

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ НАИБЫСТРЕЙШЕГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ

**Ключевые слова:** навигационная задача Цермело, вариационная задача, брахистохронное движение, векторное поле подвижной жидкости, быстродействие, уравнения Эйлера, граничные условия, экстремальная траектория.

### Введение

Кратко изложим обзор научных исследований, выполненных в рамках рассматриваемой проблемы, связанной с поиском уравнений экстремальных траекторий в различных постановках задач.

Первым исследователем одной из указанных проблем был И. Бернулли. В 1696 г. он сформулировал «задачу о брахистохроне»: найти форму кривой, согласно которой бусинка, которая в начальный момент находится в состоянии покоя и ускоряется силой тяжести, перемещается из одной заданной точки в другую в кратчайшее время. В этой задаче предполагалось, что материальная точка (бусинка) движется в вертикальной плоскости в однородном гравитационном поле. И. Ньютон, В. Лейбниц, Г. Ф. Лопиталь, Дж. Бернулли, И. Бернулли показали, что решение этой задачи представляет циклоиду [1].

Аналитические решения «проблемы брахистохроны» с классическим использованием техники вариационного исчисления приведены в [2], а применительно к геометрической оптике — в [3]. Задачи определения формы брахистохроны с учетом сил кулоновского трения при движении материальной точки в вертикальной плоскости в однородном гравитационном поле исследовали Эшби и др. [4], Хейден и Дипстратен [5]. Обобщение задачи о поиске формы брахистохроны, лежащей на цилиндре, с учетом кулоновского трения, выполнено в [6]. В работах Хайена [7], Вратанара и Сайе [8] исследовались проблемы определения формы брахистохроны в неконсервативных силовых полях. Задача определения формы брахистохроны на цилиндре в однородных силовых полях решена в [9], а на цилиндрах и сферах — в дипломной работе Пальмиери [10].

Обобщение проблемы брахистохроны на неоднородные поля рассматривалось в работах Аравинда [11], Денмана [12] и Венециана [13], а в последней работе проблема поиска уравнений брахистохроны решалась в линейных радиальных силовых полях. В работах Денмана [12], Парновского [14] и Ти [15] были найдены решения этой же задачи в радиальных полях с силовой зависимостью, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния между взаимодействующими точками.

Дальнейшие обобщения проблемы брахистохроны для материальной точки, в которых изучались релятивистские эффекты, описаны у Гольдштейна и Бендера [16], Скарпелло и Рителли [17]. Решение задачи о брахистохроне для тела конечных размеров, которое катится без скольжения по брахистохронной кривой, было известно Э. Роджерсу [18], но в его работах нет строгого вывода уравнений брахистохроны для такого случая.

В [20–22] с помощью методов вариационного исчисления получены уравнения брахистохроны для тяжелого однородного цилиндра, катящегося без скольжения по вогнутой цилиндрической выемке, и доказана изохронность колебаний его центра масс. В [23] рассмотрено также брахистохронное движение тонкого однородного диска, катящегося по горизонтальной плоскости без скольжения под действием трех моментов. Эта задача сформулирована и решена в рамках теории

оптимального управления. Установлена возможность реализации брахистохронного движения диска за счет кулоновских сил сухого трения. Также проанализировано влияние значений коэффициента сухого трения на структуру экстремальной траектории.

Ряд научных исследований, связанных с разными постановками навигационной задачи Цермело [24], решен в рамках теории оптимального управления. Задача Цермело классическая и формулируется следующим образом. Корабль должен пройти через область сильных течений, величина и направление скорости течения задаются как функции фазовых переменных  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$ , где  $(x, y)$  — координаты,  $p, q$  — компоненты вектора скорости течения в направлении осей  $x$  и  $y$ . Задается относительная скорость корабля  $C = \text{const}$ . Отыскивается оптимальное управление, обеспечивающее за минимальное время приход корабля в заданную точку, т.е. управление по быстродействию. В [25, 26] получены аналитические решения данной задачи для двух частных случаев: плоского вихревого и плоского линейного скоростных полей. В работе [27] сделана попытка применить разработанный подход на произвольные осевые поля скоростей. Все эти задачи [25–27] решались на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Время перемещения объекта при замыкании этих задач определялось из трансцендентных уравнений, которые были решены численными методами. В качестве примеров даются результаты конкретных решений задачи при различных формах профиля поля скоростей и заданных соотношениях базовой скорости и скорости движущегося объекта. Показаны случаи, когда принцип максимума не дает оптимального решения.

