УДК 517.95

М.Ш. Маматов, Ж.Т. Нуритдинов, Э.Э. Эсонов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

Ключевые слова: дифференциальные игры, дискретные игры, преследование, убегание, терминальное множество, управление преследования.

Введение

Динамика систем, описываемых уравнениями дробного порядка, является объектом исследования специалистов примерно с середины XX века. В этих исследованиях в основном изучается задача существования, единственности и устойчивости ее решения [1]. Повышенный интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка обусловлен их физической интерпретацией, что и вызвало их широкое применение в физике, биофизике, экономике и др. [2–5]. Численным методам решения краевых задач для уравнений теплопроводности с производными дробного порядка посвящен ряд работ. В [6] рассматриваются разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для дифференциальных уравнений с дробной производной по времени и по пространственной переменной. С помощью принципа максимума получены априорные оценки, доказаны устойчивость и равномерная сходимость разностных схем. В [7] приведено решение краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка по времени и по пространственным переменным методом сеток. Доказаны критерии устойчивости разностных схем. Показано, что порядок аппроксимации по времени равен единице, а по пространственным переменным равен двум. В [8] рассматриваются разностные схемы для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными второго порядка с дробной производной по времени. Отдельно изучены стационарные и нестационарные задачи для уравнения диффузии в одномерной и многомерной области. Доказана устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемых уравнений.

Дифференциальные игры, описываемые уравнениями сосредоточенными и распределенными параметрами дробного порядка, впервые были изучены в работах академика НАН Украины А.А. Чикрия и его учеников [9–11]. В частности, в [10] рассматриваются игровые задачи для систем с дробными производными в смысле Римана–Лиувилля, Джрбашяна–Нерсесяна, Капуто и Миллера–Росса. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время. Работа [11] посвящена исследованию игровых задач сближения для процессов с дискретным временем, в частности систем дробного порядка по Грюнвальду–Летникову.

В данной работе рассматривается дифференциальная игра, описываемая уравнением диффузии производными дробного порядка в многомерной области.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Научных проектов Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проекты ОТ-Ф4-(36+32), ОТ-Ф4-33).

Для решения этой задачи применяется метод конечных разностей. Получены достаточные условия для возможности завершения преследования. К рассматриваемому кругу вопросов примыкают работы [12–17].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая распределенная система, описываемая уравнениями дробного порядка:

$$D_{0t}^{\alpha} z = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu D_{0x_\nu}^{\beta} z - u + \upsilon, \ (t, x) \in \Omega, \tag{1}$$

$$z|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$z|_{S_T} = 0. \tag{3}$$

Здесь $z = z(t, x)$ — неизвестная функция $C^2(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, $t \in [0, T]$, T — произвольная положительная константа, $\Omega = \{x \in R^n : 0 \leq x_1 \leq 1, ..., 0 \leq x_n \leq 1\}$ — n-мерный куб с гранями, параллельными координатным плоскостям; $a_\nu > 0$ — коэффициенты теплопроводности; $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$;

$$D_{0t}^{\alpha} z(t, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0t}^{1-\alpha}, \quad D_{0x_\nu}^{\beta} z(t, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^2 I_{0x}^{2-\beta}$$

— частные дробные производные Римана–Лиувилля;

$$I_{0x}^{\alpha} z(t, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{z(s, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

— частные дробные интегралы Римана–Лиувилля по соответствующей переменной [1]. $u = u(t, x)$, $\upsilon = \upsilon(t, x)$ — управляющие функции из класса $L_2(Q_T)$, функцией $u(t, x)$ распоряжается первый — преследующий игрок, функцией $\upsilon(t, x)$ второй — преследуемый или убегающий игрок, $u \in \overline{P} \subset R^1$, $\upsilon \in \overline{Q} \subset R^1$, $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — непустые компакты в R^1. $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, $S_T = \{(t, x) \mid t \in (0, T), x \in \partial\Omega\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T, $\partial\Omega$ — граница области Ω, она считается кусочно-гладкой. Кроме того, в пространстве R^1 выделено терминальное множество $\overline{M}_1 \subset R^1$.

