УДК 517.95:419.86:539.3

В.А. Стоян, С.Д. Волощук

О ТРЕХМЕРНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Ключевые слова: пространственно-распределенные динамические системы, пространственные задачи теории упругости, толстые упругие плиты, начально-краевые задачи.

Введение

Упругие пластины, плиты и оболочки были, есть и еще долго будут элементами сложных механических конструкций [1]. Математические трудности построения распределенных в пространстве динамических смещений, деформаций и напряжений в таких объектах заставляли исследователей отталкиваться от решений упруго-динамических задач на срединной поверхности тела, аппроксимируя их с помощью некоторых механических моделей на всю толщину пластины. Подобный подход применялся при исследовании пластин и оболочек малой толщины. Некоторые задачи решались и для тел конечной толщины. Интересным и перспективным, на наш взгляд, есть предложенный в [1, 2] и обобщенный в [3–5] подход к построению и исследованию поля динамических смещений, распределенных в трехмерном упругом пространстве. Математическая модель этого поля описывалась двумерными дифференциальными уравнениями, параметрически зависимыми от поперечной координаты. Строилась она путем интегрирования известных уравнений Ляме [6] по поперечной координате, что позволило успешно решить [7–9] ряд прямых и обратных задач динамики толстых упругих плит в достаточно общих постановках. Эти же уравнения трехмерной теории упругости, без каких-либо упрощений и механико-геометрических гипотез, позволили успешно построить [10] математическую модель динамики трехмерного упругого тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями и цилиндрической боковой поверхностью любой конфигурации между ними.

Успешно решены проблемы построения трехмерного поля динамических смещений внутренних точек пространственно ограниченной толстой упругой плиты с известными поверхностно-торцевыми силовыми факторами, которые его порождают [10]. Однако при этом не рассматривались трехмерные начально-краевые задачи динамики плиты, частично решенные в [7–9] на основании полутрехмерных математических моделей [2–5] динамики толстых упругих плит. Решение этих сложных математических задач трехмерной теории упругости предлагается в данной статье, а также сформулированы и решены задачи построения трехмерного поля динамических смещений точек толстой упругой плиты произвольной геометрии, вызванных поверхностно-торцевыми внешнединамическими возмущающими воздействиями. Построенные смещения, удовлетворяя трехмерным уравнениям Ляме [6], по среднеквадратическому критерию не всегда согласуются с силовыми дискретно или непрерывно заданными наблюдениями за состоянием поверхности плиты. Дана оценка точности построенного решения и сформулированы условия его однозначности.

Интегральная математическая модель динамики трехмерных упругих тел

В декартовой системе координат рассмотрим ограниченное поверхностью $\Gamma(\xi)$ трехмерное упругое тело $S_0(\xi)$ плотности ρ, упруго-динамические характеристики которого определяются константами Ляме λ и μ [6]. Будем исходить из того, что динамические смещения $u_i(s)$ $(i=\overline{1,3})$ точек тела в направлении координатных осей Ox, Oy, Oz определяются классически известными уравнениями Ляме [6]

$$L(\partial_s)\,u(s) = f(s), \tag{1}$$

в которых $s=(\xi,t)$ (t — временная координата), $\partial_s=(\partial_x,\partial_y,\partial_z,\partial_t)$ — вектор производных по координатно-временным переменным, $f(s)=\mathrm{col}(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$, $u(s)=\mathrm{col}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$, а $L(\partial_s)$ — линейный дифференциальный оператор вида

$$L(\partial_s)=\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\partial_x^2+\mu(\partial_y^2+\partial_z^2)-\rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_x\partial_y & (\lambda+\mu)\partial_x\partial_z \\ (\lambda+\mu)\partial_y\partial_x & (\lambda+2\mu)\partial_y^2+\mu(\partial_z^2+\partial_x^2)-\rho\partial_t^2 & (\lambda+\mu)\partial_y\partial_z \\ (\lambda+\mu)\partial_z\partial_x & (\lambda+\mu)\partial_z\partial_y & (\lambda+2\mu)\partial_z^2+\mu(\partial_x^2+\partial_y^2)-\rho\partial_t^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')}d\lambda$$

(здесь i — мнимая единица, δ — функция Дирака), и, вводя в рассмотрение матричную передаточную функцию $G(s-s')$, такую что

$$L(\partial_s)G(s-s') = \Delta(s-s'), \tag{2}$$

где

$$\Delta(s-s') = \mathrm{diag}\,(\delta(s-s'), i=\overline{1,3}),$$

$$\delta(s-s') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta(t-t'),$$

дифференциальную математическую модель (1) запишем [11] в более удобной для практики интегральной форме

$$u(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')ds'.$$

Матричную функцию $G(s-s')$, определенную соотношением (2), представим в виде

$$G(s-s') = \frac{1}{16\pi^n}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{E(p,q,s-s')}{L(p,q)}dpdq,$$

где $p=(p_1, p_2, p_3)$, $dp = dp_1 dp_2 dp_3$,

$$E(p,q,s-s') = \mathrm{diag}\,(e^{p_1(x-x')+p_2(y-y')+p_3(z-z')+q(t-t')}, k=\overline{1,3}).$$

Последнее при наличии дополнения к массовым силам $f(s)$ $(s \in S_0(\xi)\times(0,T])$ начально-граничных возмущающих факторов $f_0(\xi)=\mathrm{col}(f_{01}(\xi), f_{02}(\xi), f_{03}(\xi))$ $(\xi \in S_0(\xi))$ и $f_\Gamma(s)=\mathrm{col}(f_{\Gamma 1}(\xi), f_{\Gamma 2}(\xi), f_{\Gamma 3}(\xi))$ $(s\in\Gamma\times[0,T])$ вектор упруго-динамических смещений точек тела позволяет определить соотношением

$$u(s)=u_\infty(s)+u_0(s)+u_\Gamma(s), \tag{3}$$

в котором

$$u_\infty(s)=\int\limits_{S_0(\xi)\times[0,T]} G(s-s')f(s')\,ds', \tag{4}$$

$$u_0(s)=\int\limits_{S_0(\cdot)} G(s-s')\big|_{t'=0} f_0(s')ds', \tag{5}$$

$$u_\Gamma(s)=\int\limits_{\Gamma\times[0,T]} G(s-s')f_\Gamma(s')ds'. \tag{6}$$

При этом согласно [10]

$$L(\partial_s)u(s)=\begin{cases} f(s), & s\in S_0^T=S_0(\xi)\times[0,T], \\ f_0(s), & \xi\in S_0(\xi), \qquad\qquad t=0, \\ f_\Gamma(s), & \xi\in\Gamma(\xi), \qquad\qquad t\in[0,T], \end{cases}$$

что и заканчивает решение рассматриваемой задачи динамики трехмерного упругого тела, внутренние точки которого ограничены поверхностью $\Gamma(\xi)$.