В работе [28] в рамках теории оптимального управления объектами сделана попытка в аналитическом и численном виде определить оптимальное по быстродействию управление для произвольного поля скоростей. Критерием качества выбрано время попадания точки в конечное состояние, а в качестве функционала взят функционал Больца [24]. Управление определялось из решения двуточечной краевой задачи.

В настоящей работе задача Цермело рассматривается в рамках постановки вариационной задачи о брахистохроне для случая перемещения материальной точки в горизонтальном одномерном векторном поле подвижной жидкости между двумя заданными точками. При этом ее решение непосредственно базируется на построении функционала времени и его минимизации с последующим использованием классических уравнений Эйлера–Лагранжа. Далее поиск оптимальных решений (траекторий) производился численными методами с использованием пакета прикладных программ «MathCad».

### Постановка задачи

Рассмотрим вариационную задачу о перемещении материальной точки в одномерном горизонтальном векторном поле между двумя заданными точками за минимальное время.

Пусть моторная лодка (рассматриваемая в этой задаче как материальная точка) пересекает бурную реку с шириной русла  $L$ , стартуя от одного берега в точке  $O(0, 0)$  и финишируя на противоположном берегу в точке  $M(L, y(L))$ . Для дальнейших рассуждений удобно ввести прямоугольную декартову систему координат, как это сделано на рис. 1. Ось  $OX$  направлена горизонтально вправо, ось  $OY$  — вертикально вверх. Пересечение этих осей определяет начало ко-

ординат, и эта же точка является стартовой точкой движения лодки. Обозначим противоположный берег реки как линию  $ML$  и предполагаем, что  $ML \parallel OY$ .

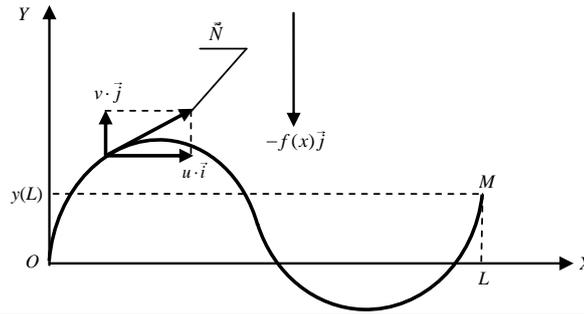


Рис. 1

Лодка движется со скоростью  $\vec{C}$ , причем модуль  $C$  скорости постоянен и определяется по формуле

$$\sqrt{u^2 + v^2} = C, \quad (1)$$

где  $u$  — горизонтальная проекция скорости лодки;  $v$  — вертикальная проекция скорости лодки. Вектор скорости  $\vec{C}$  лодки направлен по касательной, построенной в текущей точке ее положения на заданной траектории  $y = y(x)$ . Следует отметить, что хотя модуль  $C$  скорости лодки постоянен, однако его проекции  $u$  и  $v$  на оси координат переменные. В этом исследовании скорость реки задается как функция  $f(x)$  горизонтальной координаты  $x$ , а вектор скорости направлен в противоположном направлении по отношению к орту оси  $OY$ . Таким образом, вектор скорости реки имеет вид  $V_{riv} = -f(x)\vec{j}$ . Предполагаем, что в вертикальном направлении (по оси  $OZ$ ) вес лодки уравновешивается выталкивающей силой Архимеда, поэтому лодка в этом направлении не перемещается.

Физически движение лодки можно отождествить с движением материальной точки в одномерном горизонтальном векторном поле  $\vec{B}$  скорости жидкости, каждая точка которой движется в одной плоскости (в данном случае  $z = 0$ ) коллинеарно оси  $OY$ . В этом случае компоненты векторного поля скорости жидкости имеют вид  $\vec{B} = (0; -f(x); 0)$ . Сопротивление жидкости при движении лодки принимается пропорциональным соответствующим составляющим скорости материальной точки (лодки) и учтено в переменных  $u$  и  $v$ .

Цель исследования — найти такую брахистохронную траекторию  $y = y(x)$  движения лодки, время движения по которой между заданными точками  $O(0, 0)$  и  $M(L, y(L))$  минимально.

