывалось ограничение на поверхность уровня $V_n(x,t)=C$. Она должна была содержать в момент переключения предыдущую поверхность уровня $V_{n-1}(x,t)=C$. Более точным способом оценки является, так называемый, метод «сшивания» поверхностей уровня функций Ляпунова, определенных для соседних промежутков времени. В этом случае в моменты переключения поверхности уровня соседних функций Ляпунова совпадают и имеет место следующий результат.

 ISSN 0572-2691

Теорема 2. Пусть на каждом временном промежутке $t_{i-1} \le t < t_i$ система с переключениями описывается подсистемами $x' = A_i x$.

Тогда на промежутке $t_{n-1} \le t < t_n$ будет иметь место неравенство

$$|x(t)| \le \frac{|x_0|^2}{\prod\limits_{i=0}^{n-1} \min\limits_{t_i \le t \le t_{i+1}} \{\lambda_{\min}[H_{i+1}(t)]\}},$$

$$H_i(t) = \left[\prod_{s=1}^{i} e^{-A_s^T(t_s - t_{s-1})}\right] e^{-A_i^T(t - t_{n-1})} e^{-A_i(t - t_{n-1})} \left[\prod_{s=1}^{i} e^{A_i(t_i - t_{i-1})}\right]. \quad (5)$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, на первом участке функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_1(x, t) = x^T H_1(t) x, \ H_1(t) = e^{-A_1^T(t - t_0)} e^{-A_1(t - t_0)}.$$

Для нее выполняется

$$\lambda_{\min}[H_1(t)]|x|^2 \le V_1(x, t) = x^T H_1(t) x \le \lambda_{\max}[H_1(t)]|x|^2,$$

$$\frac{d}{dt} V_1(x(t), t) \equiv 0, \ 0 = t_0 \le t < t_1.$$

Поэтому функция Ляпунова на первом промежутке постоянная и равна значению на левом конце

$$\lambda_{\min}[H_1(t)]|x(t)|^2 \le x^T(t) H_1(t) x(t) = x^T(t) e^{-A_1^T(t - t_0)} e^{-A_1(t - t_0)} x(t) =$$
$$= V_1(x(t), t) \equiv V_1(x(t_0), t_0) = x_0^T x_0.$$

Отсюда получаем, что на первом промежутке выполняется неравенство

$$|x(t)| \le \frac{|x_0|}{\min\limits_{t_0 \le t \le t_1} \{\lambda_{\min}[H_1(t)]\}}.$$

Рассмотрим второй промежуток. Для второго промежутка функцию Ляпунова строим «в деформированном виде»

$$V_2(x, t) = \left(e^{-A_2(t - t_1)} C_2 x\right)^T \left(e^{-A_2(t - t_1)} C_2 x\right) = x^T \left[C_2^T e^{-A_2^T(t - t_1)} e^{-A_2(t - t_1)} C_2\right] x,$$

где C_2 — некоторая невырожденная постоянная матрица. Она выбирается из условия «сшивания» в момент переключения $t = t_1$ (т.е. совпадения поверхностей уровня функций Ляпунова) следующим образом: $e^{-A_1(t_1 - t_0)} = e^{-A_2(t_1 - t_0)} C_2$. Отсюда $C_2 = e^{A_2(t_1 - t_0)} e^{-A_1(t_1 - t_0)}$.

