УДК 681.518

*В.В. Собчук, Г.И. Харкевич*

# О ЗАВИСИМОСТИ КАЧЕСТВА МАШИННОГО ПЕРЕВОДА ТЕКСТА ОТ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

**Ключевые слова:** распознавание образов, метод цифровых преобразований, кодирование сигналов, обработка информации, ряд Фурье, преобразование Фурье, машинный перевод.

## Введение

В настоящее время, когда движение информационных потоков не знает границ во времени и пространстве, роль перевода, а именно машинного, неустанно возрастает. Существует две основные группы программ, которые облегчают труд переводчика: электронные словари и системы машинного перевода. Системы машинного перевода, которые обеспечивают последовательный перевод текстов, появились в ответ на потребности пользователей в оперативном переводе информации, представленной в электронном виде. Машинный перевод широко используется в научной, технической, коммерческой отраслях, что связано с процессом глобализации и, соответственно, расширением сети деловых отношений.

Усиление процессов глобализации, стремительное развитие современного общества и технологий изменили существующие структуры международных информационных, финансовых, торговых, транспортных и других потоков. Экспансия технологий требует стандартизации процедур обмена информацией. В последнее время электронные деловые операции осуществляются на международном уровне во все большем объеме, широко внедряются, вместо традиционных бумажных сообщений, электронные документы и электронная обработка данных. В результате это позволяет точно выполнять копирование и повторяющиеся действия и, как правило, сократить необходимое для передачи и обработки информации время до долей секунды, а также повышает прозрачность рыночных структур и процессов, способствующих более оперативной реакции рынков.

Поэтому исследование проблематики создания условий для электронного обмена данными, содействия внедрению новых информационных технологий, использования электронного обмена данными для автоматизации оформления и обработки документов, совершенствования информационного обслуживания участников глобальных рынков, а также создания предпосылок для правового обеспечения применения современных информационных (безбумажных) технологий является одной из приоритетных прикладных задач. При этом развитие технологий немыслимо без разработки эффективных математических методов, которые служат фундаментом реализации современных технических решений.

В разнообразных прикладных исследованиях широкое применение находит метод цифровых преобразований [1], основанный на алгоритмах преобразования Фурье. Данный метод в последнее время сформировался и получил новое развитие в качестве одного из основных направлений в области представления и обработки информации. Одно из ключевых мест в эволюции спектральных представлений занимает проблематика применения преобразований Фурье по различным системам базисных функций в задачах устранения избыточности (сжатия данных) и рационального кодирования сигналов. Сущность сжатия данных состоит в сокращении размерности пространства исходного описания в целях повышения информативности данных, их оперативной обработки, экономного хранения и быстрой передачи по каналам связи с полосой конечной пропускной способности. Более того, поскольку обрабатываемые данные зачастую имеют стохастический характер, сжатие случайного процесса позволяет повысить достоверность формируемых статистических характеристик, что служит стимулом для появления как новых математических методов, позволяющих создать эффективные алгоритмы фильтрации, так и возросших требований к точности фильтрации, особенно в случае обработки контрастных сигналов и изображений. Необходимо отметить, что фильтрация преимущественно является не конечным этапом обработки (для улучшения визуального восприятия), а некоторой предобработкой, например, для последующего распознавания образов. Исходными данными для цифровой фильтрации выступают значения (отсчеты) «точного» сигнала или изображения, которые зашумлены (искажены) случайным шумом (погрешностью) различной природы. Фильтрация заключается в построении вычислительной процедуры (алгоритма фильтрации), которая позволила бы достигнуть наилучших результатов в удалении шума из исходного (зашумленного) изображения. Построение алгоритма фильтрации базируется на использовании математических моделей сигнала или изображения и шума, а также на применении различных критериев оптимальности, что в свою очередь порождает многообразие методов и алгоритмов фильтрации.

На практике широко используются частотные алгоритмы фильтрации, в которых обработке подлежат коэффициенты разложения зашумленного сигнала по Фурье-базису. Такие алгоритмы достаточно эффективны с точки зрения удаления шума. При этом большое внимание уделяется выбору параметров алгоритма исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Поэтому важной задачей является оценка сходимости преобразований Фурье и выбор наиболее эффективных методов суммирования рядов Фурье.