Определение 1. В задачах (1)–(3) возможно ε — завершение $(\varepsilon > 0)$ преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$, если существует число $T = T(\varphi(\cdot))$ и функция $u(\upsilon, t, x) \in \overline{P}, \upsilon \in \overline{Q}, t \in [0, T], x \in \Omega$ такие, что для произвольной функции $\upsilon_0(t, x) \in \overline{Q}$, $t \in [0, T], x \in \Omega$ решение $z_0(t, x)$ задачи (1)–(3), где $u = u(\upsilon_0(t, x), t, x)$, $\upsilon = \upsilon_0(t, x)$, попадает на множество $\varepsilon I + \overline{M}_1$, при некотором $(\tilde{t}, \tilde{x})$, $\tilde{t} \in [0, T]$, $\tilde{x} \in \Omega$: $z_0(\tilde{t}, \tilde{x}) \in \varepsilon I + \overline{M}_1$, где $I = (-1, 1)$.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция с областью определения Ω. Тогда имеет место конечно-разностное определение производного порядка $\beta \in R$ в точке $x \in D(f)$ [5]:

$$D_{ax}^{\beta} f = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{m}{x-a}\right)^{\beta} \sum_{k=0}^{m} q_k f\left(x - \frac{x-a}{m} k\right), \tag{4}$$

где $1 < \beta \leq 2$; $q_0 = 1$, $q_k = \dfrac{(-1)^k \beta(\beta-1)...(\beta-k+1)}{k!}$. Согласно [4, 5], если $f \in C^2(\Omega)$, то производная Грюнвальда совпадает с производной Римана–Лиувилля. Для аппроксимации дробных производных Римана–Лиувилля по переменным x при $1<\beta<2$ на отрезке $[0, 1]$ воспользуемся формулой Грюнвальда–Летникова со смещением:

$$D_{0x}^{\beta} f = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{k=0}^{[x/h]} q_k f(x-(k-1)h), \tag{5}$$

где $h = x/r,\ r>1.$ Формула (5) обеспечивает более точную аппроксимацию, чем стандартная формула Грюнвальда–Летникова [5].

Воспользовавшись формулой (5), для производных дробного порядка Римана–Лиувилля по пространственным переменным $x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n$ в случае $1<\beta<2$ получим:

$$D_{0x_1}^{\beta} z(t, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\Big|_{x_1=x_r} \approx \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{j=0}^{r+1} q_j z(t, x_{r-j+1}, x_2, ..., x_i, ..., x_n),$$

$$D_{0x_2}^{\beta} z(t, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\Big|_{x_2=x_r} \approx \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{j=0}^{r+1} q_j z(t, x_1, x_{r-j+1}, ..., x_i, ..., x_n),$$

$$D_{0x_i}^{\beta} z(t, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\Big|_{x_i=x_r} \approx \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{j=0}^{r+1} q_j z(t, x_1, x_2, ..., x_{r-j+1}, ..., x_n), \tag{6}$$

....

$$D_{0x_n}^{\beta} z(t, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)\Big|_{x_n=x_r} \approx \frac{1}{h^{\beta}} \sum_{j=0}^{r+1} q_j z(t, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{r-j+1}),$$

где $x_{r-j+1} \approx x_r - (j-1)h.$

Пользуясь достаточным признаком существования дробной производной Римана–Лиувилля [3] при $0<\alpha\le 1,$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ получим

$$D_{0t}^{\alpha} z(t, x)\Big|_{t_k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{z(t_k, x)}{(t_{k+1}-t_k)^{\alpha}} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{z'(s, x)ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha}} \right), \tag{7}$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{8}$$

Представляя производную $z'(\tau, x) = z'(\tau, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ в виде конечной разности

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)_k \approx \frac{z(t_{k+1}, x) - z(t_k, x)}{\tau} = \frac{z(t_{k+1}, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n) - z(t_k, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n)}{\tau},$$

разностную аппроксимацию производной дробного порядка α на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ можно записать в виде

$$D_{0t}^{\alpha} z(t, x)\Big|_{t_k} \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{z(t_k, x)}{(t_{k+1}-t_k)^{\alpha}} + \frac{z(t_{k+1}, x) - z(t_k, x)}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha}} \right) =$$

$$= \frac{z(t_{k+1}, x) - \alpha z(t_k, x)}{\tau^{\alpha}(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{z(t_{k+1}, x) - \alpha z(t_k, x)}{\tau^{\alpha}\,\Gamma(2-\alpha)}. \tag{9}$$

Для аппроксимации задачи (1)–(3) в области

$\bar{\Omega} = \{(t, x_1, x_2, ..., x_\nu, ..., x_n):\ 0\le t\le T, 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1, ...,\ 0\le x_\nu \le 1, ..., 0\le x_n\le 1\}$

 ISSN 0572-2691

введем сетку

$$\varpi_{\tau,h} = \left\{(t_k, x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_\nu}, ..., x_{i_n}) : t_k = k\tau, k = 0, 1, ..., \theta - 1, \tau = \frac{T}{\theta}, \theta > 1;\right.$$

$$\left. x_{i_\nu} = i_\nu h, i_\nu = 0, 1, ..., r-1, \nu = 1, 2, ..., n, h = \frac{1}{r}, r > 1\right\}$$

