

УДК 62.501.52

Л.Т. Мовчан, С.Л. Мовчан

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ D -РАЗБИЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ

Ключевые слова: D -разбиение, граница области устойчивости в пространстве параметров, уравнение границы D -разбиения в плоскости одного и двух параметров.

Введение

Одним из наиболее важных для практики результатов определения устойчивости является построение границы области устойчивости (ГОУ) в пространстве параметров, влияние которых на устойчивость исследуется.

В общем случае определение области устойчивости (ОУ) линейных систем автоматического управления в пространстве параметров осуществляется методом D -разбиения [1, 2].

При определении ГОУ в плоскости одного параметра методом D -разбиения характеристическое уравнение представляют в виде

$$D(s) = L(s) + \nu H(s) = 0, \quad (1)$$

где ν — изменяемый параметр, влияние которого на устойчивость рассматривается,

$$L(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad H(s) = c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_1 s + c_0 \quad \text{при } n \geq k.$$

Тогда уравнение границы области D -разбиения по одному параметру имеет вид

$$D(j\omega) = L(j\omega) + \nu H(j\omega). \quad (2)$$

Если необходимо исследовать влияние двух параметров на устойчивость системы методом D -разбиения, характеристическое уравнение представляют в виде

$$D(s) = F(s) + \mu M(s) + \nu H(s) = 0. \quad (3)$$

Уравнение границы области устойчивости D -разбиения по двум параметрам имеет вид

$$D(j\omega) = F(j\omega) + \mu M(j\omega) + \nu H(j\omega) = 0. \quad (4)$$

Здесь μ и ν — изменяемые параметры, влияние которых на устойчивость рассматривается.

Специфика метода D -разбиения такова, что сначала определяются границы всех областей в плоскости двух параметров с различным количеством корней характеристического уравнения с отрицательной действительной частью, а после этого выделяются границы областей устойчивости [3].

© Л.Т. МОВЧАН, С.Л. МОВЧАН, 2021

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2021, № 4*

Построение всей кривой D -разбиения в плоскости двух параметров осуществляется путем изменения частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, кроме ГОУ, появляются «посторонние кривые» [4] — границы областей, соответствующие одному и тому же числу корней характеристического уравнения, расположенных справа от мнимой оси. Если система имеет высокий порядок, то граница областей устойчивости, особых прямых и «посторонние кривые» переплетаются, что затрудняет выделение действительной ОУ при использовании ЭВМ. Кроме того, процедура «штриховки по Неймарку» и построение особых прямых весьма усложняют машинную реализацию метода D -разбиения.

Практическое значение имеют только кривые D -разбиения, которые являются ГОУ, при положительных значениях параметров системы. Задача определения границ изменения частот, которые определяют такую ОУ, не решена.

Поэтому авторами разработана методика построения ГОУ непрерывных систем в плоскости двух параметров методом D -разбиения, которая исключает определение и построение всей кривой D -разбиения, особых кривых, использование «штриховки по Неймарку», тем самым обеспечивая машинную реализацию задачи построения границы области устойчивости [5, 6].

В отличие от классической задачи построения ОУ методом D -разбиения, где для получения точек кривой D -разбиения изменяют ω от $-\infty$ до $+\infty$, изменим параметр μ от предварительно заданного значения μ_{\min} до значения μ_{\max} ($\mu_{\min} < \mu_{\text{ном}} < \mu_{\max}$), что представляет практический интерес.

Для каждого фиксированного значения параметра μ характеристическое уравнение (3) соответствует уравнению (1). Тогда граница области D -разбиения имеет вид (2), при котором фиксированный параметр μ входит в коэффициенты полинома $L(j\omega)$.

Таким образом, задача построения границы области устойчивости в плоскости двух параметров сводится к задаче определения ГОУ в плоскости одного параметра, исключая построение всей кривой D -разбиения.

В [5, 6] для построения области устойчивости в плоскости одного параметра выражение границы D -разбиения представлено в виде

$$D(j\omega) = (L_1(\omega) + jL_2(\omega)) + \nu(H_1(\omega) + jH_2(\omega)) = 0. \quad (5)$$

Здесь при четных $n = 2m$ и $k = 2r$ (n — порядок полинома $L(s)$, k — порядок полинома $H(s)$) имеем