### Постановка задачи

Пусть $f(x)$ — суммируемая $2\pi$-периодическая функция $(f \in L_{(0,2\pi)})$ и

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ее ряд Фурье. Согласно [2] обозначим $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ $(n, k = 1, 2, ...;\ \lambda_{n,0} = 1$ для всех $n)$ прямоугольную числовую матрицу. Предположим, что $f \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — заданный класс непрерывных $2\pi$-периодических функций. С помощью матрицы $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ каждой функции $f \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие последовательность рядов

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (1)$$

Пусть матрица $\Lambda=\{\lambda_{n,k}\}$ такова, что для каждого $n$ ряд (1) является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_n(f;x;\Lambda)$. Будем считать, что матрица $\Lambda$ определяется последовательностью функций

$$\lambda_n(v),\ 0\le v<\infty, \tag{2}$$

таких, что $\lambda_{n,k}=\lambda\left(\frac{k}{n}\right);\ \lambda_{n,0}=1$ для всех $n$.

Далее предположим, что $\bar{\Lambda}=\{\bar{\lambda}_{n,k}\}$ $(n,k=0,1,2,...;\ \bar{\lambda}_{n,0}=1$ для всех $n$; $\bar{\lambda}_{n,k}=0$ при $k\ge n)$ — треугольная числовая матрица, с помощью которой каждой функции $f\in\mathfrak{M}$ поставим в соответствие полином порядка $n-1$

$$\bar{U}_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{\lambda}_{n,k}(a_n(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx). \tag{3}$$

Как и ранее, пусть матрица $\bar{\Lambda}$ определяется последовательностью функций

$$\bar{\lambda}_n(v),\ 0\le v<\infty, \tag{4}$$

таких, что $\bar{\lambda}_{n,k}=\lambda\left(\frac{k}{n}\right);\ \bar{\lambda}_n(0)=1$ для всех $n$; $\bar{\lambda}_n(v)=0$ при всех $v\ge 1$.

При решении некоторых типов игровых задач динамики [3–11] довольно часто приходится сталкиваться с решениями интегрально-дифференциальных уравнений эллиптического типа. Одним из таких решений (наиболее востребованных в прикладной математике) указанных выше уравнений является так называемый интеграл Абеля–Пуассона [12, 13] или просто Пуассона [14–18]

$$P_\rho(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt,\quad 0\le\rho<1. \tag{5}$$

Если воспользоваться соотношением $\dfrac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt$ из работы [19], то формула (5) примет вид

$$P_\rho(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\right)dt. \tag{6}$$

Аналогично [20], выполнив в правой части (6) замену $\rho=-\dfrac{1}{\ln n}$, имеем

$$P_\rho(f;x):=P_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{n}}\cos kt\right)dt. \tag{7}$$

Если в соотношение (1) подставить значение соответствующих коэффициентов Фурье, то вследствие некоторых очевидных преобразований получим

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}\cos k(t-x)\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,k}\cos kt\right)dt. \tag{8}$$

Таким образом, сопоставляя соотношения (7) и (8), приходим к выводу, что если $\lambda_{n,k} = e^{-\frac{k}{n}}$ $(n, k = 1, 2, ...)$, то имеем конкретный пример прямоугольного линейного матричного метода суммирования ряда Фурье — метода Абеля–Пуассона $U_n(f; x; \Lambda) := P_n(f; x)$, для которого согласно (2)

$$\lambda_n(v) = e^{-v},\ 0 \le v < \infty. \tag{9}$$

Аналогичным образом можно построить полином порядка $n-1$

$$\bar{U}_n(f; x; \Lambda) := \bar{P}_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}} \cos kt\right) dt, \tag{10}$$

который будет примером треугольного линейного матричного метода суммирования Абеля–Пуассона, для которого $\bar{\lambda}_{n,k} = e^{-\frac{k}{n}}$ $(n, k = 0, 1, 2, ...;$ $\bar{\lambda}_{n,k} = 0$ при $k \ge n)$. Согласно (4) для этого треугольного линейного матричного метода Абеля–Пуассона $\bar{\lambda}_n(v) = e^{-v},\ 0 \le v < 1,$ и $\bar{\lambda}_n(v) = 0$ при всех $v \ge 1.$