На втором участке функция Ляпунова имеет вид

$$V_2(x, t) = x^T H_2(t) x,$$

$$H_2(t) = \left(e^{-A_1^T(t_1 - t_0)} e^{A_2^T(t_1 - t_0)} e^{-A_2^T(t - t_1)} e^{-A_2(t - t_1)} e^{A_2(t_1 - t_0)} e^{-A_1(t_1 - t_0)}\right).$$

Для нее также выполняются соотношения

$$\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]|x|^2 \le V_2(x,t) = x^T H_2(t)x \le \lambda_{\max}\left[H_2(t)\right]|x|^2 ,$$

$$\frac{d}{dt}V_2(x(t),t) \equiv 0 , \ t_1 \le t < t_2 .$$

Поэтому функция Ляпунова $V_2(x(t),t)$ на втором промежутке времени также постоянная, т.е.

$$\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]|x(t)|^2 \le x^T(t)H_2(t)x(t) =$$

$$= x^T(t)\left(e^{-A_1^T(t_1-t_0)} e^{A_2^T(t_1-t_0)} e^{-A_2^T(t-t_1)} e^{-A_2(t-t_1)} e^{A_2(t_1-t_0)} e^{-A_1(t_1-t_0)} \right) x(t) =$$

$$= V_2\left(x(t),t\right) \equiv V_2\left(x(t_1),t_1\right) \le \frac{|x_0|^2}{\min\limits_{t_0\le t\le t_1}\left\{\lambda_{\min}\left[H_1(t)\right]\right\}} .$$

И на втором промежутке $t_1 \le t < t_2$ получаем следующую оценку решения системы с переключениями

$$|x(t)| \le \frac{|x_0|^2}{\min\limits_{t_0\le t\le t_1}\left\{\lambda_{\min}\left[H_1(t)\right]\right\} \min\limits_{t_1\le t\le t_2}\left\{\lambda_{\min}\left[H_2(t)\right]\right\}} .$$

Продолжая процесс, получаем, что на промежутке $t_{n-1} \le t < t_n$ будет выполняться следующее неравенство:

$$|x(t)| \le \frac{|x_0|^2}{\prod\limits_{i=0}^{n-1} \min\limits_{t_i\le t\le t_{i+1}}\left\{\lambda_{\min}\left[H_{i+1}(t)\right]\right\}} ,$$

$$H_i(t) = \left[\prod_{s=1}^{i} e^{-A_s^T(t_s-t_{s-1})}\right] e^{-A_i^T(t-t_{n-1})} e^{-A_i(t-t_{n-1})} \left[\prod_{s=1}^{i} e^{A_i(t_i-t_{i-1})}\right].$$

Использование функции Ляпунова с постоянными коэффициентами

Функция Ляпунова в приведенных теоремах строилась на основании общего интеграла системы, поэтому оценка является «точной». Однако конструктивность ее вычисления проблематична, поскольку для ее получения надо знать интеграл каждой из подсистем, фактически знать фундаментальную систему решений.

Другой подход — получение условий устойчивости нулевого решения системы с переключениями и сходимости процесса с использованием функций Ляпунова, которые находятся из матричных уравнений Ляпунова. Однако при этом накладываются условия асимптотической устойчивости каждой из подсистем. Если матрицы линейных подсистем асимптотически устойчивы, то положительно-определенные матрицы H_i, входящие в функцию Ляпунова $V(x) = x^T Hx$, можно определять при решении матричных уравнений Ляпунова

$$A_i^T H + HA_i = -C_i , \ i = \overline{1, n}, \qquad (6)$$

которые имеют единственные решения при произвольных положительно-определенных матрицах C_i, $i = \overline{1, n}$.

 ISSN 0572-2691

Теорема 3. Пусть каждая из подсистем системы с непрерывными переключениями (3) асимптотически устойчивая. Тогда при $t_{n-1} \le t \le t_n$ выполняется соотношение

$$\left|x(t)\right| \le \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi(H_i)} \left|x(t_0)\right| \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(H_i)(t_i - t_{i-1}) + \gamma(H_n)(t - t_n)\right]\right\},$$

где $\varphi_i(H_i) = \lambda_{\max}(H_i)/\lambda_{\min}(H_i)$, $\gamma(H_i) = \lambda_{\min}(C_i)/\lambda_{\max}(H_i)$, $i = 1, n$, C_i — произвольные положительно определенные матрицы, H_i — соответствующие решения матричных уравнений Ляпунова (6).