### Построение функционала времени и определение уравнения искомой траектории

Сначала рассмотрим задачу в общем случае, т.е. для функции общего вида  $f(x)$ . После этого выберем конкретную функцию  $f(x)$  и определим соответствующую ей траекторию движения лодки. Запишем выражения для проекций скорости лодки на оси  $OX$  и  $OY$  с учетом скорости течения реки:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{dy}{dt} = v - f(x). \end{cases} \quad (2)$$

Запишем целевой функционал времени, который нужно минимизировать:

$$T = \int_0^L \frac{dx}{u} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Воспользуемся системой уравнений (2) для построения подынтегральной функции функционала (3). Разделим второе уравнение системы (2) на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} - \frac{f(x)}{u}. \quad (4)$$

Используя соотношение (1), определим выражение для дроби:

$$\frac{v}{u} = \sqrt{\left(\frac{C}{u}\right)^2 - 1}. \quad (5)$$

После подстановки соотношения (5) в уравнение (4) получаем квадратное уравнение относительно неизвестной переменной  $z = \frac{1}{u}$ :

$$[f^2(x) - C^2]z^2 + 2y'(x)f(x)z + (y'^2(x) + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет следующие решения:

$$z_{1,2} = \left(\frac{1}{u}\right)_{1,2} = \frac{-f(x)y' \pm \sqrt{(Cy')^2 - (f^2(x) - C^2)}}{f^2(x) - C^2}. \quad (6)$$

Подставляем выражение (6) в функционал (3):

$$T = \int_0^L \frac{-f(x)y' \pm \sqrt{(Cy')^2 - (f^2(x) - C^2)}}{f^2(x) - C^2} dx. \quad (7)$$

Запишем подынтегральную функцию в функционале (7):

$$F(x, y') = \frac{-f(x)y' \pm \sqrt{(Cy')^2 - (f^2(x) - C^2)}}{f^2(x) - C^2}. \quad (8)$$

Воспользуемся уравнением Эйлера–Лагранжа [2, 29], чтобы построить дифференциальное уравнение для искомой траектории лодки:

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0. \quad (9)$$

Поскольку функция (8) не зависит от переменной  $y$ , следовательно,  $F'_y = 0$ .

В результате уравнение Эйлера–Лагранжа (9) редуцируется и превращается в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \text{ или } F'_{y'} = C_1, \quad (10)$$

где  $C_1$  — первая произвольная постоянная.

Теперь можно определить дифференциальное уравнение траектории лодки:

$$\pm \frac{C^2 y'}{\sqrt{(Cy')^2 - (f^2(x) - C^2)}} = C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x) \quad (11)$$

или

$$\frac{C^4 (y')^2}{(Cy')^2 - (f^2(x) - C^2)} = [C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)]^2.$$

Определим из (11) выражение для производной  $y'$ :

$$y' = \pm \frac{1}{C} \sqrt{\frac{f^2(x) - C^2}{1 - \frac{C^2}{[C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)]^2}}}. \quad (12)$$

После интегрирования получаем уравнение искомой оптимальной кривой — брахистохроны — в исследуемом движении материальной точки:

$$y(x) = \pm \frac{1}{C} \int \sqrt{\frac{f^2(x) - C^2}{1 - \frac{C^2}{[C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)]^2}}} dx + C_2, \quad (13)$$

где  $C_2$  — вторая произвольная константа.

Формула (13) устанавливает окончательный вид уравнения искомой кривой  $y(x)$ , к которому должны быть добавлены два граничных условия этой вариационной задачи:

$$y(0) = 0; \quad y(L) = y_L. \quad (14)$$

### Численная реализация и анализ полученных результатов

Рассмотрим эту задачу при условии, что задана конкретная функция  $f(x)$ , которая определяет скорость реки в каждой точке оси  $OX$ , а именно:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (15)$$

Подставим данную функцию (15) в общее выражение дифференциального уравнения кривой (13). Все промежуточные преобразования, которые были выполнены выше для функции общего вида, для этой функции не приводятся. После некоторых преобразований получим

$$y = \pm \int g(x, C, C_1) dx + C_2, \quad (16)$$

$$\text{где } g(x, C, C_1) = \frac{[C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)]}{C} \cdot \sqrt{\frac{C^2 - f^2(x)}{C^2 - [C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)]^2}}.$$

