УДК 519.6

Б.Н. Борсук, А.Г. Ханин

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЗИГМУНДА БИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Ключевые слова: интегрально-дифференциальные уравнения, игровые задачи динамики, краевая задача, бигармоническая функция, оператор Лапласа, класс функций Зигмунда.

Введение

На сегодня одна из важнейших и актуальных задач прикладной математики — исследование скорости сходимости линейных методов суммирования рядов Фурье в целях применения полученных результатов к решению определенного вида игровых задач динамики [1–6]. Решение данной задачи связано с именами многих выдающихся математиков: А. Лебега, С.Н. Бернштейна, Б. Надя, А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, С.А. Теляковского, А.В. Ефимова, С.Б. Стечкина, В.К. Дзядыка, А.И. Степанца и др.

Что касается общей теории линейных методов суммирования рядов Фурье [7], то особое место среди последних занимают методы, которые задаются посредством совокупности функций натурального аргумента [8–14]. Примеры таких линейных методов — методы суммирования Абеля–Пуассона [15–17] (или же просто Пуассона [18–20]), Гаусса–Вейерштрасса [21], бигармонического [22–24] и тригармонического [25–27] интегралов Пуассона. Следует отметить, что все перечисленные выше линейные методы суммирования являются решениями соответствующих интегрально-дифференциальных уравнений эллиптического типа. Это, несомненно, еще более подчеркивает тесную взаимосвязь скорости сходимости решений указанных выше уравнений с теорией игровых задач динамики.

При получении оценок для верхних граней отклонений функций определенного класса от операторов, построенных посредством совокупности функций натурального аргумента, возникают некоторые трудности, в отличие от операторов, заданных с помощью треугольных λ-методов суммирования рядов Фурье (Фейера, Валле Пуссена, Рисса, Рогозинского, Стеклова, Фавара). Эти трудности, наверное, связаны с тем, что методика исследований аппроксимативных свойств первого типа операторов еще мало разработана и не усовершенствована, в отличие от методики изучения свойств и характеристик треугольных λ-методов суммирования рядов Фурье [7]. Таким образом, основной метод исследований в данной работе — изучение интегральных представлений отклонений функций класса Зигмунда от их бигармонических интегралов Пуассона, аппроксимативные свойства которого на классах функций Зигмунда (для случая $1<\alpha<2$) еще не изучены.

Постановка задачи и некоторые исторические сведения

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма задается с помощью равенства

$$\| f \|_C = \max_{\theta} | f(\theta) | . \tag{1}$$

Обозначим $U(\rho;\, f;\theta)$ бигармоническую функцию в круге радиуса r_0 с центром в начале координат, т.е. указанная функция $U(\rho;\, f;\theta)$ является решением уравнения

$$\Delta(\Delta U(\rho; f;\theta)) = 0, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа в полярных координатах.

Рассмотрим уравнение (2) с заданными граничными условиями:

$$U(\rho;\, f;\theta)\big|_{\rho=r_0} = f(\theta), \quad \left.\frac{U(\rho;\, f;\theta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=r_0} = g(\theta). \tag{3}$$

Будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $\rho = r_0$ граничным условиям (3). Можно показать [28, с. 400], что искомую функцию можно представить в виде суммы

$$U(\rho;\, f;\theta) = (\rho^2 - r_0^2)U_1(\rho;\theta) + U_2(\rho;\theta), \tag{4}$$

где $U_1(\rho;\theta)$ и $U_2(\rho;\theta)$ — гармонические функции. Из граничных условий (3) находим $U_2(\rho;\theta)\big|_{\rho=r_0} = f(\theta)$. Отсюда видно, что функция $U_2(\rho;\theta)$ есть решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлена с помощью бигармонической функции вида

$$U_2(\rho;\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r_0^2-\rho^2)\,f(t)\,dt}{r_0^2 - 2r_0\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}. \tag{5}$$

Из второго граничного условия получаем

$$2r_0U_1(\rho;\theta) + \left.\frac{\partial U_2(\rho;\theta)}{\partial\rho}\right|_{\rho=r_0} = g(\theta).$$

