

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

УДК 519.6

М.Р. Петрик, А.А. Чикрий, И.Я. Мудрик

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНЫХ АНОРМАЛЬНЫХ НЕВРОЛОГИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В МНОГОКОМ- ПОНЕНТНЫХ НЕЙРОБИОСИСТЕМАХ С КОГНИТИВНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ*

Ключевые слова: компьютерное моделирование, системы с обратной связью, высокопроизводительные вычисления, тремор, аномальные неврологические движения, многопараметрическая идентификация.

Введение

Использование новых методов моделирования обеспечивает системный подход к проектированию систем цифровой диагностики состояния здоровья, особенно людей, пораженных критическими неврологическими заболеваниями, к которым Европейский Союз отнес патологические неврологические движения — эссенциальный и аномальный тремор (ЭТ, АНТ). Их быстрое прогрессирование приводит к болезням Альцгеймера, Паркинсона и паралича нервной системы в целом [1]. Тремор, как серия нежелательных колебательных движений, касающихся органа или части тела — пальцы рук, веки, глазные яблоки, органы речи (далее Т-объекты), возникает в результате непроизвольного сокращения скелетных мышц, ответственных за их перемещение. Повышение амплитуды, изменение частоты и формы колебаний относительно нормы служат признаками нарушения механизмов регуляции движений человека. Анализ этих параметров важен для понимания роли дисфункции отдельных зон нейроузлов коры головного мозга (КГМ) в сложных процессах когнитивного управления движениями и выявления двигательных нарушений. Проблема сложности идентификации ЭТ и особенно АНТ, как аномальных неврологических движений (АНД), заключается в несовершенстве методов диагностики, отсутствии средств идентификации feedback-воздействий нейронных узлов КГМ на их динамику и др. [2].

Эффективный метод исследования тремора в настоящее время — это спиральный анализ (СА), что объективно характеризует кинематические и физиологические особенности нарисованных от руки спиралей (РС) с использованием рассчитанных спиральных индексов, которые коррелируются с формой спирали. Спиральное моделирование (СМ) используется для визуального оценивания интенсивности тремора.

* Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда исследований Украины. Грант № 2020.02/0121.

© М.Р. ПЕТРИК, А.А. ЧИКРИЙ, И.Я. МУДРИК, 2021

Большинство работ в этой области посвящено разработкам моделей и исследованию более простых видов тремора — ЭТ, без учета обратных когнитивных влияний нейроузлов КГМ. В [1] применен подход обработки сканированных РС алгоритмом вычисления амплитуд дрожаний. Представлены результаты СА (по стандарту Бейна–Финдли) с учетом рейтинговых шкал для оценки терапевтической эффективности. В [2] разработана стратегия количественного определения тяжести ЭТ методом СА на цифровом планшете. Выполнена проверка СА методом визуального спирального рейтинга (ВСП) по способности СА проявлять терапевтические эффекты. Количественную степень выраженности ЭТ оценивали по пиковой амплитуде дрожаний после обработки траектории движения пера классическим методом Фурье. В [3] на основе СМ, используя показатели вариации ширины РС (SWVI) от петли до петли, выявлены дополнительные признаки дисфункции мозжечка. В [4, 5] исследовались разновидности ЭТ — дистония и атаксия, установлены критерии их дифференциации на основе идентификации осей ориентации дрожания. В [5] методом СА изучалась атаксия третьего типа (СА3) с сочетанием мозжечковых, нейропатических и других симптомов при неполном объеме данных об их происхождении. В [6] разработан алгоритм распознавания РС по данным цифрового пера, состоящий из процедур обработки сигналов ускорения, генерации, выбора признаков ЭТ на основе вероятностной нейронной сети. В [7] на основе графического планшета Wacom разработан метод цифрового анализа РС степени тяжести ЭТ, скорости, амплитуды, частоты дрожаний, изменчивости давления и др. В [8] предложены новые методы СА ЭТ на цифровом планшете, развивающие представление о колебаниях амплитуды и частоты дрожаний, уточняющие оценки степени тяжести ЭТ по сравнению с ВСП. Реализованы методы статического и динамического распознавания и эмпирического разложения режима (с участием разработчика программного обеспечения на планшете, соавтора этой статьи И. Мудрика как стипендиата французского правительства).

Из проведенного анализа видно, что в настоящее время комплексные исследования нейробиосистем с обратной связью, включая более сложные виды тремора (АНТ) и когнитивным влиянием нейронных узлов КГМ, отсутствуют. Используемые для ЭТ методы цифровой обработки на основе классического метода Фурье не обеспечивают анализ АНТ-движений для Т-объектов. Поэтому из-за попадания в шуму теряется от 60–80 % важной информации, что определяет низкий уровень показателей и качества анализа в целом.

В настоящей статье предложена гибридная модель нейробиосистемы, описывающая состояние и поведение 3D-элементов траекторий Т-объектов аномальных неврологических движений (АНД) с учетом матрицы когнитивных воздействий групп нейроузлов КГМ. Методами гибридных интегральных преобразований Фурье построено высокоскоростное аналитическое векторное решение модели, определяющее элементы траекторий на каждом АНД-сегменте. На основе этого предложены высокопроизводительные алгоритмы идентификации параметров исследуемых feedback-систем путем получения явных выражений градиентов функционала-невязки, позволяющие распараллеливания вычислений для многоядерных компьютеров.

Гибридная математическая модель анализа АНД Т-объекта на основе feedback-связей и влияний нейронных узлов КГМ

Гибридная модель анализа аномальных состояний Т-объектов построена на основе теории распространения волнового сигнала и определяет посегментное описание 3D-элементов траекторий АНД исследуемого Т-объекта (колебательного движения конечности руки пациента) с учетом матрицы когнитивных воздействий групп нейроузлов КГМ на сегменты движения [9]. В основу реализации поло-

жен способ непрерывного определения позиции конечности руки пациента, воспроизводящий с помощью электронного пера рисунок шаблона в виде спирали Архимеда на экране интерактивного планшета [10,11].

Пространственное 3D-отклонение траектории АНД-движения пера от шаблона имеет сложную форму и является цифровой информацией для определения состояния заболевания пациента [8, 12]. На рис. 1 показана схематизация связей когнитивных feedback-воздействий EEG-сигналов нейроузлов электроэнцефалографий на отдельные элементы АНД-трассы Т-объекта. Для декомпозиции сложных АНД-траекторий на более простые элементы количество разбиений может выбираться произвольным в зависимости от сложности изображения. В качестве когнитивных feedback-воздействий системы используются наборы показателей сигналов электроэнцефалограмм (EEG), которые синхронно с движением Т-объекта поступают от определенного множества нейроузлов КГМ, осуществляющих управление АНД-движением [13]. EEG-сигналы в целом определяют динамику АНД для каждого j -го сегмента трассы, $j = \overline{1, n_1 + 1}$, где n_1 — количество точек разбиения АНД-трассы (см. рис.1). Разбивка может задаваться автоматически произвольным образом, с любым конечным количеством сегментов, длины которых также могут быть различными в зависимости от уровня детализации участков движения, выбора базисных функций и построения на их основе приемлемых зависимостей аппроксимации этих функций.