Во-первых, вариационная задача имеет два разных решения, которые соответствуют каждому из двух знаков перед интегралом (16). Во-вторых, интеграл (16) не берется в замкнутом виде. Поэтому интегрируем его численно, представляя подынтегральное выражение  $g(x, C, C_1)$  в виде усеченного ряда Тейлора по переменной  $x$  в окрестности точки  $x = 0$ . Для достижения требуемой точности ограничимся шестью членами ряда Тейлора и, опуская промежуточные преобразования, сразу запишем необходимые выражения для производных  $g^{(0)}(0, C, C_1)$ ,  $g^{(1)}(0, C, C_1)$ ,  $g^{(2)}(0, C, C_1)$ ,  $g^{(3)}(0, C, C_1)$ ,  $g^{(4)}(0, C, C_1)$ ,  $g^{(5)}(0, C, C_1)$ :

$$g^{(0)}(0, C, C_1) = -\frac{C \cdot C_1}{K(C, C_1)}, \quad g^{(1)}(0, C, C_1) = \frac{\pi}{L \cdot C \cdot K^3(C, C_1)},$$

$$g^{(2)}(0, C, C_1) = \frac{\pi^2 \cdot C \cdot C_1^3 [(C \cdot C_1)^2 - 4]}{L^2 \cdot K^5(C, C_1)},$$

$$\begin{aligned}
g^{(3)}(0, C, C_1) &= -\frac{\pi^3 \cdot [(C \cdot C_1)^4 - 15 \cdot C^2 \cdot C_1^4 - 2 \cdot (C \cdot C_1)^2 + 1]}{L^3 \cdot C \cdot K^7(C, C_1)}, \quad g^{(4)}(0, C, C_1) = \\
&= -\frac{\pi^4 \cdot C \cdot C_1^3 [4(C \cdot C_1)^6 - 3C^4 \cdot C_1^6 - 24(C \cdot C_1)^4 + 36C^2 C_1^4 + 36C^2 \cdot C_1^2 + 72C_1^2 - 16]}{L^4 \cdot K^9(C, C_1)}, \\
g^{(5)}(0, C, C_1) &= \\
&= \frac{\pi^5 [(C \cdot C_1)^8 - 150C^6 \cdot C_1^8 - 4(C \cdot C_1)^6 + 525C^4 C_1^8 + 300C^4 \cdot C_1^6 + 6(C \cdot C_1)^4]}{C \cdot L^5 \cdot K^{11}(C, C_1)} + \\
&\quad + \frac{420C^2 \cdot C_1^4 - 150C^2 C_1^4 - 4(C \cdot C_1)^2 + 1}{C \cdot L^5 \cdot K^{11}(C, C_1)},
\end{aligned}$$

где  $K(C, C_1) = \sqrt{[1 - (C \cdot C_1)^2]}$ .

Используя полученные выше выражения, запишем шестичленный отрезок ряда Тейлора для функции  $g(x, C, C_1)$ :

$$g(x, C, C_1) = \sum_{n=0}^5 g^{(n)}(0, C, C_1) \frac{x^n}{n!}. \quad (17)$$

После интегрирования отрезка ряда Тейлора (17) получим приближенное выражение для искомой функции:

$$y(x, C, C_1, C_2) = \pm \sum_{n=0}^5 g^{(n)}(0, C, C_1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C_2, \quad (18)$$

где  $C_1, C_2$  — неизвестные постоянные, которые следует определять из граничных условий (14).

Для численной реализации в данной задаче выберем следующий вариант граничных условий:  $L = 1, C = 1,1, y(0) = 0, y(L) = 0$  (стартовая и финишная точки лежат на оси  $OX$ ).

1. Сначала рассмотрим первое решение — со знаком «плюс» в формуле (18).

Из первого граничного условия (14)  $y(0) = 0$  следует, что вторая неизвестная постоянная  $C_2$  равна нулю. Чтобы определить первую неизвестную константу  $C_1$ , необходимо решить соответствующее нелинейное алгебраическое уравнение. Решение этого уравнения проводилось численными методами с использованием пакета прикладных программ «MathCad». В результате для искомой константы  $C_1$  получено следующее значение:  $C_1 = 0,385$ .

На рис. 2 показан график траектории  $y(x)$  материальной точки с граничными условиями (п. 1), полученный с использованием уравнения (18) при  $C_1 = 0,385$  и  $C_2 = 0$ . Здесь под функцией  $y(x)$  для сокращения записи следует понимать функцию  $y(x; 1,1; 0,385; 0)$ .