с шагом τ по t, h по $x_\nu, \nu = 1, 2, ..., n$ и обозначим

$$z_{k,i} = z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n} = z(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h),$$

$$z_{k,i_\nu - j+1} = z(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_{\nu-1} h, (i_\nu - j + 1)h, i_{\nu+1} h, \ldots, i_n h),$$

$$z_{k,i_\nu+1} = z(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_{\nu-1} h, (i_\nu + 1)h, i_{\nu+1} h, \ldots, i_n h),$$

$$u_{k,i} = u(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h),\ \upsilon_{k,i} = \upsilon(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h).$$

Воспользовавшись равенствами (6)–(9) и введенными обозначениями для задач (1)–(3) запишем явную разностную схему в следующем виде:

$$\frac{z_{k+1,i} - \alpha z_{k,i}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{h^\beta}\left(z_{k,i_\nu+1} - \beta z_{k,i} + \sum_{j=2}^{i_\nu+1} q_j z_{k,i_\nu - j+1}\right) - u_{k,i} + \upsilon_{k,i}. \tag{10}$$

Ясно, что условие $z|_{t=0} = \varphi(x)$ можно заменить условием $z_{0,i} = \varphi(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h)$, $i_\nu = 1, 2, \ldots, r-1$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Точно так же для граничных узловых точек $(k\tau, i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h)$ условие $z|_{S_T} = 0$, можно заменить условием $z_{k,i} = z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, \theta$, $i_\nu = 0, r$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Разностная схема (10) устойчива, когда [6, 7]:

$$\tau^\alpha \sum_{\nu}^{n} \frac{a_\nu}{h^\beta} \le \frac{\alpha + 1}{(2+\beta)\Gamma(2-\alpha)},$$

где $0 < \alpha \le 1$, $1 < \beta \le 2$.

Нетрудно убедиться [8], что решение $z_{k,i}$ разностной задачи (10) сходится к решению z исходной задачи (1)–(3), и имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\left\|(z)_{\tau,h} - z_{k,i}\right\|_{\Phi_{hl}} \le K_1\tau + K_2 h^2, \tag{11}$$

где $(z)_{\tau,h}$ — значения точного решения задачи (1) в узлах сетки, $\Phi_{\tau,h}$ — пространство сеточных функций, $\|\cdot\|_{\Phi_{\tau,h}}$ — норма этого пространства, K_1, K_2 — константы.

Теперь для удобства представления запишем задачу (10) в матричном виде:

$$z_{k+1} = Gz_k - \gamma u_k + \gamma\upsilon_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \theta - 1,\ z_0 = \bar{\varphi}, \tag{12}$$

где $\gamma = \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha$, z_k, u_k, υ_k — H-мерные матрицы-столбцы, H — общее число внутренних узлов и $H = (r-1)^n$, принадлежащих одному слою. Следовательно, при данной $t = k\tau$, имеем

$$z_k = (z_{k,1,1,\ldots,1}, z_{k,1,1,\ldots,2}, \ldots, z_{k,1,1,\ldots,r-1}, \ldots, z_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}, \ldots, z_{k,r-1,r-1,\ldots,r-1})^{\mathrm{T}},$$

$$u_k = (u_{k,1,1,\ldots,1}, u_{k,1,1,\ldots,2}, \ldots, u_{k,1,1,\ldots,r-1}, \ldots, u_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}, \ldots, u_{k,r-1,r-1,\ldots,r-1})^{\mathrm{T}},$$

$$\upsilon_k = (\upsilon_{k,1,1,\ldots,1}, \upsilon_{k,1,1,\ldots,2}, \ldots, \upsilon_{k,1,1,\ldots,r-1}, \ldots, \upsilon_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}, \ldots, \upsilon_{k,r-1,r-1,\ldots,r-1})^{\mathrm{T}},$$

соответственно

$$\bar{\varphi} = (\varphi(h, h, \ldots, h), \varphi(h, h, \ldots, 2h), \ldots, \varphi(h, h, \ldots, (r-1)\,h), \ldots$$

$$\ldots, \varphi(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h), \ldots, \varphi((r-1)\,h, (r-1)\,h, \ldots, (r-1)h))^{\mathrm{T}}$$

— начальный вектор; G — $H \times H = (r-1)^n \times (r-1)^n$ -мерная квадратная матрица вида:

$$G = G^n = \begin{pmatrix} G^{n-1} & \bar{G}^{n-1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} \\ G_2^{n-1} & G^{n-1} & \bar{G}^{n-1} & \bar{0} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} \\ G_3^{n-1} & G_2^{n-1} & G^{n-1} & \bar{G}^{n-1} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{r-3}^{n-1} & \ldots & G_3^{n-1} & G_2^{n-1} & G^{n-1} & \bar{G}^{n-1} & \bar{0} \\ G_{r-2}^{n-1} & \ldots & G_4^{n-1} & G_3^{n-1} & G_2^{n-1} & G^{n-1} & \bar{G}^{n-1} \\ G_{r-1}^{n-1} & \ldots & G_5^{n-1} & G_4^{n-1} & G_3^{n-1} & G_2^{n-1} & G^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\bar{G}^{n-1}$ — квадратная матрица размера $(r-1)^{n-1} \times (r-1)^{n-1}$. Диагональные элементы матрицы равны $\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha} \dfrac{a_n}{h^{\beta}}$. Также G_j^{n-1} — матрица размера $(r-1)^{n-1} \times \times (r-1)^{n-1}$, и все диагональные элементы которой равны $q_j \Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha} \dfrac{a_n}{h^{\beta}}$, $j = \overline{2, r-1}$. $\bar{0}$ — матрица размера $(r-1)^{n-1} \times (r-1)^{n-1}$, все ее элементы равны нулю.

В частности, если $n = 1$, матрица G имеет следующий вид

$$G = G^1 = \begin{pmatrix} G^0 & \bar{G}^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_2^0 & G^0 & \bar{G}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_3^0 & G_2^0 & G^0 & \bar{G}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{r-3}^0 & \cdots & G_3^0 & G_2^0 & G^0 & \bar{G}^0 & 0 \\ G_{r-2}^0 & \cdots & G_4^0 & G_3^0 & G_2^0 & G^0 & \bar{G}^0 \\ G_{r-1}^0 & \cdots & G_5^0 & G_4^0 & G_3^0 & G_2^0 & G^0 \end{pmatrix},$$

где $G^0 = \alpha - \beta \Gamma(2-\alpha)\,\tau^{\alpha} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{a_{\nu}}{h^{\beta}}$, $\bar{G}^0 = \Gamma(2-\alpha)\,\tau^{\alpha} \dfrac{a_1}{h^{\beta}}$, $G_j^0 = q_j \Gamma(2-\alpha)\,\tau^{\alpha} \dfrac{a_1}{h^{\beta}}$, $j = \overline{2, r-1}$. Если $n = 2$, матрица G имеет вид

$$G = G^2 = \begin{pmatrix} G^1 & \bar{G}^1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ G_2^1 & G^1 & \bar{G}^1 & \bar{0} & \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ G_3^1 & G_2^1 & G^1 & \bar{G}^1 & \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{r-3}^1 & \cdots & G_3^1 & G_2^1 & G^1 & \bar{G}^1 & \bar{0} \\ G_{r-2}^1 & \cdots & G_4^1 & G_3^1 & G_2^1 & G^1 & \bar{G}^1 \\ G_{r-1}^1 & \cdots & G_5^1 & G_4^1 & G_3^1 & G_2^1 & G^1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{G}^1$ — квадратная матрица размера $(r-1)\times(r-1)$ и диагональные элементы равны $\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha} \dfrac{a_n}{h^{\beta}}$, G_j^1 — квадратная матрица размера $(r-1)\times(r-1)$ и диагональные элементы, которые равны $q_j \Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha} \dfrac{a_n}{h^{\beta}}$, $j = \overline{2, r-1}$, $\bar{0}$ — квадратная матрица размера $(r-1)\times(r-1)$, все элементы которой равны нулю.

Пусть теперь в R^H выделено терминальное множество M.

Определение 2. Будем говорить, что в игре (12) из точки $z_0 = \overline{f} \in R^H \setminus M$ можно завершить преследования $N \le \theta$ шагов, если по любой последовательности $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, \ldots, \overline{\upsilon}_{N-1}$ управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{N-1}$ управления преследования, что решение $(z_0, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} = Gz_k - \gamma\overline{u}_k + \gamma\overline{\upsilon}_k$, $k = 0,1,\ldots, N-1,$ для некоторого $d \le N$ попадает на множество $M : \overline{z}_d \in M$.

2. Формулировка основных результатов

Пусть в игре (12) терминальное множество имеет такой вид: $M = M_0 + M_1$, где M_0 — $(H-\gamma)$-мерное линейное подпространство R^H, M_1 — подмножество подпространства L-ортогонального дополнения M_0 в R^H. Через Π обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из R^H на L, а через $A+B$ и $A\overset{*}{-}B$ алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A, B соответственно. Пусть

$$P = \underbrace{\overline{P}\times\overline{P}\times\ldots\times\overline{P}}_{H},\quad Q = \underbrace{\overline{Q}\times\overline{Q}\times\ldots\times\overline{Q}}_{H},\quad M_1 = \underbrace{\overline{M}_1\times\overline{M}_1\times\ldots\times\overline{M}_1}_{\mu},\quad 1 \le \mu \le H,$$

$$W(0) = W\{0\},\quad W(m) = \sum_{k=0}^{m-1}[\Pi G^k\gamma P \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q],$$

$$W_1(m) = M_1 + W(m), \tag{13}$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ \theta$.