При использовании непосредственного дифференцирования нетрудно будет убедиться, что функция

$$2r_0\,U_1(\rho;\theta) + \frac{\rho}{r_0}\frac{\partial U_2(\rho;\theta)}{\partial\rho}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена самим интегралом Пуассона

$$2r_0\,U_1(\rho;\theta) + \frac{\rho}{r_0}\frac{\partial U_2(\rho;\theta)}{\partial\rho} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r_0^2-\rho^2)\,g(t)\,dt}{r_0^2 - 2r_0\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}. \tag{6}$$

Продифференцировав теперь обе части равенства (5) по параметру ρ и подставив значение $\dfrac{\partial U_2(\rho;\theta)}{\partial\rho}$ в формулу (6), найдем $U_1(\rho;\theta)$.

Далее подставляя в формулу (3) найденные значения функций $U_1(\rho;\theta)$ и $U_2(\rho;\theta)$, получим, что

$$U(\rho;\, f;\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi r_0}(\rho - r_0^2)^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)(r_0-\rho\cos(t-\theta))\,dt}{(r_0^2 - 2r_0\rho\cos(t-\theta)+\rho^2)^2} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(t)\,dt}{r_0^2 - 2r_0\rho\cos(t-\theta)+\rho^2}\right). \tag{7}$$

 ISSN 0572-2691

Если рассматривать более частный случай, а именно случай единичного круга $(r_0 = 1)$ и следующие краевые условия:

$$U(\rho;\, f;\, \theta)\Big|_{\rho=1} = f(\theta), \quad \frac{\partial u(\rho;\, f;\, \theta)}{\partial \rho} = 0, \tag{8}$$

то, как следует из равенства (7), решением краевых задач (2) и (8) будет величина

$$B_\rho(f;\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\theta)\frac{(1-\rho^2)(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2}\,dt, \quad 0<\rho<1. \tag{9}$$

Выражение в правой части (9) принято называть бигармоническим интегралом Пуассона [29, 30], а саму величину

$$\frac{(1-\rho^2)(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2} := K(\rho;\, t) \tag{10}$$

— ядром [31] бигармонического интеграла Пуассона.

Перейдем к определению классов непрерывных 2π-периодических функций $Z^\alpha\,(0<\alpha\le 2),$ которые будем использовать в данной роботе.

А именно обозначим $Z^\alpha\,(0<\alpha\le 2)$ класс непрерывных 2π-периодических функций $f(\theta),$ удовлетворяющих неравенству

$$\left|\, f(\theta+t) - 2f(\theta) + f(\theta-t)\right| \le 2\left|t\right|^\alpha, \tag{11}$$

где $-\pi\le\theta\le\pi,\ \left|t\right|\le 2\pi.$

Основная цель данной работы — изучение величины

$$\mathcal{E}(Z^\alpha;\, B_\rho(f;\theta))_C = \sup_{f\in Z^\alpha}\left\| B_\rho(f;\theta) - f(\theta)\right\|_C. \tag{12}$$

Если в явном виде будет найдена функция $\varphi(\rho)=\varphi(Z^\alpha;\rho)$, такая, что при $\rho\to 1-0$

$$\mathcal{E}(Z^\alpha;\, B_\rho(f;\theta))_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [7, с. 198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для данного класса Z^α и бигармонического интеграла Пуассона $B_\rho(f;\theta)$ в метрике пространства C (см.(1)).

Оценка приближения функций классов Z^α бигармоническими интегралами Пуассона

Следует отметить, что имеется ряд работ [29–35], посвященных изучению аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона для различных классов периодических и непериодических дифференцируемых функций. Но, к большому сожалению, задача Колмогорова–Никольского для величины (12) в случае $1<\alpha<2$ до сих пор еще не решена.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если $1<\alpha<2,$ то для всех $0<\rho<1$ имеет место оценка:

$$\mathcal{E}(Z^\alpha;\, B_\rho(f;\theta))_C =$$

$$=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha-1)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)+$$

$$+O\left((1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)\right). \quad (13)$$