Доказательство. Доказательство представляет собой последовательную оценку решений систем линейных дифференциальных уравнений с использованием аппарата квадратичных функций Ляпунова, симметричные положительно-определенные матрицы которых получены при решении матричных уравнений Ляпунова.

На первом промежутке $t_0 \le t \le t_1$ подсистема дифференциальных уравнений имеет вид

$$x' = A_1 x,\ t_0 \le t < t_1,\ t_0 = 0.$$

Матрица H_1 является решением матричного дифференциального уравнения

$$A_1^T H + HA_1 = -C_1$$

и при произвольной положительно-определенной матрице C_1 будет положительно-определенной. Для функции Ляпунова $V_1(x)$ и ее полной производной в силу первой подсистемы на первом промежутке будет выполняться неравенство

$$\lambda_{\min}(H_1)\left|x(t)\right|^2 \le V_1(x(t)) \le \lambda_{\max}(H_1)\left|x(t)\right|^2,\ dV(x(t))/dt \le -\lambda_{\min}(C_1)\left|x(t)\right|^2.$$

Из этих неравенств получаем дифференциальное неравенство

$$dV_1(x(t))/dt \le -\gamma(H_1)V_1(x(t)).$$

Решением его будет

$$V(x(t)) \le V(x(t_0))\exp\{-\gamma(H_1)(t - t_0)\}.$$

Используя неравенства квадратичных форм (8), для первого промежутка времени решение первой подсистемы оценивается следующим соотношением:

$$\left|x(t)\right| \le \sqrt{\varphi(H_1)}\left|x(t_0)\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(H_1)(t - t_0)\right\},\ t_0 \le t \le t_1.$$

Рассмотрим второй временной промежуток $t_1 \le t \le t_2$. Повторяя произведенные выкладки, для решения второй подсистемы на втором временном промежутке получаем аналогичную зависимость

$$\left|x(t)\right| \le \sqrt{\varphi(H_2)}\left|x(t_1)\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(H_2)(t - t_1)\right\},\ t_1 \le t \le t_2.$$

Используя оценку (9) предыдущего временного промежутка, получаем

$$\left|x(t)\right| \le \sqrt{\varphi(H_1)\phi(H_2)}\left|x(t_0)\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma(H_1)(t_1 - t^0) + \gamma(H_2)(t - t_1)\right]\right\}.$$

Продолжая процесс для промежутка $t_{n-1} \le t \le t_n$, получаем

$$|x(t)| \le \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi(H_i)}\, |x(t_0)| \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(H_i)(t_i - t_{i-1}) - \frac{1}{2}\gamma(H_n)(t - t_n) \right\},$$

т.е. зависимость (7).

Соответственно, условия асимптотической устойчивости имеют следующий вид.

Следствие 2. Пусть каждая из подсистем системы (1) является асимптотически устойчивой. Тогда для асимптотической устойчивости системы с переключениями, состоящей из линейных подсистем с условием непрерывности, достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi(H_i)}\, |x(t_0)| \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(H_i)(t_i - t_{i-1}) + \gamma(H_n)(t - t_n) \right] \right\} = 0,$$

условия асимптотической устойчивости для каждой из подсистем можно не накладывать. Тогда достаточные условия асимптотической устойчивости системы с переключениями можно получить с использованием условий «сшивания оценок расхождения» и они будут иметь следующий вид.

Теорема 4. Для произвольного решения $x(t)$ системы с непрерывными переключениями при произвольных подсистемах имеет место неравенство

$$|x(t)| < |x(t_0)| \exp\left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{\max}(A_i + A_i^T)(t_i - t_{i-1}) + \lambda_{\max}(A_n + A_n^T)(t - t_n) \right] \right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Для получения утверждения используем функцию Ляпунова с экспоненциальным множителем вида $V(x,t) = e^{-\gamma t} x^T x$, где постоянный параметр экспоненты γ равен $\gamma = \lambda_{\max}(A + A^T)$. Поверхность уровня функции Ляпунова $V(x,t) = \alpha$, $\alpha > 0$, при каждом фиксированном $t > 0$ представляет собой сферу $|x|^2 = \alpha e^{\gamma t}$. При этом если $\gamma < 0$ и $t \to +\infty$, то сфера стягивается к началу координат, а если $\gamma > 0$ и $t \to +\infty$, то растягивается.