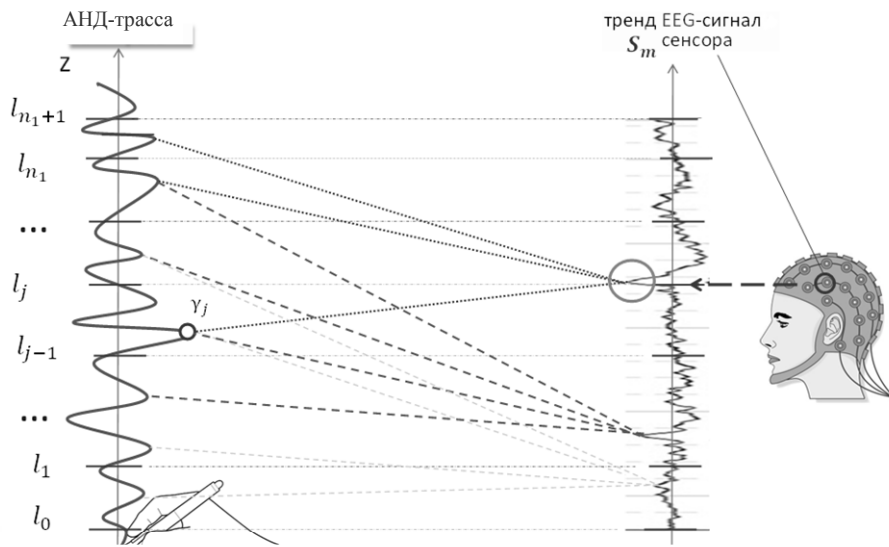


Рис. 1

На основе изложенных физических предположений неоднородную начально-краевую задачу определения параметров АНД Т-объекта опишем системой уравнений и начальными условиями в матричной форме [9, 14]:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_1(t, z) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_2(t, z) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_{n_1+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_{n_1+1}(t, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(t, z) \\ S_2(t, z) \\ \dots \\ S_{n_1+1}(t, z) \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c} u_1(t, z) \\ u_2(t, z) \\ \dots \\ u_{n_1+1}(t, z) \end{array} \right]_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{array}{c} u_1(t, z) \\ u_2(t, z) \\ \dots \\ u_{n_1+1}(t, z) \end{array} \right]_{t=0} = 0, \quad (1)$$

однородными краевыми условиями и системой интерфейсных условий:

$$\frac{\partial}{\partial z} u_1(t, z)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_n(t, z)_{z=l} = 0, \quad (2)$$

$$\left[u_j(t, z) - u_j(t, z) \right]_{z=l_j} = 0, \quad \left(b_j^2 \frac{\partial}{\partial z} u_k(t, z) - b_{j+1}^2 \frac{\partial}{\partial z} u_{j+1}(t, z) \right)_{z=l_j} = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (3)$$

в многокомпонентной области $D_{n_1}^+ = \left\{ (t, z) : t \in (0; T), z \in I_{n_1} = \bigcup_{j=1}^{n_1+1} (l_{j-1}, l_j); l_0 = 0, l_{n_1+1} \equiv l < \infty \right\}$.

Здесь (1) — система волновых уравнений с начальными условиями, описывающими АНД-траектории тремора на каждом j -м сегменте траектории $j = \overline{1, n_1+1}$ в зависимости от результирующего действия совокупности сигналов $S_j^*(t, z)$, поступающих от EEG-сенсоров для определенного множества нейроузлов КГМ, осуществляющих управление поведением исследуемого Т-объекта, $b_j, j = \overline{1, n_1+1}$, — компоненты вектора фазовой скорости распространения волн АНД, являющейся амплитудными характеристиками волнового тремор-движения; $S_j^*(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_{ji} S_i(\tau, \xi)$, $[\alpha_{ji}]$, $j = \overline{1, n_1}, i = \overline{1, n_2}$, — адаптивная матрица, определяющая связи и feedback-влияния конкретных нейроузлов КГМ на отдельные малые сегменты АНД-трассы. Элемент матрицы α_{ji} — весовой коэффициент (от 0 до 1), что определяет интегральное влияние i -го нейроузла S_i на j -й сегмент траектории (определяются методами машинного обучения на основе добычи данных (data mining) S_i на j -й сегмент движения (определяются методами машинного обучения на базе поиска данных (data mining) [15]). Условия (2), (3) обеспечивают непрерывность и целостность решения задачи для всей многокомпонентной области ее определения.

Построение аналитического решения краевой задачи АНД. Для построения аналитических решений неоднородной задачи (1)–(3) применим гибридное интегральное преобразование Фурье (ГИПФ), определенное в [14]. Основу преобразования составляют гибридные интегральные операторы в матричной форме:

- прямого действия

$$F_{n_1} [\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \beta_m) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \beta_m) \sigma_2 dz \dots \int_{l_{n_1-1}}^{l_{n_1}} \dots V_{n_1}(z, \beta_m) \sigma_{n_1} dz \times \int_{l_{n_1}}^{l_{n_1+1}} \dots V_{n_1+1}(z, \beta_m) \sigma_{n_1+1} dz \right], \quad (4)$$

• обратного действия

$$F_{n_1}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_1(z, \beta_m) (\|V(z, \beta_m)\|^2)^{-1} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_2(z, \beta_m) (\|V(z, \beta_m)\|^2)^{-1} \\ \dots \\ \sum_{m=1}^{\infty} \dots V_{n_1+1}(z, \beta_m) (\|V(z, \beta_m)\|^2)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $[V_k(z, \beta_m)]_{k=1, \overline{n_1+1}}$ — вектор гибридной спектральной функции ГИПФ:

$$\begin{bmatrix} V_1(z, \beta_m) \\ \dots \\ V_k(z, \beta_m) \\ \dots \\ V_{n_1+1}(z, \beta_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{n_1} \xi_{i+1} \frac{\beta_m}{b_{i+1}} \left(\omega_0^2(\beta_m) \mathfrak{G}_1^{11} \left(\frac{\beta_m}{b_1} z \right) - \omega_0^1(\beta_m) \mathfrak{G}_1^{21} \left(\frac{\beta_m}{b_1} z \right) \right) \\ \dots \\ \prod_{i=k}^{n_1} \xi_{i+1} \frac{\beta_m}{b_{i+1}} \left(\omega_{k-1}^2(\beta_m) \mathfrak{G}_k^{11} \left(\frac{\beta_m}{b_k} z \right) - \omega_{k-1}^1(\beta_m) \mathfrak{G}_k^{21} \left(\frac{\beta_m}{b_k} z \right), k=\overline{2, n_1} \right) \\ \dots \\ \omega_{n_1}^2(\beta_m) \mathfrak{G}_{n_1+1}^{11} \left(\frac{\beta_m}{b_{n_1+1}} z \right) - \omega_{n_1}^1(\beta_m) \mathfrak{G}_{n_1+1}^{21} \left(\frac{\beta_m}{b_{n_1+1}} z \right) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$\{\beta_m\}_{m=0}^{\infty}$ — множество спектральных значений ГИПФ, являющиеся корнями трансцендентного уравнения

$$\omega_{n_1}^2(\beta) \mathfrak{G}_{n_1+1}^{11} \left(\frac{\beta}{b_{n_1+1}} l_{n_1+1} \right) - \omega_{n_1}^1(\beta) \mathfrak{G}_{n_1+1}^{21} \left(\frac{\beta}{b_{n_1+1}} l_{n_1+1} \right) = 0. \quad (7)$$

В [14] установлено, что множество $\{\beta_m\}_{m=0}^{\infty}$ спектральных значений — монотонно-возрастающая последовательность и сходится к $+\infty$.