Толстые упругие плиты в заданном силовом поле

Остановимся на результатах применения полученного выше решения задачи эластодинамики трехмерного упругого тела к исследованию поля динамических смещений точек $\xi\in S_0(\xi)$ толстой упругой плиты, ограниченной плоскостями $z=\pm\infty h$ и цилиндрической торцевой поверхностью $\Gamma(\xi)$, для случая, когда последние находятся под действием гранично-поверхностных силовых воздействий

$$f^+(s)\big|_{z=+h}=\mathrm{col}(f_1^+(x,y,t), f_2^+(x,y,t), f_3^+(x,y,t)),$$

$$f^-(s)\big|_{z=-h}=\mathrm{col}(f_1^-(x,y,t), f_2^-(x,y,t), f_3^-(x,y,t)),$$

$$f^\Gamma(s)\big|_{\xi\in\Gamma}=\mathrm{col}(f_1^\Gamma(s), f_2^\Gamma(s), f_3^\Gamma(s)),$$

при условии, что их составляющие $f_i^+(\cdot)$, $f_i^-(\cdot)$ и $f_i^\Gamma(\cdot)$ $(i=\overline{1,3})$, как и выше, имеют направление координатных осей Ox, Oy, Oz.

Нетрудно заметить, что, исходя из (3)–(6), вектор-функция $u(s)$ динамических смещений точек $\xi\in S_0(\xi)$ такой плиты можно определить соотношением

$$u(s)=u_\infty(s)+u^+(s)+u^-(s)+u^\Gamma(s), \tag{7}$$

составляющие

$$u_\infty(s)=\int\limits_{S_0^T} G(s-s')f(s')ds',$$

$$u^+(s)=\int\limits_{S_0^+} G(s-s')\big|_{z=+h} f^+(s')ds',$$

$$u^{-}(s)=\int\limits_{S_0^-} G(s-s')\big|_{z=-h} f^{-}(s')ds',$$

$$u^{\Gamma}(s)=\int\limits_{S_0^{\Gamma}} G(s-s')f^{\Gamma}(s')ds'$$

которого при

$$S_0^T=S_0(\xi)\times[0,T],$$

$$S_0^+=\{(x,y,z)\in S_0(\xi),\ z=+h\}\times[0,T],$$

$$S_0^-=\{(x,y,z)\in S_0(\xi),\ z=-h\}\times[0,T],$$

$$S_0^{\Gamma}=\{\Gamma(\xi),\ -h\le z\le +h\}\times[0,T]$$

соответствуют действию внешнединамических возмущений $f(\cdot)$, $f^+(\cdot)$, $f^-(\cdot)$, $f^{\Gamma}(\cdot)$ соответственно.

Упругодинамическая модель (1), записанная как

$$L(\partial_s)u(s)=\begin{cases} f(s), & s\in S_0^T, \\ f^+(s), & s\in S_0^+, \\ f^-(s), & s\in S_0^-, \\ f^{\Gamma}(s), & s\in S_0^{\Gamma}, \end{cases} \tag{8}$$

позволяет построить поле упругих динамических смещений $u(s)$ внутренних точек плиты, которая находится под действием массовых сил $f(s)$ и внешнединамических гранично-поверхностных силовых воздействий $f^+(\cdot)$, $f^-(\cdot)$, $f^{\Gamma}(\cdot)$.

Рассмотренный подход к построению математической модели (7), (8) динамики толстой упругой плиты с определенными поверхностно-граничными внешнесиловыми воздействиями может быть успешным и для случая, когда последние заданы дискретными значениями f_m^+ $(m=\overline{1,M^+})$, f_m^- $(m=\overline{1,M^-})$, f_m^{Γ} $(m=\overline{1,M^{\Gamma}})$ функций $f^+(s)$, $f^-(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ в точках $s_m^+\in S_0^+$ $(m=\overline{1,M^+})$, $s_m^-\in S_0^-$ $(m=\overline{1,M^-})$, $s_m^{\Gamma}\in S_0^{\Gamma}$ $(m=\overline{1,M^{\Gamma}})$ соответственно. При этом упругодинамическая модель (8) и составляющие $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^{\Gamma}(s)$ ее решения (7) запишем соотношениями

$$L(\partial_s)u(s)\big|_{s=s_m^+}=f_m^+\ (m=\overline{1,M^+}),$$

$$L(\partial_s)u(s)\big|_{s=s_m^-}=f_m^-\ (m=\overline{1,M^-}),$$

$$L(\partial_s)u(s)\big|_{s=s_m^{\Gamma}}=f_m^{\Gamma}\ (m=\overline{1,M^{\Gamma}}),$$

$$u^+(s)=\sum_{m=1}^{M^+}G(s-s_m^+)f_m^+,$$

$$u^-(s)=\sum_{m=1}^{M^-}G(s-s_m^-)f_m^-,$$

$$u^{\Gamma}(s)=\sum_{m=1}^{M^{\Gamma}} G(s-s_m^{\Gamma})f_m^{\Gamma}.$$

Позитивный момент предложенной здесь и записанной соотношениями (7), (8) математической модели динамики рассматриваемой упругой плиты в том, что ее можно использовать для построения трехмерного поля упругих динамических смещений внутренних точек и в случае, когда внешнединамические возмущающие воздействия заданы не только силовыми гранично-поверхностными факторами $f^{+}(s)$, $f^{-}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$, а и линейно преобразованными функциями динамических смещений ее гранично-поверхностных точек $s\in S_0^{+}$, $s\in S_0^{-}$, $s\in S_0^{\Gamma}$. Однако заметим, что согласование построенного в этом случае поля упругих динамических смещений точек плиты с наблюдениями за динамикой ее гранично-поверхностных точек будет достигаться по среднеквадратическому критерию.

Толстые упругие плиты, наблюдаемые по несиловым внешнединамическим возмущениям

Рассмотрим методику применения предложенной выше математической модели (7), (8) динамики толстой упругой плиты при заданных внешнесиловых воздействиях на нее в случае, когда условия функционирования плиты определяются внешнединамическими наблюдениями за ее гранично-поверхностной частью и эти наблюдения не носят силовой характер, а их количество не достаточное для математически корректной формулировки начально-краевой задачи.