Теорема 1. Предположим, что N — наименьшее из тех натуральных чисел *m*, для каждого из которых имеет место включение $\Pi G^m z_0 \in W_1(m)$. Тогда из точки $z_0 = \overline{\varphi}$ можно завершить задачу преследования N шагов.

Пусть теперь

$$W_2(0) = M_1,\quad W_2(1) = [W_2(0) + \Pi\gamma P] \overset{*}{-} \Pi\gamma Q,\ \ldots,$$

$$W_2(m) = [W_2(m-1) + \Pi G^{m-1}\gamma P] \overset{*}{-} \Pi G^{m-1}\gamma Q,\quad m = 0, 1, \ldots, \theta. \tag{14}$$

Теорема 2. Если N — наименьшее из тех натуральных чисел *m*, для каждого из которых имеет место включение $\Pi G^m z_0 \in W_2(m)$, то из точки z_0 можно завершить задачу преследования N шагов.

Пусть

$$\beta_m(\cdot) = \left\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} : \beta_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{m-1}\beta_k = 1\right\},$$

$$W(\beta_m(\cdot)) = \sum_{k=0}^{m-1}[(\beta_k M_1 + \Pi G^k\gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k\gamma Q],\quad m = 1, 2, \ldots, \theta.$$

Положим

$$W_3(0) = M_1,\quad W_3(m) = \bigcup_{\beta_m(\cdot)} W(\beta_m(\cdot)) \tag{15}$$

для $m = 1, 2, \ldots, \theta$.

Теорема 3. Если M_1 — выпуклое множество и N — наименьшее из тех натуральных чисел *m*, для каждого из которых имеет место включение

$$\Pi G^m z_0 \in W_3(m), \tag{16}$$

то из точки z_0 можно завершить задачу преследования N шагов.

Теорема 4. Пусть в неравенстве (11) $K_1 l + K_2 h^2 < \varepsilon$, и в игре (12) из точки $z_0 = \overline{\varphi}$ возможно завершение преследования в смысле определения 2. Тогда в игре (1) из начального положения $z|_{t=0} = z(0, x) = \varphi(x)$ можно завершить преследования в смысле определения 1.

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Из (13) и по условию теоремы следует существование таких $a(k) \in \Pi G^k \gamma P \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q$ и $b \in M_1$, что

$$\Pi G^m z_0 = b + \sum_{k=0}^{m-1} a(k). \tag{17}$$

Пусть $\upsilon = \overline{\upsilon}_k = \overline{\upsilon}(k)$, $0 \le k \le m-1$ — произвольное допустимое управление убегающего игрока; управление преследующего игрока $u = \overline{u}_k v = \overline{u}(k)$ построим как решение следующих уравнений

$$\Pi G^{m-k-1} \gamma \overline{u}(k) - \Pi G^{m-k-1} \gamma \overline{\upsilon}(k) = a(k), \quad 1 \le k \le m-1.$$

Ясно, что эти уравнения имеют решения по выбору $a(k)$, так как $\overline{\upsilon}(k) \in Q$ и $\overline{u}(k) \in P$. Подставляя $\upsilon = \overline{\upsilon}(k) = \overline{\upsilon}_k$ и $u = \overline{u}(k) = \overline{u}_k$ в (12), получим

$$z_m = G^m z_0 - G^{m-1} \gamma \overline{u}_0 + G^{m-1} \gamma \overline{\upsilon}_0 - G^{m-2} \gamma \overline{u}_1 + G^{m-2} \gamma \overline{\upsilon}_1 - \ldots - \gamma \overline{u}_{m-1} + \gamma \overline{\upsilon}_{m-1}.$$

Отсюда, применяя к обеим частям равенства оператор проектирования Π, и из равенства (17), имеем

$$\Pi z_m = \Pi G^m z_0 - \Pi G^{m-1} \gamma \overline{u}_0 + \Pi G^{m-1} \gamma \overline{\upsilon}_0 - \ldots - \Pi \gamma \overline{u}_{m-1} + \Pi \gamma \overline{\upsilon}_{m-1} =$$

$$= \Pi G^m z_0 - \sum_{k=0}^{m-1} a(k) = b \in M_1.$$

Значит, $\Pi z_m = b \in M_1$, т.е. $z_m \in M$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, \ldots, \overline{\upsilon}_{m-1}$, $\overline{\upsilon}_k \in Q$, $0 \le k \le m-1$ — произвольная последовательность. Для конкретной $\overline{\upsilon}_0$, по условию теоремы и в силу (14), получим включение

$$\Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1} \gamma \overline{\upsilon}_0 \in W_2(m-1) + \Pi G^{m-1} \gamma P.$$

Теперь в качестве $\overline{u}_0$ берем тот элемент P, для которого сохраняется последнее включение, в результате получим

$$\Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1} \gamma \overline{\upsilon}_0 - \Pi G^{m-1} \gamma \overline{u}_0 \in W_2(m-1).$$