На основе этого предложена рекуррентная методика вычисления компонентов гибридной спектральной функции АНД на основе выбора системы ортогональных базовых функций, составляет основу предложенного ГИПФ и обеспечивает получение интегрального векторного решения модели:

$$\begin{aligned} \omega_k^j(\beta) &= \omega_{k-1}^2(\beta) \Psi_{1j}^k \left(\frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) - \omega_{k-1}^1(\beta) \Psi_{2j}^k \left(\frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right), \\ \Psi_{ij}^k \left(\frac{\beta}{b_k} l_k, \frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) &= \mathfrak{G}_k^{i1} \left(\frac{\beta}{b_k} l_k \right) \mathfrak{G}_k^{j2} \left(\frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right) - \mathfrak{G}_k^{i2} \left(\frac{\beta}{b_k} l_k \right) \mathfrak{G}_k^{j1} \left(\frac{\beta}{b_{k+1}} l_k \right), \\ & i, j = \overline{1, 2}, k = \overline{1, n_1}, \\ \mathfrak{G}_k^{11} \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right) &= \cos \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right), \quad \mathfrak{G}_k^{21} \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right) = \sin \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right), \\ \mathfrak{G}_k^{12} \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right) &= -\xi_s \frac{\beta}{b_s} \sin \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right), \quad \mathfrak{G}_k^{22} \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right) = \xi_s \frac{\beta}{b_s} \cos \left(\frac{\beta}{b_s} l_k \right), \quad s \in \{k, k+1\}, \end{aligned}$$

$$\omega_0^1(\beta) = -\mathfrak{G}_0^{11}\left(\frac{\beta}{b_1}l_0\right), \quad \omega_0^2(\beta) = -\mathfrak{G}_0^{21}\left(\frac{\beta}{b_1}l_0\right), \quad \sigma_j = \frac{1}{b_j^2}, \quad j = \overline{1, n_1}.$$

Применив к задаче (1)–(3) интегральный оператор ГИПФ прямого действия F_{n_1} (4), где $F_{n_1}[L_{n_1}[u(z)]] = -\beta_m^2 u_m$, $L_{n_1}[\dots] = \sum_{j=1}^{n_1+1} b_j^2 \theta(z-l_{j-1})\theta(l_j-z) \frac{d^2}{dz^2}$ — гибридный дифференциальный оператор Фурье, θ — функция Хевисайда, получим решение соответствующей результирующей задачи Коши

$$u_m(t) = \int_0^t \frac{\sin \beta_m(t-\tau)}{\beta_m} S_m^*(\tau) d\tau, \quad (8)$$

применив к нему обратный интегральный оператор ГИПФ $F_{n_1}^{-1}$ (6). После ряда преобразований получим единственное решение неоднородной краевой задачи АНД (1)–(4):

$$u_j(t, z) = \sum_{k=1}^{n_1+1} \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{H}_{jk}(t-\tau, z, \xi) S_k^*(\tau, \xi) \sigma_k d\xi d\tau, \quad j = \overline{1, n_1+1}. \quad (9)$$

Здесь матрица воздействия — отклик системы АНД на влияние k -го сегмента, результирующей действия сигналов S_k^* определенного множества нейроузлов КГМ на j -м сегменте трассы АНД:

$$\mathcal{H}_{jk}(t, z, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_m t}{\beta_m} \frac{V_j(z, \beta_m) V_k(\xi, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}; \quad j, k = \overline{1, n_1+1}. \quad (10)$$

Прямая краевая задача идентификации. С учетом необходимости представления решения в форме реализации процедуры функциональной идентификации амплитудных компонентов фазовой скорости распространения волны АНД b_k^2 , $k = \overline{1, n_1+1}$, как функции времени и условий, если известны следы решения для каждого достаточно тонкого k -го сегмента, $k = \overline{1, n_1+1}$, получим краевую как систему однородных начально-краевых задач для последовательных тонких сегментов АНД [9, 14]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k(t, z) = b_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k + S_k^*(t, z) \quad (11)$$

с начальными условиями

$$u_k(t, z)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1, n_1+1} \quad (12)$$

Запишем краевые условия на каждом из тонких сегментов АНД по z :

$$u_{k-1}(t, z)|_{z=l_{k-1}} = U_{l_{k-1}}, \quad u_k(t, z)|_{z=l_k} = U_{l_k}, \quad k = \overline{1, n_1+1}. \quad (13)$$

Выбор функционала-невязки. Считаем, что компоненты фазовой скорости распространения волны АНД b , $k = \overline{1, n_1+1}$, краевой задачи (11)–(13) — неизвестные функции времени. При известных значениях положения пера $u_k(t, z)$ в точках наблюдения на сегментах АНД $\gamma_k \subset \Omega_k$, $k = \overline{1, n_1+1}$,

$$u_k(t, z)|_{\gamma_k} = U_{l_k}(t, z)|_{\gamma_k}. \quad (14)$$

Начально-краевая задача (11)–(14) может рассматриваться для каждой точки z для каждого тонкого k_1 -го сегмента трассы АНД и заключаться в нахождении функций $b_k \in D$, где $D = \{v(t, z) : v|_{\Omega_{k_1 T}} \in C(\Omega_{k_1 T}), v > 0, k = \overline{1, n_1 + 1}\}$.

Функционал-невязка отклонения решения от его следов на $\gamma_{k_1} \in \Omega_{k_1}$, согласно [9, 16],

$$J_k(b_{kk}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\|u_k(t, z, b_k) - U_k^*\|^2 \right) dt. \quad (15)$$

Построение и математическое обоснование решения задачи осуществляется с помощью конечного интегрального преобразования Фурье [14]. Применив к задаче (11)–(14) интегральные операторы:

$$\begin{aligned} F[u_k(t, z)] &= \int_{l_{k-1}}^{l_k} u_k(t, z) V_m(\beta_m, z) dz \equiv U_{km}(t), \\ F^{-1}[U_{km}(t)] &= \sum_{m=0}^{\infty} U_{km}(t) \frac{V_m(\beta_m, z)}{\|V_m(\beta_m, z)\|^2} \equiv u_k(t, z), \\ F\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k(t, z)\right] &= -\beta_m^2 U_{km}(t) + \beta_m U_{l_{k-1}} - \beta_m (-1)^m U_{l_k}, \end{aligned} \quad (16)$$

получим задачу Коши:

$$\frac{d^2}{dt^2} U_{km}(t, z) = -b_k^2 \beta_m^2 U_{km}(t) + b_k^2 \beta_m (U_{l_{k-1}} - (-1)^m U_{l_k}) + S_{km}^*(t), \quad (17)$$

$$u_{km}(t, z)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_{km}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1, n_1 + 1}. \quad (18)$$

Здесь $V_m(\beta_m, z) = \sin \beta_m(z - l_{k-1})$ — спектральная функция, $\beta_m = \frac{m\pi}{\Delta h}$ — множе-

ство спектральных значений, $\|V_m\|^2 = \int_{l_{k-1}}^{l_k} [V_m(\beta_m, z)]^2 dz = \frac{\Delta l}{2}$ — квадрат нормы.