Как и в публикациях [7–9], будем исходить из того, что начально-краевые наблюдения за состоянием плиты в общем случае могут определяться соотношениями

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi\in S_0}}=U_r^0(\xi)\ (r=\overline{1,R_0}),\tag{9}$$

$$L_\rho^{+}(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^{+}}=U_\rho^{+}(s)\ (\rho=\overline{1,R_+}),\tag{10}$$

$$L_\rho^{-}(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^{-}}=U_\rho^{-}(s)\ (\rho=\overline{1,R_-}),\tag{11}$$

$$L_\rho^{\Gamma}(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^{\Gamma}}=U_\rho^{\Gamma}(s)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma}),\tag{12}$$

в которых $L_r^0(\partial_t)\ (r=\overline{1,R_0})$, $L_\rho^{+}(\partial_\xi)\ (r=\overline{1,R_+})$, $L_\rho^{-}(\partial_\xi)\ (r=\overline{1,R_-})$, $L_\rho^{\Gamma}(\partial_\xi)$ $(r=\overline{1,R_\Gamma})$ — заданные матричные дифференциальные операторы, а $U_r^0(\xi)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $U_\rho^{+}(s)\ (\rho=\overline{1,R_+})$, $U_\rho^{-}(s)\ (\rho=\overline{1,R_-})$, $U_\rho^{\Gamma}(s)\ (\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — заданные вектор-функции.

Заметим, что отсутствие ограничений на количество R_0, R_+, R_-, R_Γ начально-краевых условий (9)–(12) делает задачу (1), (9)–(12) математически неразрешимой, поэтому вектор функцию $u(s)$ состояния точек рассматриваемой плиты построим так, чтобы она, будучи решением уравнения (1), начально-краевым соотношениям (9)–(12) удовлетворяла согласно критерию

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi\in S_0}} - U_r^0(\xi))^2 d\xi + \sum_{\rho=1}^{R_+} \int_{S_0^+} (L_\rho^+(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^+} - U_\rho^+(s))^2 ds +$$
$$+\sum_{\rho=1}^{R_-} \int_{S_0^-} (L_\rho^-(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^-} - U_\rho^-(s))^2 ds + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{S_0^\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s\in S_0^\Gamma} - U_\rho^\Gamma(s))^2 ds \to \min_{u(s)}. \quad (13)$$

Ниже остановимся на решении задачи построения вектор-функции $u(s)$ $(s \in S_0^{\mathrm{T}})$ внутридинамических смещений точек плиты при условии, что

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}} = U_{rl}^0 \quad (r=\overline{1, R_0}, l=\overline{1, L_0}), \quad (14)$$

$$L_\rho^+(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^+\in S_0^+} = U_{\rho l}^+ \quad (\rho=\overline{1, R_+}, l=\overline{1, L_+}), \quad (15)$$

$$L_\rho^-(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^-\in S_0^-} = U_{\rho l}^- \quad (\rho=\overline{1, R_-}, l=\overline{1, L_-}), \quad (16)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in S_0^\Gamma} = U_{\rho l}^\Gamma \quad (\rho=\overline{1, R_\Gamma}, l=\overline{1, L_\Gamma}) \quad (17)$$

при заданных U_{rl}^0 $(r=\overline{1, R_0}, l=\overline{1, L_0})$, $U_{\rho l}^+$ $(\rho=\overline{1, R_+}, l=\overline{1, L_+})$, $U_{\rho l}^-$ $(\rho=\overline{1, R_-}, l=\overline{1, L_-})$, $U_{\rho l}^\Gamma$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma}, l=\overline{1, L_\Gamma})$, которые являются значениями функций $U_r^0(\xi)$ $(r=\overline{1, R_0})$, $U_\rho^+(s)$ $(\rho=\overline{1, R_+})$, $U_\rho^-(s)$ $(\rho=\overline{1, R_-})$, $U_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ в точках $\xi_l^0 \in S_0$ $(l=\overline{1, L_0})$, $s_l^+ \in S_0^+$ $(l=\overline{1, L_+})$, $s_l^- \in S_0^-$ $(l=\overline{1, L_-})$, $s_l^\Gamma \in S_0^\Gamma$ $(l=\overline{1, L_\Gamma})$ соответственно.

Аналогично (13) критерий решения начально-краевой задачи (1), (14)–(17) запишем в виде

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0}} - U_{rl}^0)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_+}\sum_{l=1}^{L_+} (L_\rho^+(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^+\in S_0^+} - U_{\rho l}^+)^2 +$$
$$+\sum_{\rho=1}^{R_-}\sum_{l=1}^{L_-} (L_\rho^-(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^-\in S_0^-} - U_{\rho l}^-)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in S_0^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma)^2 \to \min_{u(s)}. \quad (18)$$

При решении задач (1), (13) и (1), (18) искомую функцию $u(s)$ аналогично (7) представим соотношением

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s) + u^+(s) + u^-(s) + u, \quad (19)$$

составляющие $u_\infty(s)$, $u_0(s)$, $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^\Gamma(s)$ которого должны делать вклад в упругодинамическую картину плиты массовых сил $f(s)$, а также наблюдаемых согласно (9)–(12) или (14)–(17) начальных, поверхностных и торцевых внешнединамических возмущений. Учитывая, что наблюдаемые в (9)–(12) и (14)–(17) характеристики состояния внутренних (при $t=0$) и гранично-поверхностных точек плиты в общем случае не силовые, их влияние на динамику плиты будем моделировать силовыми характеристиками $f_0(s)\ (s \in S_0 \times (-\infty, 0])$, $f^+(s)\ (s \in S_0^+)$, $f^-(s)\ (s \in S_0^-)$, $f^\Gamma(s)\ (s \in S_0^\Gamma)$ так, чтобы вектор-функция (19) состояния рассматриваемой плиты при определенной выше $u_\infty(s)$ и

$$u_0(s) = \int\limits_{S_0 \times (-\infty, 0]} G(s - s') f_0(s') ds',$$

$$u^+(s) = \int\limits_{S_0^+} G(s - s') f^+(s') ds', \tag{20}$$

$$u^-(s) = \int\limits_{S_0^-} G(s - s') f^-(s') ds',$$

$$u^\Gamma(s) = \int\limits_{S_0^\Gamma} G(s - s') f^\Gamma(s') ds'$$

или

$$u_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) f_{0m} \quad (s_m^0 \in S_0 \times (-\infty, 0],\ m = \overline{1, M_0}),$$

$$u^+(s) = \sum_{m=1}^{M^+} G(s - s_m^+) f_m^+ \quad (s_m^+ \in S_0^+,\ m = \overline{1, M^+}), \tag{21}$$

$$u^-(s) = \sum_{m=1}^{M^-} G(s - s_m^-) f_m^- \quad (s_m^- \in S_0^-,\ m = \overline{1, M^-}),$$

$$u^\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M^\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) f_m^\Gamma \quad (s_m^\Gamma \in S_0^\Gamma,\ m = \overline{1, M^\Gamma})$$

удовлетворяла (13) или (18) в зависимости от постановки задачи.