Доказательство. Согласно работе [30], ядро бигармонического интеграла Пуассона (10) можно представить в виде

$$K(\rho,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos kt. \quad (14)$$

Тогда, используя представление (14), легко показать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(\rho,t)\,dt=1. \quad (15)$$

Следовательно, из (9) и (15) получим, что

$$B_\rho(f;\theta)-f(\theta)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta+t)-f(\theta))K(\rho,t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta+t)-2f(\theta)+f(\theta-t))K(\rho,t)dt. \quad (16)$$

Подставляя (16) в правую часть (12) и используя при этом определение метрики (1), в пространстве C будем иметь, что

$$\mathcal{E}(Z^\alpha;B_\rho(f;\theta))_C=\sup_{f\in Z^\alpha}\max_{-\pi\le\theta\le\pi}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta+t)-2f(\theta)+f(\theta-t))K(\rho,t)\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\sup_{f\in Z^\alpha}\max_{-\pi\le\theta\le\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta+t)-2f(\theta)+f(\theta-t)||K(\rho,t)|dt.$$

Далее, используя оценку (11) и тот факт, что ядро $K(\rho,t)$ для всех $t\in[-\pi,\pi]$ является положительным, из последнего соотношения имеем

$$\mathcal{E}(Z^\alpha;B_\rho(f;\theta))_C\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha K(\rho,t)\,dt, \quad (17)$$

где $K(\rho,t)$ определено уже с помощью соотношения (14).

Перейдем к оценке интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos kt\right)dt. \quad (18)$$

Для этого прежде отметим, что имеет место очевидное равенство

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\rho^k\right)\cos kt=$$

 ISSN 0572-2691

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k - \left(1-\frac{k+1}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^{k+1} \right) \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t =$$

$$= (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t. \qquad (19)$$

Умножив левую и правую части соотношения (19) на величину $\frac{1}{\pi}|t|^\alpha$ и проинтегрировав почленно обе части полученного равенства, согласно обозначению (14), будем иметь, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^\alpha K(\rho, t)\, dt = \frac{1-\rho}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^\alpha \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right) dt =$$

$$= \frac{1-\rho}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right) \int_0^{\pi} t^\alpha \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt. \qquad (20)$$

Далее, следуя [36], оценим интеграл в правой части соотношения (20), а именно:

$$\int_0^{\pi} t^\alpha \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} - t^{\alpha-1} \right) \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt + \int_0^{\pi} t^{\alpha-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt. \qquad (21)$$

Для оценки первого интеграла в правой части равенства (21) заметим, что функция $\frac{t^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} - t^{\alpha-1}$ (для всех $1<\alpha<2$) имеет суммируемую вторую производную на отрезке $[0, \pi]$, следовательно, в результате двукратного интегрирования частями находим

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} - t^{\alpha-1} \right) \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt = \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \left(\frac{t^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} - t^{\alpha-1} \right)' \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t \Bigg|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^\alpha}{\sin\frac{t}{2}} - t^{\alpha-1} \right)'' \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt = O\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \right). \qquad (22)$$

Теперь аналогично [36] оценим второй интеграл из правой части равенства (21). С этой целью соответственно заменим переменные, а именно:

$$\int_0^{\pi} t^{\alpha-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) t dt =$$

$$=\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\int\limits_{0}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} x^{\alpha-1}\sin x dx=\frac{\alpha-1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\int\limits_{0}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} x^{\alpha-2}\cos x dx=$$

$$=\frac{\alpha-1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha-2}\cos x dx-\frac{\alpha-1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\int\limits_{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\infty} x^{\alpha-2}\cos x dx. \tag{23}$$

Согласно формуле 3.761(9) из [37]

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha-2}\cos x dx=\Gamma(\alpha-1)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}. \tag{24}$$

Далее, применив ко второму слагаемому из правой части (23) двукратное интегрирование частями, находим, что

$$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\int\limits_{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\infty} x^{\alpha-2}\cos x dx=O\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}}\right). \tag{25}$$