Единственное решение задачи Коши (17), (18) имеет вид

$$U_{km}(t) = \int_0^t \frac{\sin b_k \beta_m(t - \tau)}{b_k \beta_m} \left[S_{km}^*(\tau) + b_k^2 \beta_m (U_{l_{k-1}} - (-1)^m U_{l_k}) \right] d\tau. \quad (19)$$

Перейдя к оригиналам, получим единственное решение исходной краевой задачи (11)–(13) в классической форме [9]:

$$\begin{aligned} u_k(t, z) &= \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{H}_k^1(t - \tau, z, \xi) S_k^*(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t (\mathcal{H}_k^{21}(t - \tau, z, l_{k-1}) U_{l_{k-1}} - \mathcal{H}_k^{22}(t - \tau, z, l_k) U_{l_k}) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь компоненты векторов влияния имеют вид

$$\mathcal{H}_k^1(t - \tau, z, \xi) = \frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin b_k \beta_m(t - \tau)}{b_k \beta_m} \sin \beta_m(\xi - l_{k-1}) \sin \beta_m(z - l_{k-1}),$$

$$\mathcal{H}_k^{21}(t, z, l_{k-1}) = \frac{2b_k}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin b_k \beta_m t \sin \beta_m (z - l_{k-1}),$$

$$\mathcal{H}_k^{22}(t, z, l_k) = \frac{2b_k}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(b_k \beta_m t) (-1)^m \sin \beta_m (z - l_{k-1}).$$

Решение (20) задачи (11)–(13) после ряда преобразований конвертируем в форму, удобную и эффективную для числовых итерационных расчетов и для использования в процедурах идентификации параметров

$$u_k(t, z) = \frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(b_k \beta_m t)}{\beta_m} \sin \beta_m (z - l_{k-1}) \times \left[S_k^* \frac{1}{(b_k \beta_m)^2} ((-1)^m - 1) + U_{l_{k-1}} \left(1 - (-1)^m \frac{U_{l_k}}{U_{l_{k-1}}} \right) \right]. \quad (21)$$

Начально-краевые задачи, сопровождающие алгоритмы идентификации параметров в АНД

С учетом приращений параметров идентификации АНД $b_k^{2n} + \Delta b_k^n$ на основании задачи (11)–(14) получим соответствующие приращения для компонентов движения на сегментах траектории $u_k + v_k$. Пренебрегая членами второго порядка малости для приращений, получим начально-краевую задачу [9]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_k(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(b_k^n \frac{\partial}{\partial z} v_k \right) + \Delta b_k^n \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k, \quad z \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, N_1 + 1}, \quad (22)$$

с начальными условиями

$$v_k(t, z)_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_k(t, z)_{t=0} = 0, \quad z \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, N_1 + 1}, \quad (23)$$

краевыми и интерфейсными условиями между сегментами АНД по z :

$$\frac{\partial}{\partial z} v_1(t, z)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} v_{N_1+1}(t, z)_{z=l} = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$\left[v_k(t, z) - v_{k+1}(t, z) \right]_{z=l_k} = 0, \quad (24)$$

$$\left(b_k^{2n} \frac{\partial}{\partial z} v_k(t, z) + \Delta b_k^n \frac{\partial}{\partial z} u_k(t, z) - b_{k+1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z} v_{k+1}(t, z) - \Delta b_{k+1}^n \frac{\partial}{\partial z} u_{k+1}(t, z) \right) \Big|_{z=l_k} = 0,$$

$$k = \overline{1, n_1},$$

$$\left((b_k^{2n} + \Delta b_k^n) \frac{\partial}{\partial z} (u_k(t, z) + v_k(t, z)) - (b_{k+1}^{2n} + \Delta b_{k+1}^n) \frac{\partial}{\partial z} (u_{k+1}(t, z) + v_{k+1}(t, z)) \right) \Big|_{z=l_k} - \left(b_k^{2n} \frac{\partial}{\partial z} u_k(t, z) - b_{k+1}^{2n} \frac{\partial}{\partial z} u_{k+1}(t, z) \right) \Big|_{z=l_k} = 0, \quad k = \overline{1, n_1}.$$

Построение решения сопряженной краевой задачи АНД

С учетом изложенного выше согласно исходной прямой начально-краевой задаче (11)–(14) для каждого приближения $\tilde{b}_k^n = b_k^{2n}$ решения $\tilde{b}_k = b_k^2$ вводим сопряженную временно-краевую задачу [9]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_k(t, z) + b_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_k(t, z) = (u_{k_k}^n - U_k^*) \Big|_{z=\gamma_k} \delta(z - \gamma_k), \quad k = \overline{1, n_1 + 1}, \quad (25)$$

с условием при $t = T$

$$\phi_k(t, z) \Big|_{t=T} = 0 \quad (26)$$

и краевыми и интерфейсными условиями между тонкими сегментами АНД по координате z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi_1(t, z) \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n_1+1}(t, z) \Big|_{z=l} = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$[\phi_k(t, z) - \phi_{k+1}(t, z)] \Big|_{z=l_m} = 0,$$

$$\left(b_k^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_k(t, z) - b_{k+1}^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_{k+1}(t, z) \right) \Big|_{z=l_k} = 0, \quad k = \overline{1, n_1}. \quad (27)$$

Для построения аналитического решения сопряженной неоднородной временно-краевой задачи параметрической идентификации (25)–(27) применялся подход, описанный выше для прямой задачи с использованием введенного интегрального преобразования (16) [9, 14]. В результате получим

$$\phi_{1_k}(t, z) = \int_t^T \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \bar{\mathcal{H}}_{k, k_1}(t - \tau, z, \xi) (u_{k_1}^n - U_{k_1}^*)(\tau) \Big|_{z=\gamma_{k_1}} d\xi d\tau, \quad (28)$$

где $\bar{\mathcal{H}}_{jk}(t, z, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \beta_m t V_j(z, \beta_m) V_k(\xi, \beta_m)}{\beta_m \|V(z, \beta_m)\|_1^2}$, $j, k = \overline{1, n_1 + 1}$, — сопряженная матрица влияния.