Учитывая, что предложенная в [3] и развитая в [11] методика решения задач (13) и (18) позволяет первую из них решить при $u_0(s)$, $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^\Gamma(s)$, определенных соотношениями (21), а вторую — при $u_0(s)$, $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^\Gamma(s)$, представленных согласно (20) и (21), проблему решения задач (13) и (18), а следовательно, и проблему построения вектор-функции $u(s)$ сведем к решению задач

$$\Phi_1 \to \min_{\overline{f}}, \tag{22}$$

$$\Phi_2 \to \min_{\overline{f}}, \tag{23}$$

$$\Phi_2 \to \min_{\overline{f}(s)}, \tag{24}$$

где

$$\overline{f} = \mathrm{col}(\overline{f}_0, \overline{f}^+, \overline{f}^-, \overline{f}^\Gamma),$$

$$\overline{f}(s) = \mathrm{col}(f_0(s), f^+(s), f^-(s), f^\Gamma(s))$$

при

$$\bar{f}_0 = \mathrm{col}(f_{0m}, m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{f}^+ = \mathrm{col}(f_m^+, m = \overline{1, M^+}),$$

$$\bar{f}^- = \mathrm{col}(f_m^-, m = \overline{1, M^-}),$$

$$\bar{f}^\Gamma = \mathrm{col}(f_m^\Gamma, m = \overline{1, M^\Gamma}).$$

Заметим, что построенная согласно (19) вектор-функция $u(s)$ в силу свойств передаточной матричной функции $G(s-s')$, которые вытекают из определения (2) последней, будет удовлетворять [3, 11] уравнению (1) при любых решениях задач (22)–(24). Согласование построенной таким образом функции $u(s)$ с наблюдениями (9)–(12) и (14)–(17) будет определяться точностью решения задач (22)–(24).

Начально-краевые задачи динамики толстых упругих плит

С учетом сказанного выше более полно остановимся на вопросах решения задачи (22) по построению вектора $\bar{f}$, согласно (21) моделирующего влияние заданного соотношениями (9)–(12) начально-краевого состояния динамической системы (1).

Будем исходить из того, что согласно (22) определяется критерий решения системы функциональных уравнений (9)–(12), дополненной соотношениями (19), (21).

Обозначая

$$\bar{U}(s) = \mathrm{col}((U_0(\xi), \xi \in S_0, t = 0), (U^+(s), s \in S_0^+), (U^-(s), s \in S_0^-), (U^\Gamma(s), s \in S_0^\Gamma)),$$

$$A(s) = \mathrm{col}(L_G^0(\xi), L_G^+(s), L_G^-(s), L_G^\Gamma(s)),$$

при

$$U_0(\xi) = \mathrm{col}((U_r^0(\xi) - L_r^0(\partial_t) u_\infty(s))\big|_{\substack{t=0\\ \xi\in S_0}}, \ r = \overline{1, R_0}) \ (\xi \in S_0),$$

$$U^+(s) = \mathrm{col}((U_\rho^+(s) - L_\rho^+(\partial_\xi) u_\infty(s))\big|_{s\in S_0^+}, \ \rho = \overline{1, R_+}) \ (s \in S_0^+),$$

$$U^-(s) = \mathrm{col}((U_\rho^-(s) - L_\rho^-(\partial_\xi) u_\infty(s))\big|_{s\in S_0^-}, \ \rho = \overline{1, R_-}) \ (s \in S_0^-),$$

$$U^\Gamma(s) = \mathrm{col}((U_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u_\infty(s))\big|_{s\in S_0^\Gamma}, \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}) \ (s \in S_0^\Gamma),$$

$$L_G^0(\xi) = \mathrm{col}(L_r^0(\partial_t) \bar{G}(s)\big|_{\substack{t=0\\ \xi\in S_0}}, \ r = \overline{1, R_0}) \ (\xi \in S_0),$$

$$L_G^+(s) = \mathrm{col}(L_\rho^+(\partial_\xi) \bar{G}(s)\big|_{s\in S_0^+}, \ \rho = \overline{1, R_+}) \ (s \in S_0^+),$$

$$L_G^-(s) = \mathrm{col}(L_\rho^-(\partial_\xi) \bar{G}(s)\big|_{s\in S_0^-}, \ \rho = \overline{1, R_-}) \ (s \in S_0^-),$$

$$L_G^\Gamma(s) = \mathrm{col}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) \bar{G}(s)\big|_{s\in S_0^\Gamma}, \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}) \ (s \in S_0^+),$$

$$\bar{G}(s) = \mathrm{str}(\bar{G}^0(s), \bar{G}^+(s), \bar{G}^-(s), \bar{G}^\Gamma(s)),$$

$$\bar{G}^0(s) = \mathrm{str}\,(G(s - s_m^0),\ m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{G}^+(s) = \mathrm{str}\,(G(s - s_m^+),\ m = \overline{1, M^+}),$$

$$\bar{G}^-(s) = \mathrm{str}\,(G(s - s_m^-),\ m = \overline{1, M^-}),$$

$$\bar{G}^\Gamma(s) = \mathrm{str}\,(G(s - s_m^\Gamma),\ m = \overline{1, M^\Gamma}),$$

где $\bar{f}$, s_m^0 $(m = \overline{1, M_0})$, s_m^+ $(m = \overline{1, M^+})$, s_m^- $(m = \overline{1, M^-})$, s_m^Γ $(m = \overline{1, M^\Gamma})$ определены выше, систему запишем в виде

$$A(s)\bar{f} = \bar{U}(s). \tag{25}$$

Решением системы (25), таким что

$$\int\limits_{(\cdot)} \left\| A(s)\bar{f} - \bar{U}(s) \right\|^2 ds \to \min_{\bar{f}}$$