Определим время (так называемое время быстрогодействия) движения лодки по установленной для этого случая траектории  $y(x)$ . Для его расчета воспользуемся формулой (7) с выбранными данными исследуемой задачи. Другими словами, функция  $f(x)$  выбирается по формуле (15), а функция  $y(x)$  — в соответствии с формулой (18) при  $L = 1, C = 1,1, C_1 = 0,385, C_2 = 0$ . В результате вычисления интеграла (7) получаем:  $T = 2,46$  (единиц времени).

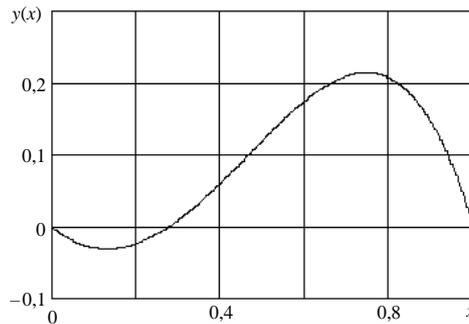


Рис. 2

2. Рассмотрим второе решение — со знаком «минус» в формуле (18).

В этом случае метод определения искомого решения  $y(x)$  и построения графика (рис. 3) остаются прежними, поэтому приведем лишь краткие комментарии.

Решение нелинейного алгебраического уравнения относительно неизвестной константы  $C_1$  дает тот же результат:  $C_1 = 0,385$ . Следовательно, для этого случая график искомой функции  $y(x)$  будет иметь аналогичный вид (см. рис. 3), только его ординаты будут иметь противоположные знаки с такими же абсциссами, что и на графике рис. 2.

Вычислим время движения лодки по установленной для этого случая траектории (в формуле (18) интеграл взят со знаком «минус»). Результат вычислений дает меньшее значение по сравнению с предыдущим:  $T = 1,14$  (единиц времени).

Рассмотрим пример расчета времени перемещения лодки по прямой от точки  $O(0, 0)$  к точке  $M(L, 0)$  и сравним результаты с приведенным выше вариантом расчета брахистохроной траектории. При этом траектория лодки описывается функцией  $y(x) \equiv 0$ . На первый взгляд, эта траектория должна быть оптимальной в смысле минимума времени, затрачиваемого на перемещение лодки из точки  $O(0, 0)$  в точку  $M(L, 0)$ . Однако это не так, и результаты расчетов опровергают это предположение. Формула (7) при подстановке в нее функции  $y(x) \equiv 0$  дает:  $T = 1,344$  (единицы времени). Таким образом, «кратчайший путь» движения лодки оказывается не самым «быстрым» в этой вариационной задаче.

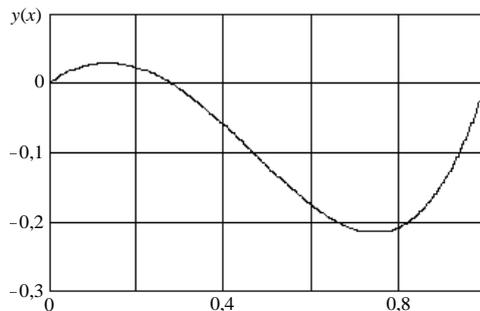


Рис. 3

### Заключение

В данной статье сформулирована и решена задача Цермело как вариационная задача по определению брахистохроной траектории движения материальной точки в горизонтальном одномерном векторном поле подвижной жидкости. Модуль скорости подвижной жидкости задан как функция поперечной координаты (по отношению к вектору скорости подвижной жидкости). Методами вариационного исчисления выведено дифференциальное уравнение траектории  $y(x)$  материальной точки, которое интегрируется в квадратурах. На основе разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора получено приближенное уравнение брахистохронных траекторий  $y(x)$  движения точки с учетом заданных граничных условий.

Приведен конкретный пример численной реализации предложенного подхода. Для выбранного варианта граничных условий определены уравнения брахистохронных траекторий, вдоль которых материальная точка проходит от старта до финиша за минимальное время. В рассматриваемом случае брахистохронные траектории для выбранной функции скорости реки колебательные. Показано, что данная вариационная задача имеет два разных решения, различающихся только знаком. При этом одно из них доставляет минимум целевому функционалу времени.