С учетом изложенного выше согласно исходной краевой задаче функциональной идентификации (25)–(27) и при условии, что известны следы решения для каждого достаточно тонкого k -го сегмента траектории $k = \overline{1, n_1 + 1}$, можно перереформатировать сопряженную краевую задачу (25)–(27) в систему сопряженных однородных временно-краевых задач функциональной идентификации для последовательных тонких сегментов АНД:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_k(t, z) + b_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_k(t, z) = (u_{k_k}^n - U_k^*) \Big|_{z=\gamma_k} \delta(z - \gamma_k), \quad k = \overline{1, n_1 + 1}, \quad (29)$$

с условиями при $t = T$

$$\phi_k(t, z) \Big|_{t=T} = 0 \quad (30)$$

и краевыми условиями первого рода для каждого приближения решения b_k^n

$$\phi_k(t, z) \Big|_{z=l_{k-1}} = 0; \quad \phi_k(t, z) \Big|_{z=l_k} = 0. \quad (31)$$

Применив к задаче (29)–(31) конечное интегральное преобразование Фурье [14], получим задачу Коши

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_{km}(t, z) - b_k^2 \beta_m^2 \phi_{km}(t) = \mathcal{F}_{km}^s(t) \quad (32)$$

с начальными условиями

$$\phi_k(t, z)|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad k = \overline{1, n_1 + 1}. \quad (33)$$

Находим единственное решение задачи Коши (22), (23):

$$\phi_{km}(t) = \int_{\tau}^T \frac{\text{sh } b_k \beta_m (t - \tau)}{b_k \beta_m} (u_{k_k}^n - U_k^*) \Big|_{z=\gamma_k} (\tau) \delta(z - \gamma_k)_m d\tau, \quad k = \overline{1, n_1 + 1}. \quad (34)$$

Перейдя к оригиналам в (34), получим единственное решение сопряженной краевой задачи (29)–(31) в классической форме [9]

$$\phi_k(t, z) = \int_{t, l_{k-1}}^T \int_{l_k} \bar{\mathcal{H}}_k(t - \tau, z, \xi) (u_{k_k}^n - U_k^*) \Big|_{z=\gamma_k} (\tau) \delta(\xi - \gamma_k) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, n_1 + 1}. \quad (35)$$

Здесь компоненты матрицы влияния $[\bar{\mathcal{H}}_k(t, z, \xi)]$, $k = \overline{1, n_1 + 1}$, имеют вид

$$\bar{\mathcal{H}}_k(t - \tau, z, \xi) = \frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{sh } b_k \beta_m (t - \tau)}{b_k \beta_m} \sin \beta_m (\xi - l_{k-1}) \sin \beta_m (z - l_{k-1}). \quad (36)$$

Решение (36) задачи (29)–(31) после ряда преобразований конвертируем в форме, удобной и эффективной для численных итерационных расчетов в процедурах идентификации параметров:

$$\phi_k(t, z) = \frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - \text{ch}(b_k \beta_m (T - t))}{(b_k \beta_m)^2} \sin \beta_m \gamma_k \sin \beta_m (z - l_{k-1}) (U_k^* - u_{k_k}^n), \quad k = \overline{1, n_1 + 1}. \quad (37)$$

Формулы для компонентов градиентов и регуляризационного выражения

Согласно [9] получаем аналитические выражения для компонентов градиентов функционала-невязки:

$$\nabla J_{\tilde{b}_k} = \int_{0, l_{k-1}}^T \int_{l_k} \phi_k(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k(t, z) dz dt, \quad (38)$$

$$\phi_k(t, z) = \frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - \text{ch}(b_k \beta_m (T - t))}{(b_k \beta_m)^2} \sin \beta_m \gamma_k \sin \beta_m (z - l_{k-1}) (U_k^* - u_{k_k}^n), \quad k = \overline{1, n_1 + 1},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_k(t, z) = -\frac{2}{\Delta h} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m (1 - \cos(b_k \beta_m t)) \sin \beta_m (z - l_{k-1}) \times$$

$$\times \left(S_k^* \frac{1}{(b_k \beta_m)^2} ((-1)^m - 1) + (U_{l_{k-1}} - (-1)^m U_{l_k}) \right).$$

Регуляризационные выражения для $n+1$ -го шага определения идентифицирующей функциональной зависимости. С использованием метода минимальных погрешностей для определения зависимости идентификации амплитудных компонентов фазовой скорости распространения волны АНД \tilde{b}_k^{n+1} от времени для каждого k -го элемента АНД $k = \overline{1, n_1 + 1}$, получим

$$\tilde{b}_k^{n+1}(t) = \tilde{b}_k^n(t) - \nabla J_{\tilde{b}_k^n}(t) \frac{\left\| u_{k_k}^n(t, \gamma_k, \tilde{b}_k^n) - U_k^* \right\|^2}{\left\| \nabla J_{\tilde{b}_k^n}^n(t) \right\|_{\gamma_k}^2}, \quad t \in (0, T), \quad k = \overline{1, n_1}. \quad (39)$$

Моделирование и идентификация параметров сложных многокомпонентных нейробиосистем обратной связи на многоядерных компьютерах

Моделирование и идентификация параметров АНД осуществлялись в рамках поставленной задачи идентификации когнитивных обратных влияний EEG на АНД-траектории с использованием разработанной гибридной модели АНД. Для настройки модели идентификации использовался фрагмент АНД-трассы спирального типа исследуемого Т-объекта, выполненная пациентом на цифровом планшете согласно рис. 2 [8, 9].

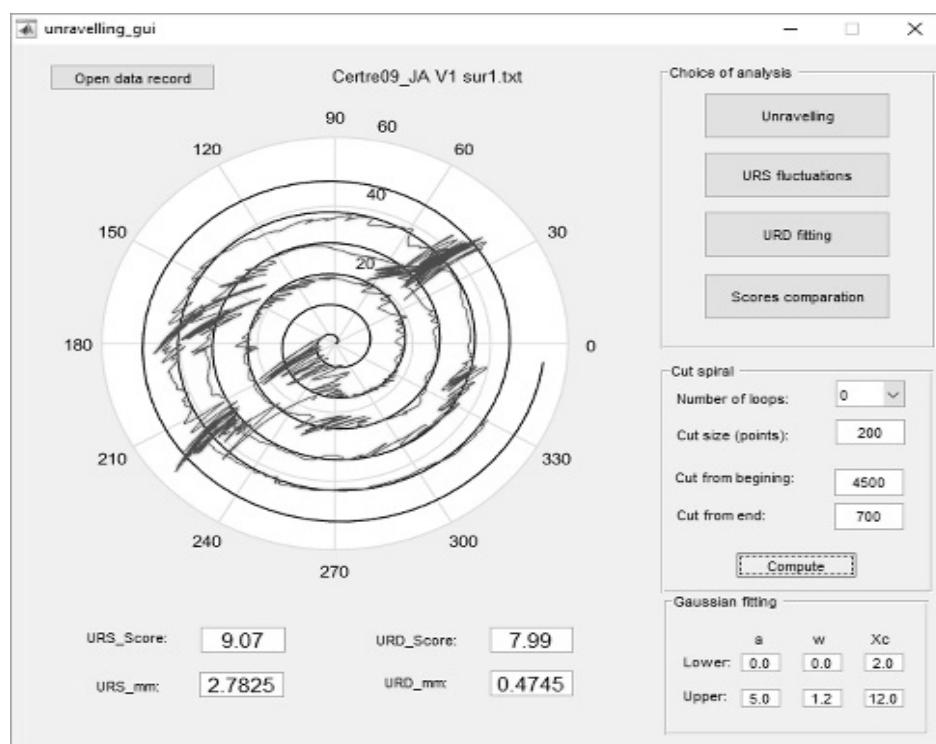


Рис. 2

Исправленный в развернутом виде фрагмент этого примера РС в количестве дискретизированных 4000 точек-положений АНД-трассы представлен на рис. 3. Здесь абсцисса — номера позиций отклонения пера от равновесия при прохождении спирального образца.