(здесь и далее $(\cdot)$ — интегрирование по области определения подынтегральной функции), будет [11]

$$\bar{f} = P_2^* A_U + \bar{v} - P_2^* P_2 \bar{v}, \tag{26}$$

где $\bar{v} = \mathrm{col}\,(v_0, v^+, v^-, v^\Gamma)$ — произвольный скалярный вектор размерности $3M_0 + 3M^+ + 3M^- + 3M^\Gamma$, тождественно равный нулю при $\det P_2 > 0$; знаком * обозначена операция псевдообращения матрицы

$$P_2 = \int\limits_{S_0} [L_G^0(\xi)]^{\mathrm{T}} L_G^0(\xi) d\xi + \int\limits_{S_0^+} [L_G^+(s)]^{\mathrm{T}} L_G^+(s) ds +$$
$$+ \int\limits_{S_0^-} [L_G^-(s)]^{\mathrm{T}} L_G^-(s) ds + \int\limits_{S_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} L_G^\Gamma(s) ds,$$

$$A_U = \int\limits_{S_0} [L_G^0(\xi)]^{\mathrm{T}} U_0(\xi) d\xi + \int\limits_{S_0^+} [L_G^+(s)]^{\mathrm{T}} U^+(s) ds +$$
$$+ \int\limits_{S_0^-} [L_G^-(s)]^{\mathrm{T}} U^-(s) ds + \int\limits_{S_0^\Gamma} [L_G^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} U^\Gamma(s) ds.$$

Из соотношения (26) при $\mathrm{col}\,(P_2^0, P_2^+, P_2^-, P_2^\Gamma) = P_2^*$ находим

$$\begin{aligned}
\bar{f}_0 &= P_2^0 A_U + v_0 - P_2^0 P_2 \bar{v},\\
\bar{f}^+ &= P_2^+ A_U + v^+ - P_2^+ P_2 \bar{v},\\
\bar{f}^- &= P_2^- A_U + v^- - P_2^- P_2 \bar{v},\\
\bar{f}^\Gamma &= P_2^\Gamma A_U + v^\Gamma - P_2^\Gamma P_2 \bar{v}.
\end{aligned} \tag{27}$$

С учетом (27) согласно (19), (21) определим и искомую согласно (13) вектор-функцию $u(s)$ состояния точек упругой плиты, состояние гранично-торцевых поверхностей которой наблюдается согласно (9)–(12). Найденная таким образом вектор-функция $u(s)$, точно удовлетворяя [11] уравнению (1) динамики плиты, с наблюдениям (9)–(12) за ней согласуется с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi_1 = \min_{\overline{f}} \Phi_1 = \int_{S_0} [U_0(\xi)]^{\mathrm{T}} U_0(\xi) d\xi + \int_{S_0^+} [U^+(s)]^{\mathrm{T}} U^+(s) ds +$$

$$+ \int_{S_0^-} [U^-(s)]^{\mathrm{T}} U^-(s) ds + \int_{S_0^\Gamma} [U^\Gamma(s)]^{\mathrm{T}} U^\Gamma(s) ds - A_U^{\mathrm{T}} P_2^* A_U .$$

Динамика дискретно наблюдаемых толстых упругих плит

Остановимся на решении задач построения вектор-функции $u(s)$ состояния рассматриваемой здесь толстой упругой плиты $S_0(\xi)$ для случая, когда начально-краевые наблюдения за ее объемно-поверхностным состоянием известны не как непрерывно определенные равенства (9)–(12), а как дискретные, определенные соотношениями (14)–(17). При этом рассмотрим два случая математического моделирования этих наблюдений: как и выше, вектором $\overline{f} = \mathrm{col}(\overline{f}_0, \overline{f}^+, \overline{f}^-, \overline{f}^\Gamma)$ значений моделирующих функций $f_0(s)$ $(s \in S_0 \times (-\infty, 0])$, $f^+(s)$ $(s \in S_0^+)$, $f^-(s)$ $(s \in S_0^-)$, $f^\Gamma(s)$ $(s \in S_0^\Gamma)$ и самими функциями.

Будем исходить из того, что неизвестные моделирующие факторы $\overline{f}$ и $\overline{f}(s) = \mathrm{col}(f_0(s), f^+(s), f^-(s), f^\Gamma(s))$ определяются решениями задач (23), (24).

Рассматривая (23), (24) как критерий решения уравнений (14)–(17), последние запишем соответственно в виде

$$A\overline{f} = U, \tag{28}$$

$$\int_{(\cdot)} A(s)\overline{f}(s)\, ds = U. \tag{29}$$

Здесь

$$U = \mathrm{col}(U_0, U^+, U^-, U^\Gamma),$$

$$A = \mathrm{col}(L_G^0, L_G^+, L_G^-, L_G^\Gamma),$$

$$A(s) = \mathrm{str}(A_0(s), A^+(s), A^-(s), A^\Gamma(s))$$

при

$$U_0 = \mathrm{col}((U_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t) u_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ \xi=\xi_l^0 \in S_0}}, \ r = \overline{1, R_0}), \ l = \overline{1, L_0}),$$

$$U^+ = \mathrm{col}((U_{\rho l}^+ - L_\rho^+(\partial_\xi) u_\infty(s)\Big|_{s=s_l^+ \in S_0^+}, \ \rho = \overline{1, R_+}), l = \overline{1, L_+}),$$

$$U^- = \mathrm{col}((U_{\rho l}^- - L_\rho^-(\partial_\xi) u_\infty(s)\Big|_{s=s_l^- \in S_0^-}, \ \rho = \overline{1, R_-}), \ l = \overline{1, L_-}),$$

$$U^\Gamma = \mathrm{col}(U_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma \in S_0^\Gamma}, \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}),$$

$$L_G^0 = \mathrm{col}\,((L_r^0(\partial_t)\,\bar{G}(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}},\ r=\overline{1, R_0}),\, l=\overline{1, L_0}),$$

$$L_G^+ = \mathrm{col}\,((L_\rho^+(\partial_\xi)\bar{G}(s)\Big|_{s=s_l^+\in S_0^+},\ \rho=\overline{1, R_+}),\, l=\overline{1, L_+}),$$