Тогда из (24), (25) и правой части (23) получаем

$$\int\limits_{0}^{\pi} t^{\alpha-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t dt=\Gamma(\alpha-1)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}+O\left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}}\right). \tag{26}$$

Объединяя теперь соотношения (26) и (20), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}K(\rho,t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha-1)\cos\frac{(\alpha-1)\pi}{2}(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^{k}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^{2})-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)+$$

$$+O\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1-\rho)\frac{\rho^{k}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^{2})-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)\right). \tag{27}$$

Таким образом, с помощью соотношения (27) установлена оценка сверху для величины $\mathcal{E}(Z^{\alpha};B_{\rho}(f;\theta))_{C}$.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим функцию $|\sin\theta|^{\alpha}$ и, следуя работе [36], покажем, что для всех $1<\alpha<2$ она будет принадлежать классу Z^{α}, т.е. докажем, что согласно (11)

$$\left||\sin(\theta+t)|^{\alpha}-2|\sin\theta|^{\alpha}+|\sin(\theta-t)|^{\alpha}\right|\le 2|t|^{\alpha}. \tag{28}$$

Очевидно, что для функции $|\sin\theta|^{\alpha}$ имеют место следующие соотношения:

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|^{\alpha}=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right|^{\alpha};\ |\sin(\theta+\pi)|^{\alpha}=|\sin\theta|^{\alpha};\ 0\le|\sin\theta|^{\alpha}\le 1.$$

Именно поэтому для доказательства неравенства (28) достаточно ограничиться значениями $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ и $0\le t\le 1$. Если рассматриваемый промежуток $0\le t\le 1$ разбить, аналогично [36], на две части $[0,t]$ и $\left[t,\frac{\pi}{2}\right]$, то очевидным будет выполнение неравенства (28) на всех концах этих двух промежутков.

Следуя [36], обозначим $Z(\theta)=|\sin(\theta+t)|^{\alpha}-2|\sin\theta|^{\alpha}+|\sin(\theta-t)|^{\alpha}.$

Тогда, продифференцировав функцию $Z(\theta)$, получим, что для всех $0\le t\le$ $\le\theta<\frac{\pi}{2}$

$$Z'(\theta)=\alpha(g(t)-g(0)),$$

где $g(t)=\sin^{\alpha-1}(\theta+h)\cos(\theta+h)+\sin^{\alpha-1}(\theta-t)\cos(\theta-t).$

Поэтому из теоремы Лагранжа о конечных приращениях вытекает, что

$$Z'(\theta)=\alpha\,\mathrm{tg}'(\delta t)=$$
$$=\alpha t((\alpha-1)(\sin^{\alpha-2}(\theta+\delta t)-\sin^{\alpha-2}(\theta-\delta t))-\alpha(\sin^{\alpha}(\theta+\delta t)-\sin^{\alpha}(\theta-\delta t)))<0,$$

где $(0<\delta<1)$. Из последнего соотношения следует, что наибольшего значения функция $|Z(\theta)|$ для всех $\theta\in\left[t,\frac{\pi}{2}\right]$ будет достигать именно на одной из его границ t или $\frac{\pi}{2}$. Таким образом доказана справедливость неравенства (28) для промежутка $\left[t,\frac{\pi}{2}\right]$.

Если $\theta\in[0,t]$, то в этом случае имеем

$$Z(\theta)=\sin^{\alpha}(\theta+t)-2\sin^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}(\theta-t).$$

Рассмотрим случай, когда $Z(\theta)<0$, тогда для всех $\theta\in(0,t)$

$$|Z(\theta)|\le 2\sin^{\alpha}\theta\le 2\sin^{\alpha}t<2t^{\alpha}.$$

И в этом случае справедливость неравенства (28) доказана.