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= (-1)^m b_n \omega^n + (-1)^{m-1} b_{n-2} \omega^{n-2} + (-1)^{m-2} b_{n-4} \omega^{n-4} + \dots - b_2 \omega^2 + b_0, \\ L_2(\omega) &= (-1)^{m-1} b_{n-1} \omega^{n-1} + (-1)^{m-2} b_{n-3} \omega^{n-3} + (-1)^{m-3} b_{n-5} \omega^{n-5} + \dots - b_3 \omega^3 + b_1 \omega, \quad (6) \\ H_1(\omega) &= (-1)^r c_k \omega^k + (-1)^{r-1} c_{k-2} \omega^{k-2} + (-1)^{r-2} c_{k-4} \omega^{k-4} + \dots - c_2 \omega^2 + c_0, \\ H_2(\omega) &= (-1)^{r-1} c_{k-1} \omega^{k-1} + (-1)^{r-2} c_{k-3} \omega^{k-3} + (-1)^{r-3} c_{k-5} \omega^{k-5} + \dots - c_3 \omega^3 + c_1 \omega, \end{aligned}$$

а при нечетных $n = 2m+1$ и $k = 2r+1$ получаем

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= (-1)^m b_n \omega^{n-1} + (-1)^{m-1} b_{n-2} \omega^{n-3} + \dots + (-1) b_2 \omega^2 + b_0, \\ L_2(\omega) &= (-1)^m b_{n-1} \omega^n + (-1)^{m-1} b_{n-3} \omega^{n-2} + (-1)^{m-2} b_{n-5} \omega^{n-4} + \dots - b_3 \omega^3 + b_1 \omega, \quad (7) \\ H_1(\omega) &= (-1)^r c_k \omega^{k-1} + (-1)^{r-1} c_{k-2} \omega^{k-3} + (-1)^{r-2} c_{k-4} \omega^{k-5} + \dots - c_2 \omega^2 + c_0, \\ H_2(\omega) &= (-1)^r c_{k-1} \omega^k + (-1)^{r-1} c_{k-3} \omega^{k-2} + (-1)^{r-2} c_{k-5} \omega^{k-4} + \dots - c_3 \omega^3 + c_1 \omega. \end{aligned}$$

Тогда из уравнения (5) следует выражение для определения параметра v :

$$v(\omega) = \frac{-L_1(\omega) \cdot H_1(\omega) - L_2(\omega) \cdot H_2(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)} + \\ + j \frac{L_1(\omega) \cdot H_2(\omega) - L_2(\omega) \cdot H_1(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \quad (8)$$

Поскольку параметр v — действительная физическая значимая величина, задачу определения границы области устойчивости методом D -разбиения в плоскости одного параметра сводим к задаче определения интервала устойчивости, которая является интервалом вещественной оси в плоскости параметра v .

Граничные значения интервалов устойчивости соответствуют точкам пересечения кривой D -разбиения с действительной осью $U(\omega)$, поэтому значения частот, которым соответствуют эти граничные значения параметра v , определяются из уравнения

$$V(\omega) = \frac{R_V(\omega)}{Q_V(\omega)} = \frac{L_1(\omega)H_2(\omega) - L_2(\omega)H_1(\omega)}{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)} = 0 \quad (9)$$

или

$$R_V(\omega) = L_1(\omega)H_2(\omega) - L_2(\omega)H_1(\omega) = 0. \quad (10)$$

Тогда граничные значения параметра v вычисляются из выражений

$$v(\omega_k) = U(\omega_k) = \frac{-L_1(\omega_k)H_1(\omega_k) - L_2(\omega_k)H_2(\omega_k)}{H_1^2(\omega_k) + H_2^2(\omega_k)}, \\ v(\omega_{k+1}) = U(\omega_{k+1}) = \frac{-L_1(\omega_{k+1})H_1(\omega_{k+1}) - L_2(\omega_{k+1})H_2(\omega_{k+1})}{H_1^2(\omega_{k+1}) + H_2^2(\omega_{k+1})}. \quad (11)$$

В общем случае количество точек пересечения кривой D -разбиения с действительной осью зависит от порядка уравнения (9), т.е. степени многочленов $L(s)$, $H(s)$, и определяет количество интервалов устойчивости.

Максимальное число точек пересечения и соответственно максимальное число отрезков устойчивости достигается тогда, когда уравнение (9) не имеет комплексных и кратных действительных корней, т.е. все корни являются простыми.

В [7] оценивается максимальное количество отрезков устойчивости границы D -разбиения по одному параметру. Согласно теореме [7], если $L(s)$ и $H(s)$ — полиномы степени n с действительными коэффициентами, то полином $D(s) = L(s) + vH(s)$,

$v \in R$, имеет не более $(n+1)$ отрезков D -разбиения по v и не более $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ отрезков устойчивости.

Очевидно, что на основании теоремы можно определить максимальное число отрезков устойчивости только для частного случая, когда порядок полиномов $L(s)$ и $H(s)$ одинаковый и четный.

Постановка задачи

В связи с изложенным возникает необходимость оценки максимального числа и условия достижения этого числа интервалов устойчивости в плоскости одного параметра для общего случая, когда полиномы $L(s)$ и $H(s)$ имеют четный (нечетный) и разный порядок.