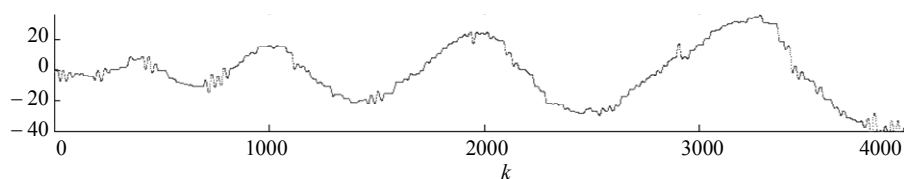


Рис. 3

Для тестирования модели и настройки модельной трассы использован тестовый образец EEG (сигналов гипотетического нейроузла КГМ) (рис. 4). Данное распределение EEG-сигналов когнитивно действует на движение пера в течение всего периода движения при рисовании фрагмента АНД-трассы. Здесь интервалы действия EEG-сигналов пропорционально сопоставлены и приведены в соответствии с протяженностями фрагмента АНД-трассы Т-объекта.

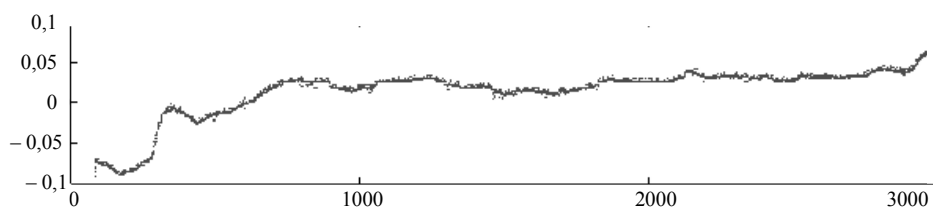


Рис. 4

Настройка модельной трассы АНД и их пошаговая и посегментная идентификация (амплитудно-частотных параметров для каждого сегмента с учетом целостности системы) на конкретный образец АНД-трассы, выполненной пациентом (кривая наблюдения или экспериментальная кривая) выполнялось согласно feedback-схеме (см. рис. 1) и аналитическому решению гибридной модели АНД-движения с обратной связью (9), (10).

Результаты тестирования модели представлены на графиках (рис. 5–10). Для начала задействовали относительно небольшое количество точек, пытаясь воссоздать профиль кривой наблюдения (профиль АНД-трассы, выполненный пациентом с учетом картины кривой feedback-воздействий тестового EEG (см. рис.3). Рис. 5 демонстрирует сравнительный анализ модельной трассы АНД (маркер 1) и реальной АНД-трассы Т-объекта (маркер 2) для первых 50 точек трассы.

Как видно из рис. 5, точность совпадения модельной и АНД-трассы пациента очень высока (до 1,5–2 %) для 50 точек наблюдения. Амплитудные и частотные характеристики благодаря построенной гибридной спектральной функции системно, для всех сегментов разбиения (с учетом их связности), позволили получить практически полное совпадение модельной и реальной АНД-трассы Т-объекта.

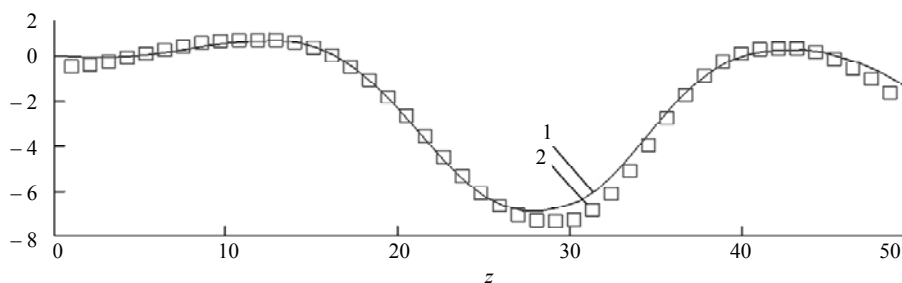


Рис. 5

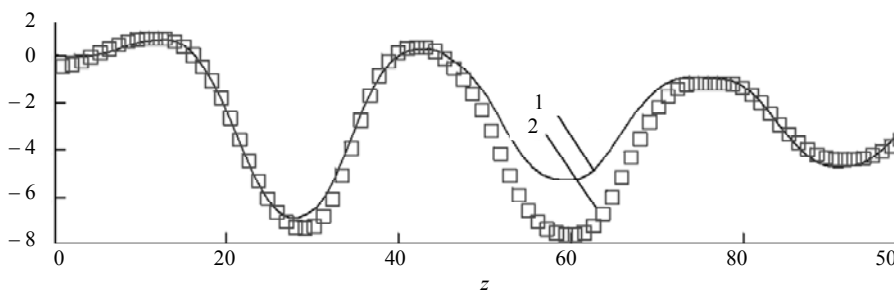


Рис. 6

Далее, постепенно наращивая количество точек трассы до 100, 500, 1000, 2000 и 4000, изучено поведение модельной кривой, оценивая ее возможное от-

клонения от экспериментальной АМР-трассы пациента. Для первых точек 100 результаты оказались практически те же (см. рис. 6), хотя наблюдается незначительное отклонение в седловой зоне в окрестности 60-й точки трассы около 5–6 %. Однако эту проблему технически можно решить, сделав сегментацию трассы в этой зоне более мелкой. Предложенная модель позволяет осуществлять произвольное разбиение с произвольными размерами каждого сегмента и делать их по необходимости сколь угодно малыми.