*В.П. Легеза, О.М. Нецадим*

## ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЙ НАЙШВИДКІСНІШОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ВЕКТОРНОМУ ПОЛІ

Запропоновано розв'язання відомої навігаційної задачі Цермело класичними варіаційними методами. Класична задача Цермело в рамках теорії оптимального керування формується таким чином. Корабель повинен пройти через область сильних течій, величина і напрямок швидкості течії задаються як функції фазових змінних. При цьому задається відносна швидкість корабля, модуль якої під час руху залишається сталим. Потрібно знайти таке оптимальне керування, яке забезпечує прибуття корабля в задану точку за мінімальний час, тобто слід визначити керування кораблем за швидкодією. Розглянуто брахистохронний рух матеріальної точки в плоскому векторному полі рухомої рідини, для якого сформульовано класичну варіаційну задачу пошуку екстремальних траєкторій. Метою дослідження є отримання рівнянь екстремальних траєкторій руху, уздовж яких матеріальна точка переміщується від заданої стартової точки до заданої фінішної за найкоротший час. Розв'язання поставленої задачі здійснювалося за допомогою класичних методів теорії варіаційного числення. Для заданого варіанту граничних умов встановлені алгебраїчні рівняння екстремалей руху матеріальної точки у вигляді відрізків степеневого ряду. Проведено порівняльний аналіз швидкодії як за екстремальними траєкторіями, так і альтернативним шляхом — за прямою лінією, яка з'єднує дві задані точки старту і фінішу. Аналіз результатів показав, що розглянута варіаційна задача має два розв'язки, які відрізняються лише знаком. Однак тільки одне рішення забезпечує мінімальний час переміщення матеріальної точки між двома заданими. Також встановлено, що екстремальна траєкторія брахистохронного руху точки не є прямою, а має коливальний характер.

**Ключові слова:** навігаційна задача Цермело, варіаційна задача, брахистохронний рух, векторне поле рухомої рідини, швидкодія, функціонал часу, рівняння Ейлера, граничні умови, екстремальна траєкторія.

*V.P. Legeza, A.M. Neshchadym*

## DETERMINATION OF THE FASTEST TRAJECTORIES OF MATERIAL POINT MOTION IN A HORIZONTAL VECTOR

The article proposes a solution to the well-known Zermelo navigation problem by classical variational methods. The classical Zermelo problem within the framework of optimal control theory is formulated as follows. The ship must pass through the region of strong currents, the magnitude and direction of the current velocity are set as functions of phase variables. In this case, the relative speed of the ship is set, the module of which remains constant during movement. It is necessary to find such an optimal control that ensures the arrival of the ship at a given point in the minimum time, i.e. control of the ship by fast-action should be determined. In this paper, we consider the brachistochronic motion of a material point in a plane vector field of a mobile fluid, for which the classical variational problem of finding extreme trajectories is formulated. The aim of the study is to obtain equations of extreme trajectories along which a material point moves from a given starting point to a given finish point in the least amount of time. The solution to the problem was carried out using the classical methods of the theory of the calculus of variations. For a given variant of the boundary conditions, algebraic equations of extremals of motion of a material point were established in the form of segments of a power series. A comparative

analysis of the fast-action was carried out both along extreme trajectories and along an alternative path — along a straight line that connects two given start and finish points. Analysis of the results showed that the considered variational problem has two solutions, which differ only in sign. However, only one solution provides the minimum time for moving a material point between two given points. It was also found that the extreme trajectory of the brachistochronic motion of a point is not straight, but has an oscillatory character.

**Keywords:** Zermelo navigation problem, variational problem, brachistochronic motion, vector field of a mobile fluid, fast-action, Euler equations, boundary conditions, extremal trajectory.