Решение поставленной задачи

В общем случае построение кривой D -разбиения в плоскости одного параметра при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ приводит к следующим ее видам, изображенным на рис. 1 и 2.

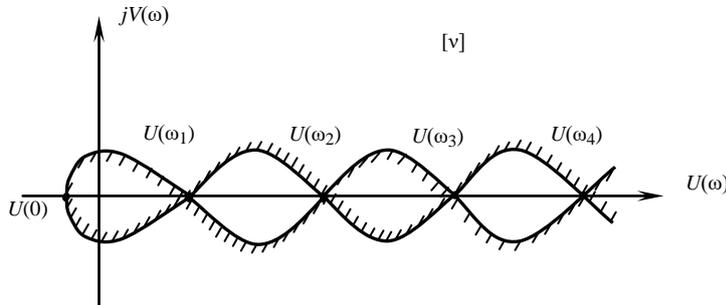


Рис. 1

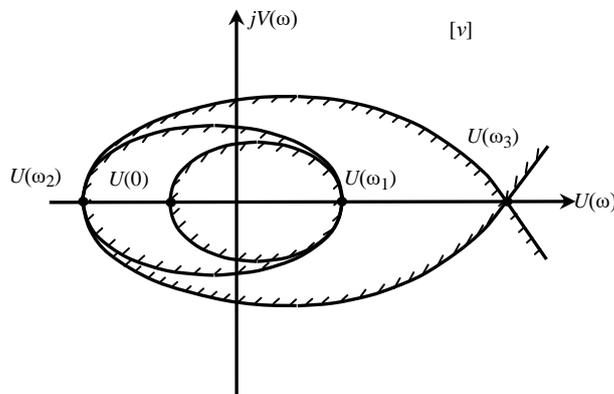


Рис. 2

Для границы области D -разбиения, которая показана на рис. 1, выполняются неравенства

$$\omega_0 = 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1} < \omega_n,$$

$$U(\omega_0) < U(\omega_1) < U(\omega_2) < \dots < U(\omega_{n-1}) < U(\omega_n). \quad (12)$$

Для кривой D -разбиения на рис. 2 —

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1} < \omega_n,$$

$$U(\omega_0) < U(\omega_1) > U(\omega_2) < \dots > U(\omega_{n-1}) < U(\omega_n). \quad (13)$$

Здесь $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n$ и $U(\omega_0) = v(\omega_0), U(\omega_1) = v(\omega_1), U(\omega_2) = v(\omega_2), \dots, U(\omega_{n-1}) = v(\omega_{n-1}), U(\omega_n) = v(\omega_n)$ — соответственно значения частот и параметра v в точках пересечения кривой D -разбиения с действительной осью $U(\omega)$ в плоскости параметра v .

Область устойчивости выделяют путем реализации «штриховки Неймарка» для отсеивания областей с неадекватным количеством корней характеристического уравнения, расположенных в левой плоскости.

Очевидно, что в случае применения классического метода D -разбиения результат представляется графически, что усложняет определение точной ГОУ в аналитической форме. Претендентом на интервал устойчивости является отрезок, расположенный в области, внутрь которой направлена «штриховка по Неймарку».

По определению границу D -разбиения штрихуют слева при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому интервал $(U(\omega_{k-1}), U(\omega_k))$ является интервалом устойчивости, если кривая D -разбиения при изменении ω от ω_{k-1} до ω_k расположена ниже оси $U(\omega)$, т.е. $v(\omega) < 0$.

Для того чтобы выяснить, как перемещаются корни полинома при переходе через некоторое значение ω_k (точка пересечения кривой D -разбиения с действительной осью $U(\omega)$), в работе [7] показано, как обойтись без геометрической интерпретации. Кривая D -разбиения пересекает действительную ось снизу вверх, если $\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_k} > 0$, и сверху вниз — в противном случае. При переходе через ω_k

два корня переходят из левой плоскости в правую, если кривая пересекает действительную ось снизу вверх, и наоборот. В точке $V(0)$ один корень переходит с левой полуплоскости в правую, если первая производная $\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} > 0$, и из правой в левую, если производная отрицательная.

Кривая D -разбиения (см. рис. 1) характеризуется чередованием отрезков устойчивости и неустойчивости. Поэтому достаточно определить знак первой производной $\frac{dV(\omega)}{d\omega}$ в первой точке пересечения границы D -разбиения с действительной осью и претендента на интервал устойчивости. Если $\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} < 0$, то претендентом на устойчивость является интервал $(U(0), U(\omega_1))$, в случае $\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} > 0$,