Теперь рассмотрим случай $Z(\theta)>0$. Положив в функции $Z(\theta)$ $t=p\theta(p>1)$, получим, аналогично [36], что

$$\frac{|Z(\theta)|}{t^{\alpha}}=\frac{Z(\theta)}{t^{\alpha}}=\frac{\sin^{\alpha}(p+1)\theta-2\sin^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}(p-1)\theta}{(p\theta)^{\alpha}}.$$

Так как $\sin\beta\theta\le\beta\sin\theta$ при $\beta>1$ и $0\le\beta\theta\le\pi$, более того $|\sin\theta|\le|\theta|$, то

$$\frac{|Z(\theta)|}{t^{\alpha}}=\frac{\sin^{\alpha}(p+1)\theta-2\sin^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}(p-1)\theta}{(p\theta)^{\alpha}}\le\frac{(p+1)^{\alpha}-2+(p-1)^{\alpha}}{p^{\alpha}}\le 2,$$

и тем самым убеждаемся в справедливости неравенства (28) для всех $\theta\in[0,t]$.

Принимая во внимание все вышесказанное, окончательно убеждаемся в справедливости оценки (28).

Для завершения доказательства теоремы заметим, что согласно [36]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t|^{\alpha}K(\rho,t)\,dt=B_{\rho}(|\sin\theta|^{\alpha};0)\le\mathcal{E}(Z^{\alpha};B_{\rho}(f;\theta))\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}K(\rho,t)\,dt. \quad (29)$$

Следовательно, из (29) имеем оценку

$$\mathcal{E}(Z^{\alpha};B(f;\theta))_C=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha}K(\rho,t)\,dt+\frac{\gamma}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|t|^{\alpha}-|\sin t|^{\alpha})K(\rho,t)\,dt, \quad (30)$$

где $-1\le\gamma\le 0$. Так как $0\le|t|^{\alpha}-|\sin t|^{\alpha}\le Ct^2$ для всех $t\in[-\pi,\pi]$ и $1<\alpha<2$ (где C — некоторая постоянная), то согласно (27)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(|t|^{\alpha}-|\sin t|^{\alpha})K(\rho,t)\,dt=O\left((1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)-\frac{1}{2}(1+\rho)\rho\right)\right). \quad (31)$$

Из (29)–(31) следует справедливость равенства (13).

Теорема доказана.

Заключение

В результате проведенных исследований в работе решена задача Колмогорова–Никольского (в терминологии А.И. Степанца) для бигармонического интеграла Пуассона на классах функций Зигмунда Z^{α} для случая $1<\alpha<2$. Доказанная теорема дает возможность оценить скорость сходимости верхней грани отклонения функций класса Зигмунда от их бигармонических интегралов Пуассона в равномерной метрике. Полученные в работе аппроксимативные характеристики бигармонического интеграла Пуассона на классах функций Зигмунда в дальнейшем можно будет использовать при решении некоторых прикладных задач [38, 39].

Б.М. Борсук, О.Г. Ханін

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ЗИГМУНДА БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Роботу присвячено вивченню поведінки верхньої межі відхилення функцій класу Зигмунда від їх бігармонічних інтегралів Пуассона. Дослідження в даному напрямку проводилися і проводяться систематично як вітчизняними, так і зарубіжними вченими. Більшість отриманих результатів відноситься до оцінки відхилень функцій того чи іншого класу від операторів, побудованих за допомогою трикутних λ-методів підсумовування рядів Фур'є (Фейєра, Валле Пуссена, Рісса, Рогозинського, Стєклова, Фавара та ін.). Що стосується результатів відносно лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, заданих за допомогою множини функцій натурального аргументу (Абеля–Пуассона, Гаусса–Вейєрштрасса, бігармонічного та тригармонічного інтегралів Пуассона), то тут успіхи менш помітні. Можливо, це пов'язано з тим, що згадані вище лінійні методи підсумовування рядів Фур'є є розв'язками відповідних інтегрально-диференціальних рівнянь еліптичного типу і тому вимагають більш трудомістких обчислень з метою отримання для них певних оцінок, придатних для їх безпосереднього використання в прикладних цілях. Дослідження, проведені в даній роботі, відносяться до вивчення апроксимативних характеристик лінійних додатних операторів типу Пуассона на класах функцій Зигмунда. Згідно з добре відомими результатами П.П. Коровкіна саме ці додатні лінійні оператори здійснюють найкраще асимптотичне наближення функцій класу Зигмунда. Таким чином, отримана в даній роботі оцінка відхилення функцій класу Зигмунда від їх бігармонічних інтегралів Пуассона (найменш досліджених і найбільш затребуваних серед всіх лінійних додатних операторів) є актуальною з точки зору прикладної математики.