$$L_G^- = \mathrm{col}\,((L_\rho^-(\partial_\xi)\,\bar{G}(s)\Big|_{s=s_l^-\in S_0^-},\ \rho=\overline{1, R_-}),\, l=\overline{1, L_-}),$$

$$L_G^\Gamma = \mathrm{col}\,((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\bar{G}(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in S_0^\Gamma},\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),\, l=\overline{1, L_\Gamma}),$$

$$\begin{aligned}
A_0(s') = \mathrm{col}\,(&((L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}},\ r=\overline{1, R_0}),\, l=\overline{1, L_0}),\\
&((L_\rho^+(\partial_\xi)G(s-s')\Big|_{s=s_l^+\in S_0^+},\ \rho=\overline{1, R_+}),\, l=\overline{1, L_+}),\\
&((L_\rho^-(\partial_\xi)G(s-s')\Big|_{s=s_l^-\in S_0^-},\ \rho=\overline{1, R_-}),\, l=\overline{1, L_-}),\\
&((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma\in S_0^\Gamma},\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),\, l=\overline{1, L_\Gamma}))\quad (s'\in S_0\times(-\infty, 0]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^+(s') = \mathrm{col}\,(&((L_r^0(\partial_t)G(s_l^0-s'),\ r=\overline{1, R_0})\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}},\ l=\overline{1, L_0}),\\
&((L_\rho^+(\partial_\xi)G(s_l^+-s'),\ \rho=\overline{1, R_+})\Big|_{s=s_l^+\in S_0^+},\ l=\overline{1, L_+}),\\
&((L_\rho^-(\partial_\xi)G(s_l^--s'),\ \rho=\overline{1, R_-})\Big|_{s=s_l^-\in S_0^-},\ l=\overline{1, L_-}),\\
&((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s_l^\Gamma-s'),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma})\Big|_{s=s_l^\Gamma\in S_0^\Gamma},\ l=\overline{1, L_\Gamma}))\quad (s'\in S_0^+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^-(s') = \mathrm{col}\,(&((L_r^0(\partial_t)G(s-s'),\ r=\overline{1, R_0})\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}},\ l=\overline{1, L_0}),\\
&((L_\rho^+(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_+})\Big|_{s=s_0^+\in S_0^+},\ l=\overline{1, L_+}),\\
&((L_\rho^-(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_-})\Big|_{s=s_0^-\in S_0^-},\ l=\overline{1, L_-}),\\
&((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma})\Big|_{s=s_0^\Gamma\in S_0^\Gamma},\ l=\overline{1, L_\Gamma}))\quad (s'\in S_0^-),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^\Gamma(s') = \mathrm{col}\,(&((L_r^0(\partial_t)G(s-s'),\ r=\overline{1, R_0})\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}},\ l=\overline{1, L_0}),\\
&((L_\rho^+(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_+})\Big|_{s=s_0^+\in S_0^+},\ l=\overline{1, L_+}),\\
&((L_\rho^-(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_-})\Big|_{s=s_0^-\in S_0^-},\ l=\overline{1, L_-}),\\
&((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s'),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma})\Big|_{s=s_0^\Gamma\in S_0^\Gamma},\ l=\overline{1, L_\Gamma}))\quad (s'\in S_0^\Gamma).
\end{aligned}$$

ISSN 0572-2691

Решением уравнения (28) таким, что

$$\left\| A\overline{f} - U \right\|^2 \to \min_{\overline{f}}, \tag{30}$$

является [3, 11] вектор

$$\overline{f} = (\overline{f}_0, \overline{f}^+, \overline{f}^-, \overline{f}^\Gamma) = A^{\mathrm{T}} P_1^* U + \overline{v} - A^{\mathrm{T}} P_1^* \overline{v} \tag{31}$$

при $P_1 = AA^{\mathrm{T}}$ и произвольном $3(M_0 + M^+ + M^- + M^\Gamma)$-мерном векторе

$$\overline{v} = \mathrm{col}\,(v_0 \in R^{M_0}, v^+ \in R^{M^+}, v^- \in R^{M^-}, v^\Gamma \in R^{M^\Gamma}).$$

Из (31) находим

$$\overline{f}_0 = A_0^{\mathrm{T}} P_1^* (U - A\overline{v}) + v_0,$$

$$\overline{f}^+ = A_+^{\mathrm{T}} P_1^* (U - A\overline{v}) + v^+,$$

$$\overline{f}^- = A_-^{\mathrm{T}} P_1^* (U - A\overline{v}) + v^-,$$

$$\overline{f}^\Gamma = A_\Gamma^{\mathrm{T}} P_1^* (U - A\overline{v}) + v^\Gamma,$$

где при определенных выше $\overline{G}^0(s)$, $\overline{G}^+(s)$, $\overline{G}^-(s)$, $\overline{G}^\Gamma(s)$

$$A_0 =$$

$$= \mathrm{col}\,(((L_r^0(\partial_t)\overline{G}^0(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}}, r=\overline{1,R_0}), l=\overline{1,L_0}), ((L_\rho^+(\partial_\xi)\overline{G}^0(s)\Big|_{s=s_l^+}, \rho=\overline{1,R_+}), l=\overline{1,L_+}),$$

$$((L_\rho^-(\partial_\xi)\overline{G}^0(s)\Big|_{s=s_l^-}, \rho=\overline{1,R_-}), l=\overline{1,L_-}), ((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\overline{G}^0(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho=\overline{1,R_\Gamma}), l=\overline{1,L_\Gamma}))),$$

$$A_+ =$$

$$= \mathrm{col}\,(((L_r^0(\partial_t)\overline{G}^+(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}}, r=\overline{1,R_0}), l=\overline{1,L_0}), ((L_\rho^+(\partial_\xi)\overline{G}^+(s)\Big|_{s=s_l^+}, \rho=\overline{1,R_+}), l=\overline{1,L_+}),$$

$$((L_\rho^-(\partial_\xi)\overline{G}^+(s)\Big|_{s=s_l^-}, \rho=\overline{1,R_-}), l=\overline{1,L_-}), ((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\overline{G}^+(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho=\overline{1,R_\Gamma}), l=\overline{1,L_\Gamma}))),$$

$$A_- =$$

$$= \mathrm{col}\,((L_r^0(\partial_t)\overline{G}^-(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}}, r=\overline{1,R_0}, l=\overline{1,L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\overline{G}^-(s)\Big|_{s=s_l^+}, \rho=\overline{1,R_+}, l=\overline{1,L_+}),$$