претендентом на отрезок устойчивости — интервал $(U(\omega_1), U(\omega_2))$. В первом случае при переходе из области с устойчивым интервалом $(U(0), U(\omega_1))$ в область с интервалом $(U(\omega_1), U(\omega_2))$ два корня в плоскости корней характеристического уравнения переходят с левой полуплоскости в правую, а при переходе в область с интервалом $(U(0), U(-\infty))$ характеристическое уравнение теряет один устойчивый корень. В случае $\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} > 0$ при переходе из области с интервалом $(U(0), U(\omega_1))$ в область с интервалом $(U(\omega_1), U(\omega_2))$ два корня с правой полуплоскости в плоскости корней характеристического уравнения переходят в левую, а область с интервалом $(U(0), U(-\infty))$ теряет один устойчивый корень относительно области с устойчивым отрезком плоскости $[v]$. Таким образом, интервал $(U(0), U(-\infty))$ неустойчивый. Только в случае наличия одного корня уравнения (9) и $V'(0) > 0$ интервал $(U(0), U(-\infty))$ устойчивый.

В общем случае первую производную $V(\omega)$ можно представить в виде

$$\frac{dV(\omega)}{d\omega} = \frac{Q_V'(\omega) \cdot R_V'(\omega) - R_V(\omega) \cdot Q_V''(\omega)}{Q_V^2(\omega)}.$$

С учетом (9)

$$Q_V'(0) = H_1^2(0) + H_2^2(0) = c_k^2,$$

$$R_V'(0) = (L_1(0)H_2(0) - L_2(0)H_1(0))' = c_1b_0 - b_1c_0,$$

$$H_1^2(0) + H_2^2(0)' = 2c_1,$$

$$L_1(0) \cdot H_2(0) - L_2(0) \cdot H_1(0) = 0.$$

Тогда, опуская ряд промежуточных преобразований, получаем

$$\left. \frac{dV(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \frac{c_1 b_0 - b_1 c_0}{c_0^2}. \quad (14)$$

Таким образом, производная $V'(\omega)$ в первой точке пересечения кривой D -разбиения с действительной осью $U(\omega)$ определяется соотношением коэффициентов полиномов $L(s)$ и $H(s)$, что позволяет относительно просто определить первого претендента на область устойчивости в плоскости параметра v .

Для оценки максимального количества областей устойчивости D -разбиения в плоскости одного параметра (см. рис. 1) при четных и разных степенях полиномов $L(s)$ и $H(s)$ представим уравнение (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1(\omega) \cdot H_2(\omega) - L_2(\omega) \cdot H_1(\omega) = & (-1)^{m+r-1} (b_n c_{k-1} - b_{n-1} c_k) \omega^{n+k-1} + \\ & + (-1)^{m+r-2} (b_n c_{k-3} + b_{n-2} c_{k-1} - b_{n-1} c_{k-2} - b_{n-3} c_k) \omega^{n+k-3} + \\ & + (-1)^{m+r-3} (b_n c_{k-5} + b_{n-2} c_{k-3} + b_{n-4} c_{k-1} - b_{n-1} c_{k-4} + b_{n-3} c_{k-2} - b_{n-5} c_k) \omega^{n+k-5} + \dots \\ & \dots + (-1)(b_2 c_1 + b_0 c_3 - b_3 c_0 - b_1 c_2) \omega^3 + (b_0 c_1 - b_1 c_0) \omega = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что $\omega^{n+k-2} = \omega^{2\left(\frac{n+k}{2}-1\right)}$, уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left((-1)^{m+r-1} a_{m+r-1} \omega^{2\left(\frac{n+k}{2}-1\right)} + (-1)^{m+r-2} a_{m+r-2} \omega^{2\left(\frac{n+k}{2}-2\right)} + \right. \\ & \left. + (-1)^{m+r-3} a_{m+r-3} \omega^{2\left(\frac{n+k}{2}-3\right)} + \dots + (-1) a_1 \omega^2 + a_0 \right) \omega = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что уравнение (16) имеет не более $\frac{n+k}{2}$ положительных корней, которые соответствуют количеству точек пересечения D -разбиения с действительной осью. Тогда вещественная ось разбивается на не более $\frac{n+k}{2} + 1$ отрезков D -разбиения и максимальное число интервалов устойчивости равно $\frac{n+k}{4}$, если

$\frac{n+k}{2}$ четное, и $\frac{n+k+2}{4}$, если $\frac{n+k}{2}$ нечетное.

Нетрудно показать, что для случая, когда степени полиномов $L(s)$ и $H(s)$ нечетные и разные, уравнение (10) с учетом (7) приводится к уравнению (16). Поэтому количество максимальных точек пересечения отрезков D -разбиения и максимальное количество интервалов устойчивости такое же, как и для предыдущего случая (четное количество степеней n и k).