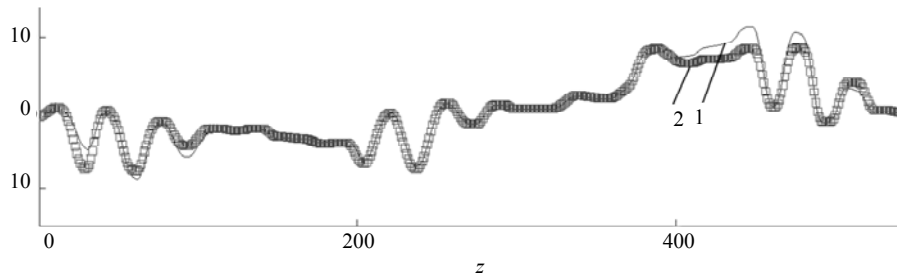


Рис. 7

Положительным моментом является то, что для всех остальных графиков с нарастающим количеством точек до 500, 1000, 2000 и 4000 (см. рис. 7–10) также имеем высокую степень точности совпадения модельных и экспериментальных кривых (1 и 2), что обеспечивает высокий уровень воспроизведения амплитудно-частотных характеристик АМР-трассы (периодичность модельных кривых практически полностью соответствует периодичности кривых, выполненных пациентом). С увеличением количества исследуемых точек в отдельных седловых или гребневых точках отклонения амплитудных характеристик несколько увеличиваются. Но, как было отмечено, снизить эти отклонения всегда можно за счет выбора более мелкого разбиения в этих зонах.

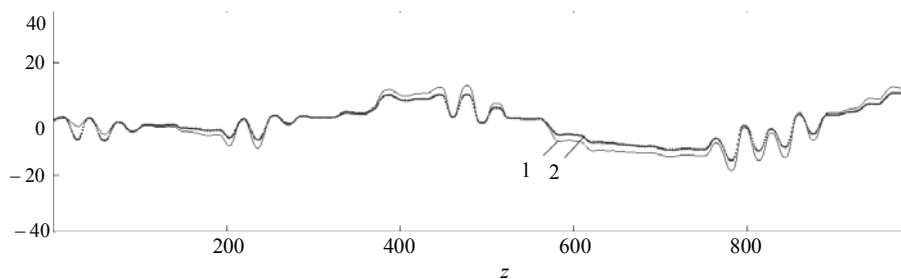


Рис. 8

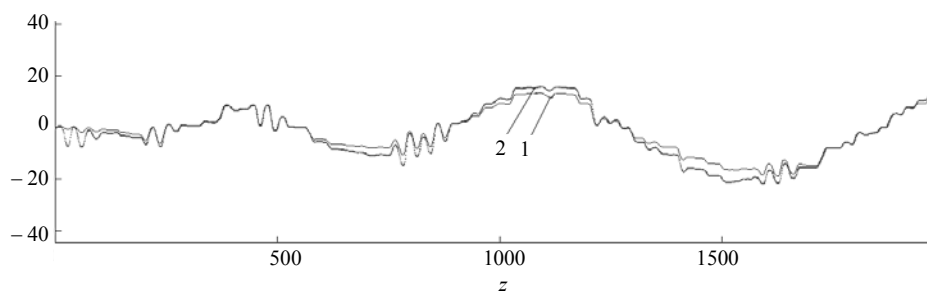


Рис. 9

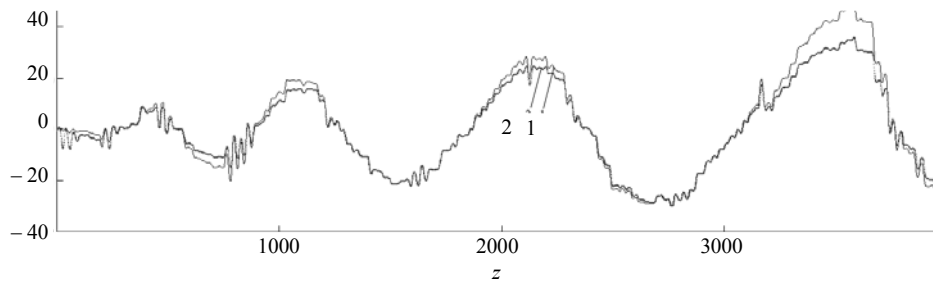


Рис. 10

Как видно из представленных графиков, предложенная модель на высоком уровне воспроизводит поведение пациента, отражая АНД-трассу практически до полного совпадения с нанесенной им на планшете. Главное, что в модели заложена возможность отображения механизмов его воздействий обратной связи нейроузлов КГМ в виде матрицы сигналов EEG, определяющих поведение этих движений. Дальнейшее исследование может совершенствовать это поведение в зависимости от изменения величин EEG feedback-воздействий после определенных терапевтических процедур и расширять границы применения.

Заключение

Разработана гибридная модель нейробиосистемы описывает состояние и поведение 3D-элементов траекторий АНД Т-объекта с учетом матрицы когнитивных воздействий групп нейроузлов КГМ. Методами гибридных интегральных преобразований Фурье построено аналитическое векторное решение модели, определяющее элементы траекторий на каждом АНД-сегменте. На его основе предложены высокопроизводительные алгоритмы идентификации параметров исследуемых систем с обратной связью — получением явных выражений градиентов функционала-невязки, позволяющие распараллеливания вычислений для многоядерных компьютеров. В отличие от общепринятого классического подхода предлагаемая гибридная модель, ориентированная на глубокую декомпозицию системы без нарушения ее целостности и всех важных связей, что позволят более качественно описать сложные скрытые механизмы процесса со множеством связей и воздействий обратной связи когнитивного характера, обеспечить большую полноту данных, ранее «исчезающих» при классической статистической обработке.

М.Р. Петрик, А.О. Чикрий, І.Я. Мудрик

МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ НЕОДНОРІДНИХ АНОРМАЛЬНИХ НЕВРОЛОГІЧНИХ РУХІВ У БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ НЕЙРОБІОСИСТЕМАХ З КОГНІТИВНИМИ ЗВОРОТНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

Розроблено основи математичного моделювання та ідентифікації параметрів неоднорідних аномальних неврологічних рухів (АНР) у багатоконпонентних нейробиосистемах з когнітивними зворотними зв'язками. На основі розвинутих авторами методів інтегральних перетворень та спектрального аналізу для неоднорідних середовищ запропоновано новий підхід до побудови гібридних моделей поширення хвильового сигналу, що описує небажані тремтіння кінцівки руки пацієнта (Т-об'єкта) в результаті мимовільного скорочення скелетних м'язів за рахунок когнітивних впливів окремої групи нейронних вузлів кори головного мозку (КГМ). Розроблено гібридну модель нейробиосистеми,

що описує стан і поведінку Т-об'єктів, а саме, поsegmentний опис 3D-елементів траєкторій АНР Т-об'єкта з урахуванням матриці когнітивних впливів груп нейровузлів КГМ. На основі гібридних інтегральних перетворень Фур'є отримано високошвидкісний аналітичний векторний розв'язок моделі, що описує елементи траєкторій на кожному АНР-segmentі. Запропоновано нову методику обчислення гібридної спектральної функції, спектральних значень та матриці когнітивних впливів нейровузлів КГМ, що визначають гібридне інтегральне перетворення побудови розв'язку. Сформульовано та розв'язано нові неklasичні задачі багатопараметричної ідентифікації нейросистем зі зворотним зв'язком в неоднорідних середовищах на основі мінімізації функціоналу-нев'язки між траєкторіями спостереження та їх модельними аналогами. Побудовано високопродуктивні алгоритми ідентифікації амплітудно-частотних характеристик систем зворотного зв'язку для компонентного оцінювання впливу когнітивних зворотних зв'язків, що дозволяють розпаралелювання обчислень для багатоядерних комп'ютерів. Виконано комп'ютерне моделювання та ідентифікацію АНР-траєкторій нейросистем зворотного зв'язку.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, системи зі зворотним зв'язком, високопродуктивні обчислення, тремор, аномальні неврологічні рухи, багатопараметрична ідентифікація.