$$(L_\rho^-(\partial_\xi)\overline{G}^-(s)\Big|_{s=s_l^-}, \rho=\overline{1,R_-}, l=\overline{1,L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\overline{G}^-(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho=\overline{1,R_\Gamma}, l=\overline{1,L_\Gamma}))),$$

$$A_\Gamma =$$

$$= \mathrm{col}\,((L_r^0(\partial_t)\overline{G}^\Gamma(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=\xi_l^0\in S_0}}, r=\overline{1,R_0}, l=\overline{1,L_0}), (L_\rho^+(\partial_\xi)\overline{G}^\Gamma(s)\Big|_{s=s_l^+}, \rho=\overline{1,R_+}, l=\overline{1,L_+}),$$

$$(L_\rho^-(\partial_\xi)\overline{G}^\Gamma(s)\Big|_{s=s_l^-}, \rho=\overline{1,R_-}, l=\overline{1,L_-}), (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)\overline{G}^\Gamma(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho=\overline{1,R_\Gamma}, l=\overline{1,L_\Gamma}))),$$

а $\mathrm{str}\,(A_0, A_+, A_-, A_\Gamma) = A$.

При этом если $\det(A^{\mathrm{T}}A) > 0,$ то вектор $\overline{f}$ определяется однозначно ($\overline{v} \equiv 0$) и $\overline{f} = A^{\mathrm{T}} P_1^{*} \overline{v}.$ Точность решения задачи (28), (30), а соответственно и (14)–(17) с критерием (23), определяется величиной [3, 11]

$$\varepsilon_{\overline{f}}^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_{\overline{f}} \Phi_2 = U^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{*} U.$$

Решением системы (29) таким, что

$$\left\| \int_{(\cdot)} A(s)\overline{f}(s)ds - U \right\|^2 \to \min_{\overline{f}(s)},$$

будет [3, 11] вектор-функция

$$\overline{f}(s) = A^{\mathrm{T}}(s)P^{*}U + \overline{v}(s) - A^{\mathrm{T}}(s)P^{*}A_v, \tag{32}$$

в которой

$$P = \int_{S_0\times(-\infty,0]} [A_0(s)]^{\mathrm{T}} A_0(s)ds + \int_{S_0^{+}} [A^{+}(s)]^{\mathrm{T}} A^{+}(s)ds +$$

$$+ \int_{S_0^{-}} [A^{-}(s)]^{\mathrm{T}} A^{-}(s)ds + \int_{S_0^{\Gamma}} [A^{\Gamma}(s)]^{\mathrm{T}} A^{\Gamma}(s)ds,$$

$$A_v = \int_{S_0\times(-\infty,0]} [A_0(s)]^{\mathrm{T}} v_0(s)ds + \int_{S_0^{+}} [A^{+}(s)]^{\mathrm{T}} v^{+}(s)ds +$$

$$+ \int_{S_0^{-}} [A^{-}(s)]^{\mathrm{T}} v^{-}(s)ds + \int_{S_0^{\Gamma}} [A^{\Gamma}(s)]^{\mathrm{T}} v^{\Gamma}(s)ds,$$

$$\overline{v}(s) = \mathrm{col}((v_0(s), s\in S_0\times(-\infty,0]), (v^{+}(s), s\in S_0^{+}), (v^{-}(s), s\in S_0^{-}), (v^{\Gamma}(s), s\in S_0^{\Gamma})),$$

при $v_0(s), v^{+}(s), v^{-}(s), v^{\Gamma}(s)$ — произвольных интегрируемых в области изменения своих аргументов трехмерных вектор-функциях. Решение (32) будет единственным и равным $\overline{f}(s) = A^{\mathrm{T}}(s)P^{*}U,$ если $\lim_{N\to\infty} \det[A^{\mathrm{T}}(s_i)A(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$ при $s_i\ (i=\overline{1,N}), s_j\ (j=\overline{1,N}),$ выбранных в соответствии с областью определения аргументов матричной функции $A(s)$.

Точность решения задачи (28), (30), как и точность, с которой найденная с учетом (32) согласно (19), (20) вектор-функция $u(s),$ удовлетворяя уравнению (1), согласуется с начально-краевыми внешнединамичкскими наблюдениями (14)–(17) за рассматриваемой плитой, определяется величиной

$$\varepsilon_{\overline{f}(s)}^2 = \min_{u(s)} \Phi_2 = \min_{\overline{f}(s)} \Phi_2 = U^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}} P P^{*} U.$$

Упругий слой и установившаяся динамика плиты

Рассмотрим частные случаи полученного выше решения задачи динамики толстой упругой плиты, которые имеют место при отсутствии наблюдений за начально-краевым состоянием ее внутренних точек и гранично-торцевых поверхностей, а также для плит, начально-торцевые воздействия на динамику которых незначительные и ими можно пренебречь. В последних двух случаях динамику плиты будем считать установившейся, а ее геометрию — неограниченной по пространственным координатам.

Функцию $u(s)$ состояния внутренних точек плиты при этом получим из соотношения (19), рассматриваемого совместно с расшифровками (20) и (21) его составляющих $u_\infty(s)$, $u_0(s)$, $u^+(s)$, $u^-(s)$, $u^\Gamma(s)$, в которых при отсутствии наблюдений $U_r^0(\cdot)$, U_{rl}^0, $U_\rho^+(\cdot), U_{\rho l}^+$, $U_\rho^-(\cdot), U_{\rho l}^-$, $U_\rho^\Gamma(\cdot), U_{\rho l}^\Gamma$ за имеющими место начальными и поверхностно-торцевыми возмущениями будут отсутствовать соответствующие блоки уравнений в (25), (28), (29) с этими наблюдениями справа при имеющих место функциях $f_0(\cdot)$, $f^+(\cdot)$, $f^-(\cdot)$, $f^\Gamma(\cdot)$ и моделирующих их векторах $\overline{f}_0$, $\overline{f}^+$, $\overline{f}^-$, $\overline{f}^\Gamma$. Последнее упростит структуру матрицы A или матричной функции $A(s)$, а тем самым и решений (26), (31), (32) этих уравнений. При распространении полученных решений на исследование установившейся динамики плиты в представлении (19) функции $u(s)$ упругих смещений точек плиты будет отсутствовать составляющая $u_0(s)$, а в разрешающих уравнениях (25), (28), (29) — блоки уравнений с $U_r^0(\xi)$, U_{rl}^0 справа и компоненты $f_0(\cdot)$, f_{0l} в искомых согласно (22)–(24) векторах $\overline{f}(\cdot)$ и $\overline{f}$. Подобные упрощения будут и при распространении полученных выше решений на исследование динамики упругого слоя — в системах уравнений (25), (28), (29) и их решениях (26), (31), (32) будут отсутствовать уравнения, блоки и компоненты векторов, содержащие $Y_\rho^\Gamma(\cdot), Y_{\rho l}^\Gamma$ и $f^\Gamma(\cdot)$, f_l^Γ соответственно.