В случае, когда степени полиномов $L(s)$, $H(s)$ разные и один из них четный, а другой нечетный, уравнение (10) с учетом (6) и (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_1(\omega) \cdot H_2(\omega) - L_2(\omega) \cdot H_1(\omega) = \\ = (-1)^{m+r} b_n c_{k-1} \omega^{n+1} + (-1)^{m+r-1} (b_n c_{k-3} - b_{n-1} c_k + b_{n-2} c_{k-1}) \omega^{n+k-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{m+r-2} (b_n c_{k-5} + b_{n-2} c_{k-3} + b_{n-4} c_{k-1} - b_{n-3} c_k - b_{n-1} c_{k-2}) \omega^{n+k-4} + \\
& \quad + (-1)^{m+r-3} (b_n c_{k-7} + b_{n-2} c_{k-5} + b_{n-4} c_{k-3} + \\
& \quad + b_{n-6} c_{k-1} - b_{n-1} c_{k-4} - b_{n-3} c_{k-2} - b_{n-5} c_k) \omega^{n+k-6} + \dots \\
& \quad \dots + (-b_0 c_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1) \omega^3 - b_1 c_0 \omega = 0.
\end{aligned}$$

Окончательно в более компактном и удобном для анализа виде это уравнение представим как

$$\left((-1)^{m+r} a_{m+r} \omega^{2\left(\frac{n+k-1}{2}\right)} + (-1)^{m+r-1} a_{m+r-1} \omega^{2\left(\frac{n+k-3}{2}\right)} + (-1)^{m+r-2} a_{m+r-2} \omega^{2\left(\frac{n+k-5}{2}\right)} + \right. \\
\left. + (-1)^{m+r-3} a_{m+r-3} \omega^{2\left(\frac{n+r-7}{2}\right)} + \dots + a_1 \omega^2 - a_0 \right) \omega = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что уравнение (17) имеет не более $\frac{n+k+1}{2}$ положительных корней, а количество отрезков — не более $\frac{n+k+1}{2} + 1$ и максимальное число интервалов устойчивости $\frac{n+k+1}{4}$, если $\frac{n+k+1}{2}$ четное, и $\frac{n+k+3}{4}$, если $\frac{n+k+1}{2}$ нечетное.

Нетрудно заметить, что максимальное количество интервалов устойчивости при нечетном количестве точек пересечения кривой D -разбиения с вещественной осью будет только тогда, когда первым отрезком устойчивости будет интервал $(U(0), U(\omega_1))$.

Кривая D -разбиения (см. рис. 2) имеет только один интервал устойчивости. Отрезком устойчивости будет интервал $(U(0), U(\omega_1))$, если $V'(0) < 0$, и $(U(\omega_3), \infty)$, — если $V'(0) > 0$ (рис. 3). Первая производная $V'(0)$ определяется в общем случае соотношением (14).

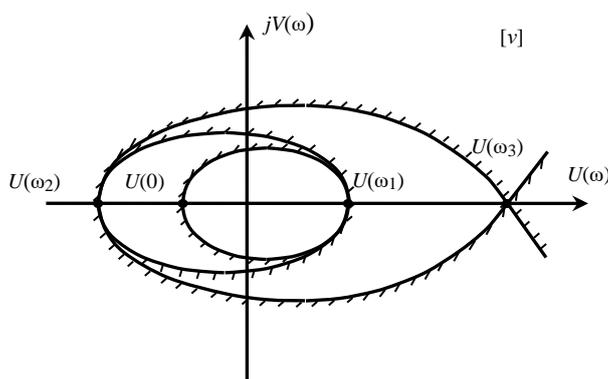


Рис. 3

Если учесть, что задача построения границы области устойчивости в плоскости двух параметров [5, 6] сводится к задаче определения ГОУ в плоскости одного параметра, то приведенные выше оценки максимального количества ОУ в плоскости одного параметра позволяют сделать вывод о количестве максимальных областей устойчивости в плоскости двух параметров, которые представляют практический интерес. При этом один из параметров может нелинейно входить в коэффициенты характеристического уравнения.

Пример. Для иллюстрации практического использования и преимущества предложенного подхода рассмотрим построение области устойчивости в пространстве двух параметров на примере работы [1].

Рассматривается линейная система, состоящая из последовательно соединенных звеньев первого порядка, замкнутых обратной связью. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$(1 + Ts)(1 + 5s)(1 + 10s)(1 + 30s)(1 + 100s)(50s^2 + 200s + 1) + \mu = 0. \quad (18)$$

Здесь T — постоянная времени, μ — коэффициент усиления в цепи обратной связи.

В работе [1] классическим методом построена вся кривая D -разбиения в плоскости параметров T и μ , т.е. выделено семь областей, отвечающих заданному числу корней характеристического уравнения (18) в левой полуплоскости. Особые прямые и граница D -разбиения построены лишь качественно, без соблюдения масштаба (рис. 4, где $D(7)$ — область устойчивости).