Вычислив полную производную функции Ляпунова $V(x,t) = e^{-\gamma t} x^T x$ в силу системы на первом участке, т.е. на промежутке $0 < t < t_1$, получим

$$\frac{d}{dt} V(x(t),t) = -\gamma e^{-\gamma t} x^T(t) x(t) + e^{-\gamma t} (A_1 x(t))^T x(t) + e^{-\gamma t} x^T(t)(A_1 x(t)),$$

или

$$\frac{d}{dt} V(x(t),t) = -e^{-\gamma t} x^T(t) \left[\gamma I - (A_1 + A_1^T) \right] x(t).$$

Если матрица $\gamma I - (A_1 + A_1^T)$ положительно-полуопределенная, т.е. при $\gamma \ge \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)$, то, используя неравенства квадратичных форм, получим

$$\frac{d}{dt} V(x(t),t) \le -e^{-\gamma t} x^T(t) \left[\gamma I - (A_1 + A_1^T) \right] x(t) \le -e^{-\gamma t} \left[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T) \right] |x(t)|^2.$$

Учитывая вид функции Ляпунова, перепишем это неравенство в виде

$$\frac{d}{dt} V(x(t),t) \le -\left[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T) \right] V(x(t),t).$$

ISSN 0572-2691

Проинтегрировав на промежутке $t_0 \le t < t_1$, получим

$$V(x(t), t) \le V(x(t_0), t_0) \exp\{-[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)](t - t_0)\}.$$

Отсюда имеем

$$e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t)|^2 \le |x(t_0)|^2 \exp\{-[\gamma - \lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)](t - t_0)\}.$$

Таким образом, на первом участке получили неравенство

$$|x(t)| \le |x(t_0)| \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t - t_0)\right\},$$

в конечный момент ($t = t_1$) имеем

$$|x(t_1)| \le |x(t_0)| \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t_1 - t_0)\right\}.$$

Рассмотрим второй промежуток времени ($t_1 \le t < t_2$). В качестве функции Ляпунова вновь возьмем квадратичную форму $V(x, t) = e^{\gamma t} x^T x$. Повторяя аналогичные преобразования на втором временном промежутке, получаем

$$|x(t)| \le |x(t_1)| \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A_2 + A_2^T)(t - t_1)\right\}.$$

в момент $t = t_2$ имеем

$$|x(t_2)| \le |x(t_1)| \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A_2 + A_2^T)(t_2 - t_1)\right\}.$$

Отсюда

$$|x(t_2)| \le |x(t_0)| \exp\left\{\frac{1}{2}[\lambda_{\max}(A_1 + A_1^T)(t_1 - t_0) + \lambda_{\max}(A_2 + A_2^T)(t_2 - t_1)]\right\}.$$

Продолжая процесс, для промежутка $t_{n-1} \le t < t_n$ окончательно получим

$$|x(t)| \le |x(t_0)| \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{\max}(A_i + A_i^T)(t_i - t_{i-1}) + \lambda_{\max}(A_n + A_n^T)(t - t_{n-1})\right]\right\},$$

т.е. утверждение (14) теоремы 4.