Большое значение при решении многих прикладных задач имеет факт принадлежности исследуемой функции (которая описывает тот или иной естественный процесс) к тому или иному классу функций, который выше обозначался $\mathfrak{M}.$ В данном случае классом таких функций обязательно должен быть класс гладких функций. Очевидно, что чем более гладкая функция, тем она удобнее для различных исследований. А степень гладкости функций напрямую зависит от количества ее производных, т.е. чем больше производных имеет функция, тем она более гладкая. И здесь в исследованиях не обойтись без класса дифференцируемых функций $W_\alpha^r$ в понимании Вейля–Надя [2, с. 130]. Таким образом, пусть $r > 0$ и $\alpha$ — фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k(f)\cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi \in L_{(0,2\pi)}$, то такую функцию $\varphi$ называют $(r, \alpha)$-производной функции $f$ в смысле Вейля–Надя [2, с. 130] и обозначают $f_\alpha^r(\cdot).$ Множество функций $f \in L_{(0,2\pi)}$, которые удовлетворяют такому условию, обозначают $W_\alpha^r.$ Среди всех функций класса $W_\alpha^r$ особо следует выделить подкласс функций $W_0^1,$ который является своего рода отправной точкой во всех исследованиях данного направления.

Рассмотрим на классе функций $W_0^1$ следующие величины:

$$\mu_n(v) = \frac{1 - \lambda_n(v)}{v},\quad 0 \le v < \infty, \tag{11}$$

$$\bar{\mu}_n(v) = \frac{1 - \bar{\lambda}_n(v)}{v},\quad 0 \le v < \infty. \tag{12}$$

 ISSN 0572-2691

Важнейшую роль при исследовании качества воспроизводимого сигнала в машинных переводах текстов играют преобразования Фурье указанных выше функций (11) и (12) вида

$$A(\mu_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \mu_n(v) \cos\left(vt + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dv \right| dt, \tag{13}$$

$$A(\bar{\mu}_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \bar{\mu}_n(v) \cos\left(vt + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dv \right| dt, \tag{14}$$

в частности, их скорость сходимости.

## О скорости сходимости преобразований Фурье треугольных и прямоугольных $\Lambda$-методов суммирования рядов Фурье

Интересным с точки зрения прикладной математики (и не только!) будет найти скорость сходимости интегралов (13) и (14) и сравнить их между собой. Именно это и будет основной целью данной работы.

Поэтому согласно (4) и (10) для треугольного матричного метода суммирования Абеля–Пуассона положим, что

$$\bar{\lambda}_n(v) = \bar{\lambda}(v) = \begin{cases} e^{-v}, & 0 \le v \le 1 - \frac{1}{n}, \\ ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}(1-v), & 1 - \frac{1}{n} \le v \le 1, \\ 0, & v \ge 1. \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, из (12) и (15) для всех функций $f \in W_0^1$, аналогично [21–24], определим суммирующую функцию

$$\bar{\mu}_n(v) = \bar{\mu}(v) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-v}}{v}, & 0 \le v \le 1 - \frac{1}{n}, \\ \dfrac{1-ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}(1-v)}{v}, & 1 - \frac{1}{n} \le v \le 1, \\ \dfrac{1}{v}, & v \ge 1. \end{cases} \tag{16}$$

Перейдем к оценке интеграла (14), который представляет собой не что иное, как преобразование Фурье-функции $\bar{\mu}_n(v)$, заданной с помощью соотношения (16). Согласно формуле (1.40) из работы [25] для всех $f \in W_0^1$ имеет место оценка

$$A(\bar{\mu}_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\left|\bar{\lambda}_n(v)\right|}{1-v} dv + O\left( \frac{1}{n} \int_{1-\frac{2}{n\pi}}^{1} \frac{\left|\bar{\lambda}_n(v)\right|}{1-v} dv \right) + \\ + O\left( \frac{1}{n} \int_0^1 v(1-v) \left| d\mu_n'(v) \right| \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \; n \to \infty. \tag{17}$$