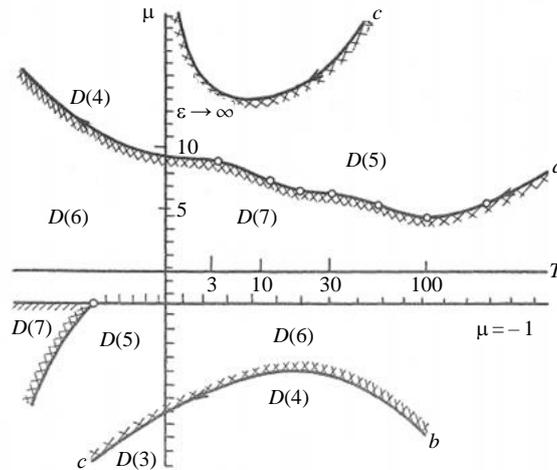


Рис. 4

Рассмотрим D -разбиение и оценим количество областей устойчивости в плоскости параметров T и μ , используя предложенный выше подход. Для этого изменим параметр T от предварительно заданного значения $T_{\min}=0$ до значения $T_{\max}=100$ ($T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$), что представляет практический интерес. Шаг изменения параметра $\Delta T=0,01$. Для каждого фиксированного значения параметра T характеристическое уравнение (18), опуская ряд промежуточных преобразований, приведем к виду

$$\begin{aligned} D(s) &= (a_7s^7 + a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0) + \mu = \\ &= L(s) + \mu H(s) = 0, \end{aligned}$$

где

$$a_7 = 45 \cdot 10^5 T, \quad a_6 = (45 + 201,45T)10^5, \quad a_5 = (201,45 + 89,06T)10^5,$$

$$a_4 = (89,06 + 9,55T)10^5, \quad a_3 = (9,55 + 0,334T)10^5,$$

$$a_2 = (0,334 + 0,0034T)10^5, \quad a_1 = 0,0034 \cdot 10^5 + T, \quad a_0 = 1.$$

Граница D -разбиения по одному параметру μ определяется уравнением

$$D(j\omega) = L(j\omega) + \mu H(j\omega) = 0,$$

отсюда

$$\mu = (a_6\omega^6 - a_4\omega^4 + a_2\omega^2 - a_0) + j(a_7\omega^6 - a_5\omega^4 + a_3\omega^2 - a_1)\omega = U(\omega) + jV(\omega). \quad (19)$$

Для каждого фиксированного значения параметра T определяем интервалы устойчивости в плоскости этого параметра, которые в совокупности составляют область устойчивости в плоскости параметров T и μ . Для этого из уравнения $V(\omega)=0$ определяем частоты $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, которые соответствуют точкам пересечения границы D -разбиения с действительной осью $U(\omega)$, и значения параметра $\mu(U(\omega))$ в этих точках.

Для значения параметра $T=3$ частоты, соответствующие точкам пересечения кривой $D(j\omega)$ с осью $U(\omega)$ в плоскости параметра μ , равны $\omega_0=0, \omega_1=0,0179, \omega_2=0,1522, \omega_3=1,8558$, а значения параметра μ в этих точках определяются выражением $U(\omega_i) = a_6\omega_i^6 + a_4\omega_i^4 + a_2\omega_i^2 + a_0$ ($i=0, 1, 2, 3$) и равны $U(0)=-1, U(\omega_1)=9,2438, U(\omega_2)=-4782,4, U(\omega_3)=25213 \cdot 10^5$. Соотношения $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ и $U(\omega_0) < U(\omega_1) > U(\omega_2) < U(\omega_3)$ позволяют сделать вывод, что граница D -разбиения в плоскости параметра μ (см. рис. 2), как указано выше, содержит только один отрезок области устойчивости ($(U(0), U(\omega_1))$ или $(U(\omega_3), U(\infty))$). Если учитывать, что для всех значений T ($T_{\min} = 0 \leq T \leq T_{\max} = 100$) $V'(0) = -a_1 = -(340+T) < 0$, область устойчивости — интервал $(U(0), U(\omega_1))$.

Нижняя граница ОУ исследуемой системы в плоскости двух параметров T и μ для всех значений параметра T равна $U(0) = -a_0 = -1$, а верхняя определяется выражением $U(T_i, \omega_{1i}) = a_6\omega_{1i}^6 - a_4\omega_{1i}^4 + a_2\omega_{1i}^2 - a_0$ ($i=0,01; 0,02; \dots; 100$).

Блок-схема алгоритма определения ГОУ в плоскости параметров $[T, \mu]$ для рассматриваемого примера представлена рис. 5, а граница области устойчивости — рис. 6.