На основании теоремы 4 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы с непрерывными переключениями при произвольных подсистемах требуется, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \max_{n} \left\{\exp\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{\max}(A_i + A_i^T)(t_i - t_{i-1}) + \lambda_{\max}(A_n + A_n^T)(t - t_n)\right]\right\} = 0 .$$

Комбинированые системы. Условия устойчивости систем с переключениями, состоящие из линейных подсистем и основанные на представлении решений

Рассмотрим динамическую систему, описываемую совокупностью дифференциальных и разностных уравнений:

$$S(A, B) = \{S_i(A_i), S_j(B_j) : i \in I, j \in J\},$$

$$S_i(A_i):\ \dot{x}(t) = A_i x(t)\,,\ i \in I\,,\ t_{i-1} \le t < t_i\,, \qquad (8)$$

$$S_j(B_j):\ x(t+0) = B_j x(t-0)\,,\ i \in I\,,\ t = t_i.$$

В моменты $t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3, ...,$ система описывается линейными стационарными дифференциальными уравнениями (3), а в моменты $t = t_i$ происходят переключения, которые описываются линейными разностными уравнениями

$$x(t_i) = B_i x(t_i - 0)\,,\ i = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (9)$$

Под решением системы с переключениями (15) будем понимать непрерывно дифференцируемую на промежутках $t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, 3, ...$ функцию, которая удовлетворяет линейным дифференциальным подсистемам, а при $i = 0, 1, 2, 3, ...$ скачкообразно изменяется согласно зависимостям (16).

Получим условия устойчивости нулевого положения равновесия системы с переключениями, основанные на представлении решений систем дифференциальных и разностных уравнений.

Теорема 5. Чтобы нулевое решение системы с переключениями (15) было асимптотически устойчиво, равномерно по переключениям, необходимо и достаточно, чтобы для произвольных моментов переключения $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$, $k = 1, 2, 3, ...,$ выполнялось неравенство (7).

Если рассматривать промежуток времени $t_n < t \le t_{n+1}$, то решение имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} \min \left\{ \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})}},\ \frac{1}{e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod\limits_{i=0}^{k-i} B_{k-i} e^{A(t_{k-i} - t_{k-i-1})}} \right\} = 0.$$

Для того чтобы нулевое решение системы с переключениями (15) было асимптотически устойчиво, равномерно по переключениям, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (14) и

$$\lim_{t\to+\infty} \prod_{i=0}^{n-1} B_k e^{A_n(t_{n-i} - t_{k-i-1})} = 0,\quad \lim_{t\to+\infty} e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod_{i=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})} = 0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем с использованием решения системы с переключениями, — методом шагов.

1. Рассмотрим первый шаг, состоящий из движения по непрерывной траектории системы дифференциальных уравнений

$$x'(t) = A_1 x(t),\quad t_0 \le t < t_1 - 0.$$

и переключения

$$x(t_1) = B_1 x(t_1 - 0).$$

Движение по закону дифференциального уравнения на первом промежутке описывается решением вида

$$x(t) = e^{A_1(t-t_0)} x(0)\,,\ t_0 \le t < t_1 - 0,$$

в момент $t = t_1 - 0$ оно имеет вид $x(t_1 - 0) = e^{A_1(t_1 - t_0)} x(t_0)$.

Далее идет переключение и в момент $t = t_1$ оно равно $x(t_1) = B_1 e^{A_1(t_1 - t_0)} x(t_0)$.

2. Рассмотрим второй шаг, также состоящий из движения по непрерывной траектории системы

ISSN 0572-2691

$$x'(t) = A_2 x(t)\,,\ t_1 \le t < t_2.$$

и переключения

$$x(t_2) = B_2 x(t_2 - 0).$$

Движение описывается как $x(t) = e^{A_2(t-t_1)}x(t_1+0),\ \ t_1 < t \le t_2$, в момент $t = t_2$ имеет вид

$$x(t_2) = e^{A_2(t_2 - t_1)}x(t_1+0) = e^{A_2(t_2-t_1)}B_1 e^{A_1(t_1-t_0)}x(t_0).$$