Ключові слова: інтегрально-диференціальні рівняння, ігрові задачі динаміки, крайова задача, бігармонічна функція, оператор Лапласа, клас функцій Зигмунда.

B.N. Borsuk, A.G. Khanin

ON APPROXIMATION OF FUNCTIONS FROM ZYGMUND CLASSES BY BIHARMONIC POISSON INTEGRALS

The paper is devoted to a behavior investigation of the upper bound of deviation of functions from Zygmund classes from their biharmonic Poisson integrals. Systematic research in this direction was conducted by a number of Ukrainian as well as foreign scientists. But most of the known results relate to an estimation of deviations of functions from different classes from operators that were constructed based on triangular λ-methods of the Fourier series summation (Fejer, Valle Poussin, Riesz, Rogozinsky, Steklov, Favard, etc.). Concerning the results relating to linear methods of the Fourier series summation, given by a set of functions of natural argument (Abel-Poisson, Gauss-Weierstrass, biharmonic and threeharmonic Poisson integrals), in this direction the progress was less notable. This may be due to the fact that the above-mentioned linear methods the Fourier series summation are solutions of corresponding integral and differential equations of elliptic type. And, therefore, they require more time-consuming calculations in order to obtain some estimates, that are suitable for a direct use for applied purposes. At the same time, in the present paper we investigate approximative characteristics of linear positive Poisson-type operators on Zygmund classes of functions. According to the well-known results by P.P. Korovkin, these positive linear operators realize the best asymptotic approximation of functions from Zygmund classes. Thus, the estimate obtained in this paper for the deviation of functions from Zygmund classes from their biharmonic Poisson integrals (the least studied and most valuable among all linear positive operators) is relevant from the viewpoint of applied mathematics.

Keywords: integral and differential equations, game problems of dynamics, boundary value problem, biharmonic function, Laplace operator, Zygmund class.

1. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
2. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
3. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
4. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (eds). Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. Boston : Birkhäuser, 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
5. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.

6. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. and Systems Anal.* 2014. **50**, N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
7. Степанец А.И. Методы теории приближения. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
8. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
9. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
10. Zhyhallo K.M. Algorithmization of calculations of the Kolmogorov-Nikol'skii constants for values of approximations of conjugated differentiable functions by generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 10. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i10.50.
11. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/cmp.12.1.138-147.
12. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
13. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
14. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
15. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
16. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
17. Zhyhallo T.V. Approximation in the mean of classes of the functions with fractional derivatives by their Abel-Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 8. P. 58–69. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i8.50.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
19. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
20. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
21. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
24. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.

25. Kal'chuk I.V., Kravets V.I., Hrabova U.Z. Approximation of the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by three-harmonic Poisson integrals. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2020. **246**, N 2. P. 39–50. DOI: 10.1007/s10958-020-04721-4.
26. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^{r}$ by three-harmonic Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2019. **11**, N 2. P. 321–334. DOI: 10.15330/cmp.11.2.321-334.
27. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 735 с.
29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
30. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
32. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
33. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^{\psi}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
34. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. **72**, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
35. Zhyhallo K.M., Zhyhallo T.V. On the approximation of functions from the Hölder class given on a segment by their biharmonic Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2019. **71**, N 7. P. 1043–1051. DOI: 10.1007/s11253-019-01696-7.
36. Баусов Л.И. О приближении функций класса Z_{α} положительными методами суммирования рядов Фурье. *Успехи мат. наук*. 1961. **16**, N 3(99). С.143–149.
37. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
38. Tovkach R., Kharkevych Y., Kal'chuk I. Application of a Fourier Series for an Analysis of a network Signals. *2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2019 – Proceedings.* 2019. P. 107–110. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030488.
39. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Y., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC).* Ukraine : Kyiv, 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239180.

Получено 04.01.2021