M.R. Petryk, A.A. Chikrii, I.Ya. Mudryk

SIMULATION AND PARAMETERS-IDENTIFICATION METHODS OF HETEROGENEOUS ABNORMAL NEUROLOGICAL MOVEMENTS IN MULTICOMPONENT NEURO-BIOSYSTEMS WITH COGNITIVE FEEDBACK

The foundations of mathematical modeling and identification of parameters of heterogeneous abnormal neurological movements (ANM) in multicomponent neuro-biosystems with cognitive feedback have been developed. Based on the methods of integral transformations and spectral analysis developed by the authors for heterogeneous media, a new approach to the construction of hybrid models of wave signal propagation is proposed that describes unwanted tremors of the patient's arm (T-object) as a result of an unconstrained contraction of skeletal muscles due to the cognitive effects of a certain group of neural nodes in the cortex cerebral (CC). A hybrid model of a neuro-biosystem is developed, which describes the state and behavior, namely, the segment-by-segment description of 3D elements of the ANM trajectories of the T-object, taking into account the matrix of cognitive influences of the groups of neuro nodes of the CC. On the basis of hybrid integral Fourier transforms a high-speed analytical vector solution of the model is obtained, which describes the elements of the trajectories on each AND-segment. A new method for calculating of hybrid spectral function, spectral values and matrix of cognitive influences of CC neurons is proposed, which determine hybrid integral transformation of solution construction. New non-classical problems of multi-parameter identification of neuro-feedback systems in heterogeneous media based on minimization of the residual functional between observation trajectories and their model analogs are formulated and solved. High-performance algorithms of the amplitude-frequency characteristics identifying of a feedback-system in analytical expressions for the gradients of the residual functional have been constructed, which allow parallel-computations on multi-core computers. Computer modeling and identification of ANM trajectories of the studied neuro-feedback-system have been performed.

Keywords: computer simulation, feedback systems, high performance computing, tremor, abnormal neurological movements, multivariable identification

1. Kraus P.H., Hoffmann A. Spiralometry: computerized assessment of tremor amplitude on the basis of spiral drawing. *movement disorders*. 2010. **25**, N 13. P. 2164–2170. <https://doi.org/10.1002/mds.23193>.

2. Haubenberger D., Kalowitz D., Nahab F. B., Toro C., Ippolito D., Luckenbaugh D.A., Wittevrongel L., Hallett M. Validation of digital spiral analysis as outcome parameter for clinical trials in essential tremor, movement disorders. 2011. 26 (11). P. 2073–2080. <https://doi.org/10.1002/mds.23808>.
3. Louis E. D., Gillman A., Böschung S., Hess C.W., Yu Q. & Pullman S.L. High width variability during spiral drawing: Further evidence of cerebellar dysfunction in essential tremor. *Cerebellum*, 2012. 11, P. 872–879. <https://DOI: 10.1007/s12311-011-0352-4>.
4. Michalec M., Hernandez N., Clark L.N., Louis E.D. The spiral axis as a clinical tool to distinguish essential tremor from dystonia. *Parkinson Relat Disord.* 20014, N 20. P. 541–544. <https://doi.org/10.1016/j.parkreldis.2014.01.021>.
5. Bonnet C., Apartis E., Anheim M., Legrand A. P., Baizabal-Carvallo J.F., Bonnet A.M., Durr A., Vidailhet M. Tremor-spectrum in spinocerebellar ataxia type. *J Neurol.* 2012. 259. P. 2460–2470. DOI 10.1007/s00415-012-6531-5.
6. Wang J. -S., Chuang F.-C. An accelerometer-based digital pen with a trajectory recognition algorithm for handwritten digit and gesture recognition. *IEEE Transactions on Industrial Electronics.* 2012. 59. N 7. P. 2998–3007. <https://DOI: 10.1109/TIE.2011.2167895>.
7. Sisti JA, Christophe B, Seville AR, Garton ALA, Gupta VP, Bandin AJ, Yu QY, Pullman SL. Computerized spiral analysis using the iPad. *J Neurosci Methods.* 2017. 275. P. 50–4. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jneumeth.2016.11.004>.
8. Legrand A.P., Rivals I., Richard A., Apartis E., Roze E., Vidailhet M., Meunier S., Hainque E. New insight in spiral drawing analysis methods – Application to action tremor quantification. *J Clinical Neurophysiology*, 2017. 128, N 10. P. 1823–1834. <https://doi.org/10.1016/j.clinph.2017.07.002>.
9. Химич А.Н., Петрик М.Р., Михалик Д. Н., Бойко И.В., Попов А.В., Сидорук. В.А. Методы математического моделирования и идентификации сложных процессов и систем на основе высокопродуктивных вычислений (нейро- и нанопористые кибер-физические системы с обратными связями, модели с данными разреженной структуры, параллельные вычисления). Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. 2019. 188 с. <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/30745>.
10. Mykhalyk D., Mudryk I., Hoi A., Petryk M. Modern hardware and software solution for identification of abnormal neurological movements of patients with essential tremor. *IEEE Proceeding of 2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT, Budejovice, Czech Republic)*, 2019. P. 183–186.
11. Петрик М.Р., Михалик Д.М., Мудрик И.Я. Способ цифрового измерения параметров аномальных неврологических движений верхних конечностей у пациентов с проявлениями тремора. Патент на полезную модель №130247. Бюл. № 22 от 26.11.2018.
12. Mudryk I., Petryk M., Petryk M.M., Kushnir O. Hybrid artificial intelligence systems for complex neural network analysis of abnormal neurological movements with multiple cognitive-nodes signal. 2020 *IEEE 15th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, Springer. CSIT 2020. Proceedings*, 2020, 1. P. 432–435. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-63270-0>.
13. Mudryk I., Mykhalyk D., Petryk M. High-performance analyzing methods for tremor objects abnormal states of neuro-biosystems with cognitive feedbacks. 2020 *10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT 2020. Proceedings*, 2020, P. 265–268, <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9209013>.
14. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Методы интегральных преобразований Фурье-Бесселя в задачах математического моделирования массопереноса в неоднородных средах. К.: Наук. думка. 2000. 372 с.
15. Mudryk I., Petryk M. Hybrid artificial intelligence systems for complex neural network analysis of abnormal neurological movements with multiple cognitive signal nodes. *Proceedings of the 2020 IEEE 3rd International Conference on Data Stream Mining and Processing, Springer. DSMP 2020*. P. 108–111. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61656-4>.
16. Чикрий А.О., Кривонос Ю.Г., Матичин И.И. Динамические игры с разрывными траекториями. К.: Наук. думка, 2005. 220 с.

Получено 31.03.2021