Далее идет переключение и в момент $t = t_2 + 0$ имеет вид

$$x(t_2+0) = B_2 e^{A_2(t_2-t_1)}B_1 e^{A_1(t_1-t_0)}x(t_0).$$

Продолжая процесс, получаем, что в момент $t = t_{n+1} + 0$ решение системы с переключениями имеет вид

$$x(t_{n+1}+0) = \prod_{i=0}^{n} B_i e^{A_i(t_{i+1}-t_i)}x(t_0).$$

Если рассматривать промежуток времени $t_n < t \le t_{n+1}$, то решение имеет вид

$$x(t) = e^{A_{n+1}(t-t_n)}\prod_{i=0}^{n-1} B_i e^{A_i(t_{i+1}-t_i)}x(t_0).$$

Таким образом, чтобы выполнялось условие устойчивости, достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$, произвольных моментов переключения $t_0 < t_1 < < t_2 < ... < t_k < ...$ и $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, ...,$ выполнялись неравенства

$$\delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\left|\prod_{i=0}^{n} B_i e^{A_i(t_{i+1}-t_i)}\right|},\quad \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{\left|e^{A_{n+1}(t-t_n)}\prod_{i=0}^{n-1} B_i e^{A_i(t_{i+1}-t_i)}\right|}.$$

Отсюда следует утверждение про устойчивость по Ляпунову.

Добавив стремление нормы решения к нулю, получим условия асимптотической устойчивости.

Замечание Изложенные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) являются, по существу, вычислением величины возмущения траектории.

Д.Я. Хусаінов, О.С. Бичков, А.С. Сіренко, Ж.І. Буранов

СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИЗНАЧЕНИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ, ЩО СКЛАДАЮТЬСЯ ІЗ ЛІНІЙНИХ ПІДСИСТЕМ БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ

Робота присвячена подальшому вивченню стійкості динамічних систем з перемиканнями. Всіляких класів динамічних систем, що описуються рівняннями з перемиканнями, досить багато. Автори поділяють системи з перемиканнями на два класи: системи з визначеними і невизначеними перемиканнями. У даній роботі розглянуто системи з визначеними перемиканнями, а саме системи, що складаються з диференціальних та різницевих підсистем за умови спадання функції Ляпунова. Одним з найбільш універсальних методів дослідження стійкості нульового положення рівноваги є другий метод Ляпунова, або метод функцій Ляпунова. При його використанні вибирається додатно визначена функція, розв'язки системи задовольняють певним властивостям. Якщо розглядається система диференціальних рівнянь, то накладається умова від'ємної визначеності повної похідної в силу системи. Якщо розглядається різницева система рівнянь, то розглядається перша різниця в силу системи. Для більш загальних динамічних систем (зокрема, для систем з перемиканнями) накладається умова незростання (спадання) функції Ляпунова уздовж розв'язків системи. Оскільки розглядається система, що складається з диференціальних та різницевих підсистем, то використовується умова незростання (спадання функції Ляпунова). Для конкретного виду підсистем (лінійних) умови незростання (зменшення) конкретизуються. Основна ідея використання другого методу Ляпунова для систем такого виду полягає в побудові послідовності функцій Ляпунова, в яких поверхні рівня подальшої функції Ляпунова в точках перемикання або «зшиваються», або «містять поверхню рівня попередньої функції».

Ключові слова: функція Ляпунова, рівняння з перемиканнями, диференціальні підсистеми, різницеві підсистеми, стійкість, запізнювання.