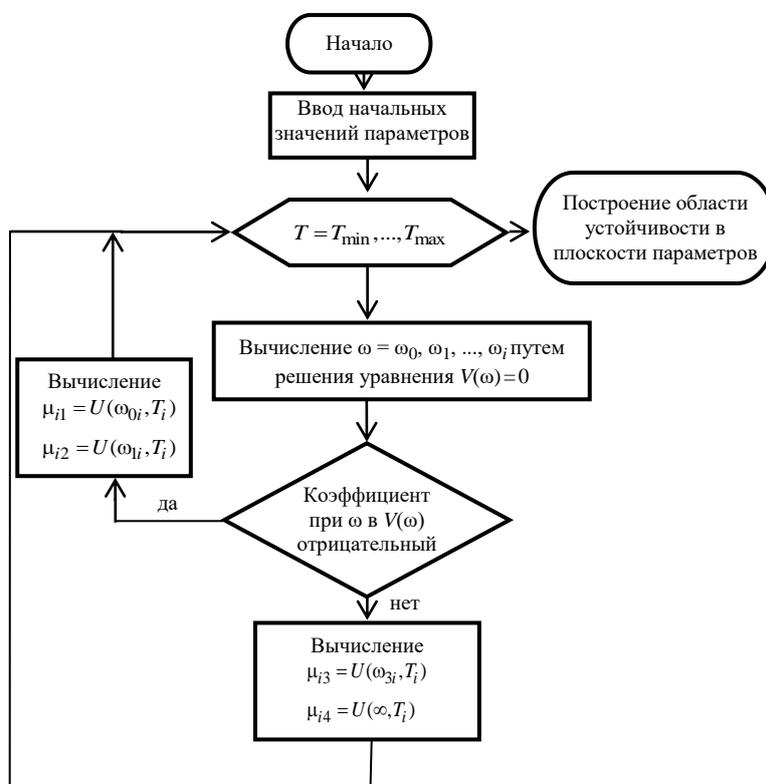


Рис. 5

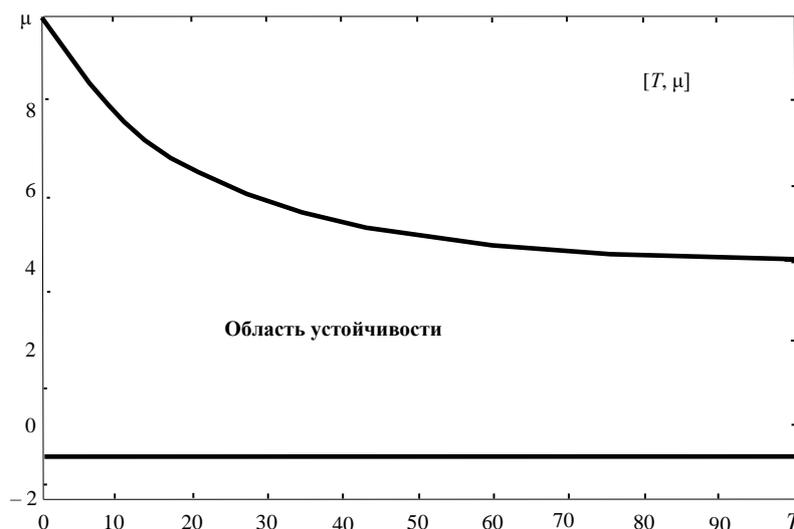


Рис. 6

Заключение

В статье проводится оценка максимального количества интервалов устойчивости границы D -разбиения в плоскости одного параметра. Доказано, что максимальное число отрезков устойчивости в случае, если обе степени полиномов n и k уравнения ГОУ четные или нечетные, равно $\frac{n+k}{4}$, когда $\frac{n+k}{2}$ четное, и $\frac{n+k+2}{4}$, когда $\frac{n+k}{2}$ нечетное. Если одна степень полиномов n и k четная, а другая нечетная, то количество отрезков устойчивости не превышает $\frac{n+k+1}{4}$, когда $\frac{n+k+1}{2}$ четное, и $\frac{n+k+3}{4}$, когда $\frac{n+k+1}{2}$ нечетное.

В аналитическом виде получена производная мнимой части выражения исследуемого параметра в начальной точке кривой D -разбиения ($\omega = 0$), знак которой зависит от соотношения коэффициентов характеристического уравнения и устанавливает устойчивость первого отрезка действительной оси плоскости параметра.

Показано, что для другого вида кривой D -разбиения в плоскости одного параметра существует только один отрезок устойчивости, местонахождение которого, как и для предыдущего вида ГОУ, определяется знаком первой производной мнимой части выражения исследуемого параметра.