Из этого включения, учитывая равенство (12), имеем

$$\Pi G^{m-1} (\mathrm{G}\, z_0 - \gamma \overline{u}_0 + \gamma \overline{\upsilon}_0) \in W_2(m-1),$$

т.е.

$$\Pi G^{m-1} z_1 \in W_2(m-1).$$

Если теперь управление $\overline{\upsilon}_1$ становится известным, тогда вышеизложенным способом можно построить управление $\overline{u}_1$, обеспечивающее включение

$$\Pi G^{m-2} z_2 \in W_2(m-2).$$

Далее, рассуждая аналогично, получаем

$$\Pi z_m \in W_2(0) = M_1,$$

а значит $z_m \in M$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Вместо включения (16), имея в виду (15), рассмотрим эквивалентное ему включение

$$\Pi G^m z_0 \in W(\overline{\beta}_m(\cdot)),$$

существование $\overline{\beta}_m(\cdot) = \{\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_{m-1}\}$ следует из (15).

 ISSN 0572-2691

Отсюда получим

$$\Pi G^m z_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\bar{\beta}_k M_1 + \Pi G^k \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q] + (\bar{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi G^{m-1} \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^{m-1} \gamma Q. \quad (18)$$

Пусть теперь $\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_{m-1}$, $\upsilon_k \in Q$, N — произвольная последовательность. В силу (18) для управления υ_0 получим

$$\Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1} \gamma \upsilon_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\bar{\beta}_k M_1 + \Pi G^k \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q] + \bar{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi G^{m-1} \gamma P. \quad (19)$$

Управление $\bar{u}_0 \in P$ построим как решение следующего уравнения

$$\Pi G^{m-1} \gamma \upsilon_0 - \Pi G^{m-1} \gamma \bar{u}_0 = \bar{\beta}_{m-1} a_1, \ a_1 \in M_1.$$

Далее, в силу (19) имеем

$$\Pi G^{m-1} (\mathrm{G}\, z_0 - \gamma \bar{u}_0 + \gamma \upsilon_0) \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\bar{\beta}_k M_1 + \Pi G^k \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q] + \bar{\beta}_{m-1} a_1.$$

Поэтому, имея ввиду (12), получим

$$\Pi G^{m-1} z_1 \in \sum_{k=0}^{m-2} [(\bar{\beta}_k M_1 + \Pi G^k \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q] + \bar{\beta}_{m-1} a_1.$$

Точно так же, если управление υ_1 становится известным, то вышеизложенным способом можно построить управление $\bar{u}_1$, обеспечивающее включение

$$\Pi G^{m-2} z_2 \in \sum_{k=0}^{m-3} [(\bar{\beta}_k M_1 + \Pi G^k \gamma P) \overset{*}{-} \Pi G^k \gamma Q] + \bar{\beta}_{m-1} a_1 + \bar{\beta}_{m-2} a_2, \quad a_2 \in M_1,$$

и т.д. Таким образом:

$$\Pi z_m = \bar{\beta}_{m-1} a_1 + \bar{\beta}_{m-2} a_2 + \ldots + \bar{\beta}_0 a_m \in \bar{\beta}_{m-1} M_1 + \bar{\beta}_{m-2} M_1 + \ldots + \bar{\beta}_0 M_1 \in$$
$$\in (\bar{\beta}_{m-1} + \bar{\beta}_{m-2} + \ldots + \bar{\beta}_0) M_1 = M_1,$$

отсюда имеем $z_m \in M$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть в игре (1) из точки $z_0 = \bar{\varphi}$ можно завершить задачу преследования $N \le \theta$ шагов. Ясно, что по любой последовательности $\bar{\upsilon}_0, \bar{\upsilon}_1, ..., \bar{\upsilon}_{N-1}$, $\bar{\upsilon}_k \in Q$, $z_{n-1} = \alpha_n z_n + \beta_n$ управления убегания можно построить такую последовательность $\bar{u}_0, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_{N-1}, \bar{u}_k \in P$, $0 \le k \le N-1$ управления преследования, что решение $(z_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} = G z_k - \gamma \bar{u}_k + \gamma \bar{\upsilon}_k$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N-1$, при некоторой $d \le N$ попадает $M : \bar{z}_d \in M$. Пусть теперь в игре (1) $\upsilon = \bar{\upsilon}(t, x) \in \bar{Q}$, $(t, x) \in Q_T$ — произвольное управление убегающего игрока из класса $L_2(Q_T)$. Зная управление убегающего $\upsilon = \upsilon(t, x)$, можем определить $\bar{\upsilon}_{k, i_1, i_2, \ldots, i_n}$ как значение этой функции в узловых точках сетки $Q_{T\tau, h}$, т.е. можем определить υ_k :

$$\upsilon_k = \bar{\upsilon}_k = (\bar{\upsilon}_{k,1,1,\ldots,1}, \bar{\upsilon}_{k,1,1,\ldots,2}, \ldots, \bar{\upsilon}_{k,1,1,\ldots,r-1}, \ldots, \bar{\upsilon}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}, \ldots, \bar{\upsilon}_{k,r-1,r-1,\ldots,r-1}).$$