Эти экстремальные случаи в постановках и решениях задач построения и исследования поля упруго-динамических смещений точек слоя важны для практики, хотя и неподъемные для классических и численных методик их решения.

Заключение

Поставлены и решены сложные задачи эластодинамики трехмерных упругих объектов, ограниченных двумя параллельными плоскостями с произвольной цилиндрической поверхностью между ними. Предполагается, что внутренние точки, а также граничные и торцевые поверхности такого объекта (толстая упругая плита) могут находиться под действием некоторых объемно-массовых и гранично-поверхностных воздействий, которые частично доступны (или недоступны) для измерений.

Предложена методика построения функции состояния внутренних точек плиты, которая, являясь решением трехмерных уравнений Ляме, с информацией о начально-краевом и поверхностном состоянии точек плиты согласуется по среднеквадратическому критерию независимо от количества такой информации и ее качества (непрерывные или дискретно определенные измерения). Рассмотренные задачи практически важны, но математически некорректны по постановкам, поэтому методами классической и численной математики нерешаемы. Учитывая неминуемую многозначность возможных решений, полученные результаты исследуются на точность и однозначность.

Конечные математические решения всех этих непростых задач простые и доступные для практических реализаций, которые базируются на методах линейной алгебры и классических результатах численного интегрирования.

Заслуживают внимания и вырожденные варианты рассмотренных здесь математических задач, которые относятся к исследованию установившейся динамики упругой плиты и плиты, имеющей форму слоя.

В.А. Стоян, С.Д. Волощук

ПРО ТРИВИМІРНІ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ

Розв’язано складні задачі тривимірної теорії пружності для товстих пружних плит з довільною геометрією їх бічної поверхні. Побудовано аналітичні залежності компонент поля пружних динамічних зміщень внутрішніх точок плити від гранично-поверхневих зовнішньо-динамічних збурюючих факторів, визначених неперервними функціями або векторами їх значень. Припускається, що ці збурення мають класично визначений силовий характер або задаються певною кількістю диференціальних перетворень компонент поля динамічних зміщень точок плити. Відсутність кількісних та якісних обмежень на названі перетворення початково-крайові задачі динаміки розглядуваних плит робить некоректними і нерозв’язними методами класичної та обчислювальної математики. Запропоновано методику середньоквадратичного математичного моделювання дискретно та неперервно заданих спостережень за початково-крайовим станом плити системою моделюючих функцій та векторів їх значень. Побудовані при цьому компоненти поля просторово-динамічних зміщень точок плити, точно задовольняючи класичним рівнянням Ляме, з наявною інформацією про початково-крайовий стан її узгоджуються за середньоквадратичним критерієм. Досліджено питання однозначності отриманих розв’язків, проведено оцінку їх точності відносно інформації про зовнішньо-динамічний стан досліджуваної плити. Розлянуто динаміку плити в усталеному режимі, для випадків відсутності інформації про зовнішньо-динамічні впливи на неї та за умов її геометричної виродженості за просторовими координатами. Комп’ютерна реалізація отриманих математичних результатів інженерно проста і може бути легко реалізована відомими методами обчислювальної математики.

Ключові слова: просторово-розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, товсті пружні плити, початково-крайові задачі.

V.A. Stoyan, S.D. Voloshchuk

ON THREE-DIMENSIONAL INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS OF THICK ELASTIC PLATES’ DYNAMICS

Complex problems of three-dimensional elasticity theory for thick elastic plates with arbitrary geometry of their lateral surface are solved. Analytical dependencies of the components of the elastic dynamic displacements’ field of the plate’s inner points from the boundary-surface external-dynamic disturbing factors, defined by continuous functions or their values’ vectors, are constructed. It is assumed, that these disturbances have a classically defined powerful character, or are specified by a certain number of differential transformations of the field’s components of the plate’s dynamic displacement points. The absence of quantitative and qualitative restrictions on the determined transformations of the initial-boundary problems of the considered plates' dynamics makes it incorrect and unsolvable by methods of classical and computational mathematics. The methodology of root-mean square mathematical modeling of discretely and continuously specified observations for the initial-boundary plate's condition by the system of modeling functions and their values' vectors is proposed in the paper. Constructed in this way field's components of spatial-dynamic displacements of the plate's points, precisely satisfying classical Lyame equation, with the available information on its initial-boundary condition, are agreed according to the root-mean square criterion. The problem of the obtained solutions' ambiguity is investigated, their accuracy evaluation in accordance with the information on the external- dynamic condition of the investigated plate is conducted. The plate's dynamics in the particular mode, for cases of information lack on external- dynamic influences on it and under the conditions of its geometric background according to spatial coordinates. The computer realization of the obtained mathematical results is engineeringly simple and can be easily implemented with the help of well-known methods of computational mathematics.

Keywords: Spatially distributed dynamic systems, spatial problems of elasticity theory, thick elastic plates, initial-boundary problems

1. Немиш Ю.Н., Хома Ю.И. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор). *Прикладная механика.* 1991. **27**, № 11. С. 3–27.
2. Стоян В.А. Об алгоритме построения полутрехмерных дифференциальных уравнений эластодинамичных толстых плит. *Прикладная механика.* 1976. **12**, № 7. С. 39–44.
3. Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. Київ : Сталь, 2009. 316 с.
4. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2012. № 4. С. 74–83.
5. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2013. № 1. С. 70–82.
6. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М. : ГОСТЕХИЗДАТ, 1955. 492 с.
7. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 6. С. 58–73.
8. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Часть I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. № 3. С. 70–96.
9. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Часть II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. № 2. С. 117–133.
10. Стоян В.А. О трехмерных интегральных математических моделях динамики толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. № 2. С. 68–77.
11. Стоян В.А. Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем. К. : ВПЦ «Киевский университет», 2019. 318 с.

Получено 18.02.2021