1. Dunham W. Journey through genius. New York : Penguin Books, 1991. 304 p.
2. Gelfand I.M., Fomin S.V. Calculus of variations. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, Inc., 1963.
3. Erlichson H. Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time. *Eur. J. Phys.* 1999. N 20. P. 299–304.
4. Ashby N., Britting W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with coulomb friction. *Am. J. Phys.* 1975. **43**, N 10. P. 902–906. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.9976>
5. Van der Heijden A.M.A., Diepstraten J.D. On the brachistochrone with dry friction. *Int. J. of Non-Linear Mechanics.* 1975. **10**, N 2. P. 97–112. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(75\)90017-7](https://doi.org/10.1016/0020-7462(75)90017-7)
6. Covic V., Veskovic M. Brachistochrone on a surface with coulomb friction. *Int. J. of Non-Linear Mechanics.* 2008. **43**, N 5. P. 437 – 450, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.02.004>
7. Hayen J.C. Brachistochrone with coulomb friction. *Int. J. of Non-Linear Mechanics.* 2005. **40**, N 8, P. 1057–1075. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2005.02.004>
8. Vratnagar B., Saje M. On analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field. *Int. J. of Non-Linear Mechanics.* 1998. **33**, N 3. P. 437–450. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(97\)00026-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(97)00026-7)
9. Yamani H.A., Mulhem A.A. A cylindrical variation on the brachistochrone problem. *Am. J. Phys.* 1988. **56**, N 5. P. 467–469. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.15755>
10. Palmieri D. The brachistochrone problem, a new twist to an old problem. *Undergraduate Honors Thesis.* Millersville University of PA, 1996.
11. Aravind P.K. Simplified approach to brachistochrone problem. *Am. J. Phys.* 1981. **49**, N 9. P. 884–886. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.12389>
12. Denman H.H. Remarks on brachistochrone-tautochrone problem. *Am. J. Phys.* 1985. **53**, N 3. P. 224–227. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.14125>
13. Venezian G. Terrestrial brachistochrone. *Am. J. Phys.* 1966. **34**, N 8. P. 701. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.1973207>
14. Parnovsky A.S. Some generalisations of the brachistochrone problem. *Acta Physica Polonica.* A 93 Supplement, 1998. P. 5–55.
15. NComput. 1999. **7**. P. 311–342. Link: <http://hdl.handle.net/2292/5026>
16. Goldstein H.F., Bender C.M. Relativistic brachistochrone. *J. Math. Phys.* 1986. **27**, N 2. P. 507–511.
17. Scarpello G.M., Ritelli D. Relativistic brachistochrone under electric or gravitational uniform field. *Z. Angew. Math. Mech.* 2006. **86**, N 9. P. 736–743. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.200510279>
18. Rodgers E. Brachistochrone and tautochrone curves for rolling bodies. *Am. J. Phys.* 1946. **14**. P. 249–252.
19. Yang J., Stork D., Galloway D. The rolling unrestrained brachistochrone. *American Journal of Physics.* 1987. **55**, N 9. P. 844–847. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.15001>
20. Legeza V.P. Quickest-descent curve in the problem of rolling of a homogeneous cylinder. *Int. Applied Mechanics.* 2008. **44**, N 12. P. 1430–1436. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0464-z>
21. Legeza V.P. Brachistochrone for a rolling cylinder. *Mechanics of Solids.* 2010. **45**, N 1. P. 27–33. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654413020088>.
22. Legeza V.P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder. *Mechanics of Solids.* 2012. **47**, N 4. P. 380–384. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654412040024>
23. Obradovic A., Salinic S., Radulovic R. The brachistochronic motion of a vertical disk rolling on a horizontal plane without slip. *Theoretical and Applied Mechanics.* 2017. **44**, N 2. P. 237–254.
24. Bryson Arthur E. Jr., Ho Yu-Chi. Applied optimal control: optimization, estimation and control. Taylor & Francis Group, NY, 1975. 496 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315137667>
25. Пашенцев С.В. Навигационная задача Цермело: аналитическое решение для вихревого поля. *Вестник МГТУ.* 2000. **3**. № 1. С. 17–22.
26. Пашенцев С.В. Задача Цермело: аналитическое решение для линейного поля скоростей. *Вестник МГТУ.* 2002. **5**, № 2. С. 187–192.
27. Пашенцев С.В. Решение навигационной задачи Цермело для произвольного осевого поля скоростей. *Вестник МГТУ.* 2010. **13**, № 3. С. 587–591.
28. Якушева Д.Б. Решение навигационной задачи Цермело при линейно-вихревой структуре течения. Процессы управления и устойчивость. *Труды XI-й Международной научно-технической конференции аспирантов и студентов.* Санкт-Петербург. ун-т. 6-9 апреля 2009. С. 91–96.
29. Eltsgolts L.P. Differential equations and variational calculus. M. : Nauka Publ., 1974. 432 p. (in Russ.).

Получено 03.03.2021