Отсюда, в силу условия теоремы, можно построить управление преследователя в игре (12), обеспечивающее завершение преследования

$$u_k = \bar{u}_k = (\bar{u}_{k,1,1,\ldots,1}, \bar{u}_{k,1,1,\ldots,2}, \ldots, \bar{u}_{k,1,1,\ldots,r-1}, \ldots, \bar{u}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}, \ldots, \bar{u}_{k,r-1,r-1,\ldots,r-1}).$$

Теперь в игре (1) управление преследующего игрока $u = \bar{u}(t, x)$ построим следующим образом: $\bar{u}(t, x) = \{\bar{u}_{k,i} = \bar{u}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n} : k\tau \le t \le (k+1)\tau,\ k = 0, 1, ..., \theta - 1,\quad i_\alpha h \le x_{i_\alpha} \le$ $\le (i_\alpha + 1)h,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, r-1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n\}$. Ясно, что $n \in P$ и $\bar{u}(t, x) \in L_2(Q_T)$. Подставляя $\upsilon = \bar{\upsilon}(t, x)$, $u = \bar{u}(t, x)$ в (1), получаем дифференциальное уравнение, точно также подставляя $\bar{\upsilon}_{k,i} = \bar{\upsilon}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}$, $\bar{u}_{k,i} = \bar{u}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ в (10), получаем сеточное уравнение, аппроксимирующее уравнения (1).

Пусть $(z)_{\tau,h}$ — значение точного решения, соответствующее управлениям $\upsilon = \bar{\upsilon}(t, x)$, $u = \bar{u}(t, x)$ задачи (1) в узлах сетки, $\bar{z}_{k,i}$ — решение, соответствующее управлениям $\bar{\upsilon}_{k,i} = \bar{\upsilon}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}$, $\bar{u}_{k,i} = \bar{u}_{k,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ разностной задачи (10), тогда из (11) и из условия теоремы имеем

$$\left\| (z)_{\tau,h} - \bar{z}_{k,i} \right\|_{\Phi_{\tau h}} \le K_1\tau + K_2 h^2 < \varepsilon.$$

Отсюда, имея то, что $\bar{z}_{k,i} \in \bar{M}_1$, при $k = d$ и некоторых $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, получаем $(z)_{\tau h} - \bar{z}_{k,i} \in \varepsilon I$, $(z)_{\tau h} \in \varepsilon I + \bar{z}_{k,i}$, $(z)_{\tau h} \in \varepsilon I + \bar{M}_1$, что и требовалось доказать.

Заключение

Резюмируя полученные результаты, приходим к выводу, что дифференциальные игры преследования (1)–(3), начинающиеся из начального положения, могут быть закончены за время, не превосходящее *T*. Таким образом, для решения игровой задачи преследования вида (1)–(3) перейдем к дискретной игре (12). В теоремах 1–3 получены достаточные условия для решения соответствующих задач в дискретной форме. С помощью теоремы 4 получены достаточные условия для решения задач преследования (1)–(3). При решении этой задачи главное значение имеет устойчивость сеточного уравнения (10).

Задача устойчивости сеточного уравнения (10) заключается в нахождении условий, при выполнении которых численная погрешность $z_{k,i} - (z)_{\tau h}$, $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ при возрастании k равномерно по всем i_s, $0 \le s \le n$, стремится к нулю или, по крайней мере, остается ограниченной. Если порождающиеся в процессе счета погрешности округления, по мере их возникновения, имеют тенденцию убывать или хотя бы не возрастать, то уравнение (10) является устойчивым. С помощью метода конечных разностей получены новые достаточные условия для задачи преследования в управляемых системах описываемого уравнениями диффузии дробного порядка в многомерной области.