Рассмотрен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного подхода для построения ГОУ в пространстве двух параметров без использования «штриховки по Неймарку» и построения особых прямых. При этом обеспечивается машинная реализация построения области устойчивости.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ D -РОЗБИТТЯ ОДНОМІРНОЇ ПЛОЩИНИ ПАРАМЕТРА ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ СИСТЕМИ

Розглянуто два види границь D -розбиття в площині одного параметра лінійних неперервних систем, задані характеристичним рівнянням з дійсними коефіцієнтами. Проводиться оцінка кількості відрізків і інтервалів стійкості кривої D -розбиття. Визначено максимальну кількість відрізків стійкості для різних порядків поліномів рівняння границі D -розбиття першого виду (парний, непарний порядок, один — парного порядку, а другий — непарного). Доказано, що максимальна кількість відрізків стійкості однопараметричного сімейства для всіх випадків різна і залежить від співвідношення степенів поліномів рівняння кривої D -розбиття. Отримано в аналітичному вигляді похідну уявної частини виразу досліджуваного параметра в початковій точці кривої D -розбиття, знак якої залежить від співвідношення коефіцієнтів характеристичного рівняння і визначає стійкість першого відрізка дійсної осі площини параметра. Показано, що для другого виду границі D -розбиття в площині одного параметра є тільки один відрізок стійкості, розміщення якого, як і для першого виду границі області стійкості (ГОС), визначається знаком першої похідної уявної частини виразу досліджуваного параметра. Розглянуто приклад, в якому ілюструється ефективність запропонованого підходу для побудови області стійкості (ОС) в просторі двох параметрів без використання «штриховки за Неймарком» й побудови особливих прямих. При цьому забезпечується машинна реалізація побудови ОС. Враховуючи, що задача побудови границі області в площині двох параметрів зводиться до задачі визначення ГОС в площині одного параметра, то пропонувані оцінки максимальної кількості областей стійкості в площині одного параметра дозволяють зробити висновок про кількість максимальних областей стійкості в площині двох параметрів, які мають практичне значення. При цьому один з параметрів може нелінійно входити в коефіцієнти характеристичного рівняння.

Ключові слова: D -розбиття, границя області стійкості в просторі параметрів, рівняння границі D -розбиття в площині одного і двох параметрів.

L.T. Movchan, S.L. Movchan

INVESTIGATION OF THE GEOMETRY OF THE D -PARTITION OF THE ONE-DIMENSIONAL PLANE OF THE PARAMETER OF THE CHARACTERISTIC EQUATION OF A CONTINUOUS SYSTEM

The paper considers two types of boundaries of the D -partition in the plane of one parameter of linear continuous systems given by the characteristic equation with real coefficients. The number of segments and intervals of stability of the X -partition curve is estimated. The maximum number of stability intervals is determined for different orders of polynomials of the equation of the boundary of the D -partition of the first kind (even order, odd order, one of even order, and the other of odd order). It is proved that the maximum number of stability intervals of a one-parameter family is different for all cases and depends on the ratio of the degrees of the polynomials of the equation of the D -partition curve. The derivative of the imaginary part of the expression of the investigated parameter at the initial point of the D -partition curve is obtained in an analytical form, the sign of which depends on the ratio of the coeffi-

icients of the characteristic equation and establishes the stability of the first interval of the real axis of the parameter plane. It is shown that for another type of the boundary of the D -partition in the plane of one parameter, there is only one interval of stability, the location of which, as for the previous type of the boundary of the stability region (BSR), is determined by the sign of the first derivative of the imaginary part of the expression of the parameter under study. Consider an example that illustrates the effectiveness of the proposed approach for constructing a BSR in a space of two parameters without using «Neimark hatching» and constructing special lines. In this case, a machine implementation of the construction of the stability region is provided. Considering that the problem of constructing the boundary of the stability region in the plane of two parameters is reduced to the problem of determining the BSR in the plane of one parameter, then the given estimates of the maximum number of stability regions in the plane of one parameter allow us to conclude about the number of maximum stability regions in the plane of two parameters, which are of practical interest. In this case, one of the parameters can enter nonlinearly into the coefficients of the characteristic equation.

Keywords: D -partition, boundary of the stability region in the space of parameters, the equation of the boundary of D -partition in the plane of one and two parameters.

1. Неймарк Ю.Н. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. *Автоматика и телемеханика*. 1948. № 3. С. 190–203.
2. Неймарк Ю.Н. Устойчивость линеаризованных систем. Л. : ЛКВВИЛ, 1949. 180 с.
3. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Трембач А.А. Современное состояние метода D -разбиения. *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 12. С. 3–41.
4. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. Л. : Энергоатомиздат. 1983. 242 с.
5. Мовчан Л.Т., Мовчан С.Л. Машино-ориентированный подход к построению области устойчивости в плоскости двух параметров линейных непрерывных систем управления методом D -разбиения. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2011. № 1. С. 30–35.
6. Мовчан Л.Т. Определение точной границы области устойчивости одного класса динамических систем. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 5. С. 5–13.
7. Грязина Е.Н. К теории D -разбиения. *Автоматика и телемеханика*. 2004. № 12. С. 15–28.

Получено 29.03.2021