D.Ya. Khusainov, A.S. Bychkov, A.S. Sirenko, Zh.I. Buranov

ON THE STABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH CERTAIN SWITCHINGS, WHICH CONSISTS OF LINEAR SUBSYSTEMS WITHOUT DELAY

This work is devoted to the further development of the study of the stability of dynamic systems with switchings. There are many different classes of dynamical systems described by switched equations. The authors of the work divide systems with switches into two classes. Namely, on systems with definite and indefinite switchings. In this paper, the system with certain switching, namely a system composed of differential and difference sub-systems with the condition of decreasing Lyapunov function. One of the most versatile methods of studying the stability of the zero equilibrium state is the second Lyapunov method, or the method of Lyapunov functions. When using it, a positive definite function is selected that satisfies certain properties on the solutions of the system. If a system of differential equations is considered, then the condition of non-positiveness (negative definiteness) of the total derivative due to the system is imposed. If a difference system of equations is considered, then the first difference is considered by virtue of the system. For more general dynamical systems (in particular, for systems with switchings), the condition is imposed that the Lyapunov function does not increase (decrease) along the solutions of the system. Since the paper considers a system consisting of differential and difference subsystems, the condition of non-increase (decrease of the Lyapunov function) is used.For a specific type of subsystems (linear), the conditions for not increasing (decreasing) are specified. The basic idea of using the second Lyapunov method for systems of this type is to construct a sequence of Lyapunov functions, in which the level surfaces of the next Lyapunov function at the switching points are either «stitched» or «contain the level surface of the previous function».

Keywords: Lyapunov function, switching equations, differential subsystems, difference subsystems, stability, delay.

1. Хусаинов Д.Я., Бычков А.С., Сиренко А.С. Устойчивость нулевого решения системы с переключениями, состоящей из линейных подсистем. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2020. **133**, вип. 1. С. 89–96.

2. Бычков А.С., Меркурьев М.Г. Устойчивость непрерывных гибридных автоматов. *Кибернетика и системный анализ*, 2007. № 2. С. 123–128.
3. Бычков А.С. Достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого стационарного состояния гибридного автомата. *Математические машины и системы*, 2007. № 3. С. 168–175.
4. Бичков О.С. Про достатні умови стійкості гібридних автоматів з нечітким перемиканням. *Доповіді НАН України*, 2011. № 4. С. 7–14.
5. Глушков В.М. Программные средства моделирования непрерывно-дискртетных систем. Киев : Наук. думка, 1975. 152 с.
6. Емельянов С.В. и др. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
7. Кузьмич О.І. Оцінки стійкості динаміки гібридних систем з кінечним числом перемикань. *Вісник Київського національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2005. № 2. С. 260–267.
8. Кузьмич О.І., Хусаінов Д.Я. Оцінка динаміки гібридних систем, що описуються дискретними рівняннями. *Вісник Київського національного університету. Кібернетика*. 2005. № 6. С. 45–48.
9. Мартынюк А.А., Слынько В.И. Об устойчивости линейных гибридных механических систем с распределенным звеном. *Український математичний журнал*. 2008. **60**, № 2. С. 204–216.
10. Слынько В.И. Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием. *Прикладная механіка*. 2005. **41** (51), № 6. С. 130–138.
11. Жук К.Д. Каххаров Т.Е. Исследование устойчивости систем логико-динамического класса в задачах системного проектирования. Ташкент : ФАН, 1982. 156 с.
12. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.
13. Сиренко А.С., Хусаинов Д.Я. О существовании единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика.* 2013. № 1(13). С. 46–51.
14. Хусаинов Д.Я., Сиренко А.С. Об устойчивости линейных систем с переключениями. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика*. 2014. № 1(14) С. 54–60.
15. Хусаінов Д.Я., Кузьмич О.І. Оцінки стійкості логіко-динамічних систем з часовим перемиканням. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2005. № 1. С. 230–237.
16. Branicky M.S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on automatic control*. 1998. **43**, N 4. P. 32–45.
17. Exponential stability of perturbed linear discrete systems. J. Diblık, D.Ya. Khusainov, J. Bastinec, A.S. Sirenko. *Advances in Difference Equations*. 2016. N 2. P. 1–20.
18. Henzinger T.A. The theory of hybrid automata. *Proceedings LICS'96*. 1996. P. 278–292.

Получено 19.01.2021