М.Ш. Маматов, Ж.Т. Нуритдинов, Е.Е. Есонов

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вивчено задачу переслідування в диференціальних іграх дробового порядку з розподіленими параметрами. Приватні дробові похідні за часом і просторовими змінними розглядаються в сенсі Рімана–Ліувілля, при апроксимації застосовується формула Грюнвальда–Летникова. Розглядається задача попадання в деякій позитивній околиці термінальні безлічі. Для вирішення застосовується метод кінцевих різниць. Апроксимуються дробові похідні Рімана–Ліувілля за просторовими змінними на відрізку за допомогою формули Грюнвальда–Летникова. За достатньою ознакою існування дробової похідної отримано різницеву апроксимацію похідної дробового порядку за часом. Апроксимуючи диференціальну гру на явну різницеву, отримуємо дискретну гру. Сформульовано відповідну задачу переслідування для дискретної гри, яку отримано за допомогою апроксимації неперервної гри. Визначено поняття можливості завершення переслідування, дискретної гри в сенсі точного упіймання. Отримано достатні умови для можливості завершення переслідування. При цьому показано, що порядок апроксимації за часом дорівнює одиниці, а за просторовими змінними — двом. Доведено, якщо в дискретній грі з заданого початкового положення можливе завершення переслідування в сенсі точного упіймання, то в безперервній грі з відповідного початкового положення можливе завершення переслідування. Запропоновано структуру побудови управлінь переслідування, яка забезпечить завершення гри за кінцевий час. Методи, що застосовуються для цієї задачі, можуть бути використані для вивчення диференціальних ігор, що описуються більш загальними рівняннями дробового порядку.

Ключові слова: диференціальні ігри, дискретні ігри, переслідування, тікання, термінальна множина, управління переслідуванням.

M.Sh. Mamatov, J.T. Nuritdinov, E.E. Esonov

DIFFERENTIAL GAMES OF FRACTIONAL ORDER WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

The article deals with the problem of pursuit in differential games of fractional order with distributed parameters. Partial fractional derivatives with respect to time and space variables are understood in the sense of Riemann - Liouville, and the Grunwald-Letnikov formula is used in the approximation. The problem of getting into some positive neighborhood of the terminal set is considered. To solve this problem, the finite difference method is used. The fractional Riemann-Liouville derivatives with respect to spatial variables on a segment are approximated using the Grunwald-Letnikov formula. Using a sufficient criterion for the existence of a fractional derivative, a difference approximation of the fractional-order derivative with respect to time is obtained. By approximating a differential game to an explicit difference game, a discrete game is obtained. The corresponding pursuit problem for a discrete game is formulated, which is obtained using the approximation of a continuous game. The concept of the possibility of completing the pursuit, a discrete game in the sense of an exact capture, is defined. Sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit. It is shown that the order of approximation in time is equal to one, and in spatial variables is equal to two. It is proved that if in a discrete game from a given initial position it is possible to complete the pursuit in the sense of exact capture, then in a continuous game from the corresponding initial position it is possible to complete the pursuit in the sense of hitting a certain neighborhood. A structure for constructing pursuit controls is proposed, which will ensure the completion of the game in a finite time. The methods used for this problem can be used to study differential games described by more general equations of fractional order.

Keywords: differential games, discrete games, pursuit, evasions, terminal set, pursuit control.

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : *Elsevier*, 2006. 500 p.
2. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York : Wiley & Sons, 1993. 384 p.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
4. Летников А.В., Черных В.А. Основы дробного исчисления. М. : Нефтегаз, 2011. 430 с.
5. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. М. : Физматлит, 2003. 272с.
6. Баззаев А.К., Цопанов И.Д. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. *Уфимский математический журнал.* 2019. **11**, № 2. С. 19–35.
7. Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2009. № 1 (18). С. 267–270.
8. Таукенова Ф.И., Шхануков–Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2006. **46**, № 10. 1871–1881.
9. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Int. J. Optimization methods and software*. 2008. **23**, N 1. P. 39–73.
10. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2011. **17**, № 2. С. 256–270.
11. Чикрий А.А. Об игровых задачах сближения для квазилинейных дискретных систем дробного порядка. *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014*, Москва, 16–19 июня 2014 г.
12. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка. *Дифференц. уравнения.* Минск. 2005. **41**, № 8. С. 1114–1121.
13. Mamatov M.Sh. About application of a method of finite difference to the decision a prosecution problem in systems with the distributed parameters. *Automation and Remote Control.* 2009. **70**. С. 1376–1384.
14. Mamatov M.Sh. Differential games of pursuit for the two-dimensional heat equation with derivatives of fractional order. *Optimal Control and Deferential Games, Materials of the International Conference, dedicated to the 110 the anniversary of Lev Semenovich Pontryagin* (Moscow, December 12-14, 2018). Moscow : MAKS Press Publ., 2018. P. 167–170.
15. Mamatov M., Sobirov K. On the theory of position pursuit differential games. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. **245**. P. 332–340.
16. Mamatov M.Sh., Durdiyev D.Q, Alimov H.N. On the theory of fraction order differential games of pursit. *Journal of Applied Mathematics and Physics.* 2016. P. 1578–1584.
17. Mamatov M., Zunnunov A., Esonov E. Quantitative analysis of the problem of lion and man in the presence of a circular obstacle. *Journal of Automation and Information sciences.* 2020. **52**. P. 42–52.

Получено 19.01.2021