Для оценки первого слагаемого из правой части (17), согласно представлению (15) для функции $\bar{\lambda}_n(v)$, запишем его в виде

$$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\left|\bar{\lambda}_n(v)\right|}{1-v}dv=\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{e^{-v}}{1-v}dv+\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}dv. \tag{18}$$

Отметим, что для второго слагаемого из правой части (18) имеет место очевидная оценка

$$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}dv=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{19}$$

Чтобы найти первый интеграл из правой части (18), воспользуемся формулой (3.352(3)) из [26, с. 325]

$$\int_\alpha^\beta\frac{e^{-\eta x}}{x+\gamma}dx=e^{\gamma\eta}\{\mathrm{Ei}[-(\gamma+\beta)\eta]-\mathrm{Ei}[-(\gamma+\alpha)\eta]\}, \tag{20}$$

где $-\gamma<\alpha$ или $-\gamma>\beta$, $\operatorname{Re}\eta>0$, $E_i(z)$ — интегральная показательная функция [26, с. 939].

Тогда, согласно (20),

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{e^{-v}}{1-v}dv=e^{-1}\left(\mathrm{Ei}(1)-\mathrm{Ei}\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{21}$$

Из [26, с. 941–942] известно, что

$$\mathrm{Ei}(1)=1{,}895\,117\,816...,$$

$$\mathrm{Ei}(x)=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\cdot k!},$$

где $C=0{,}577...$ — постоянная Эйлера. Следовательно,

$$\mathrm{Ei}\left(\frac{1}{n}\right)=C+\ln\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot k!n^k}. \tag{22}$$

Очевидно, что ряд из правой части (22) сходится и, кроме того, имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot k!n^k}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{n-1}=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty. \tag{23}$$

Поэтому, сопоставляя соотношения (18)–(23), получим, что

$$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\left|\bar{\lambda}_n(\nu)\right|}{1-v}dv=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{e\cdot n}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{24}$$

Аналогичным образом можно показать справедливость оценки


ISSN 0572-2691

$$\frac{1}{n}\int\limits_{1-\frac{2}{n\pi}}^{1}\frac{\overline{\lambda}_n(\nu)}{1-v}dv=O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty, \tag{25}$$

для той же функции $\overline{\lambda}_n(\nu)$, заданной с помощью соотношения (15).

Найдем оценку интеграла $\int\limits_0^1 v(1-\nu)\left|d\mu_n'(\nu)\right|$, в котором функция $\overline{\mu}_n(\nu)$ задана посредством соотношения (16).

Из формулы (16) следует, что

$$\overline{\mu}''(\nu)=-e^{-v} \tag{26}$$

для всех $v\in[0;1]$. Если $v\in\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$, то $\overline{\mu}'(\nu)=\frac{e^{-v}}{v}-\frac{1-e^{-v}}{v^2}$, следовательно,

$$\overline{\mu}''(\nu)=-\frac{e^{-v}}{v}-\frac{2e^{-v}}{v^2}+\frac{2(1-e^{-v})}{v^3}\geq 0. \tag{27}$$

Если $v\in\left[1-\frac{1}{n};1\right]$, то

$$\overline{\mu}'(\nu)=-\left(1-ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)\frac{1}{v^2},\ \overline{\mu}''(\nu)=\frac{2ne^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{v^3}<0. \tag{28}$$

Учитывая оценку (26) и очевидное неравенство $(v-v^2)e^{-v}\leq\frac{1}{4},\ v\geq 0,$ получаем, что

$$\int\limits_0^{\frac{1}{n}} v(1-v)\left|d\overline{\mu}'(v)\right|=\int\limits_0^{\frac{1}{n}} v(1-v)e^{-v}dv\leq\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{1}{n}} dv=\frac{1}{4n}. \tag{29}$$

Так как функция $\overline{\mu}_n(v)$ на промежутке $\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]$ выпуклая вниз, то из (27) и следующих очевидных неравенств

$$v-v^2\leq\frac{1}{4},\ \ v\in R, \tag{30}$$

$$e^{-v}\leq 1,\ \ e^{-v}\leq 1-v,\ \ v\geq 0, \tag{31}$$

имеем оценку

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} v(1-v)\left|d\overline{\mu}_n'(v)\right|\leq\frac{1}{4}\left(\overline{\mu}_n'\left(1-\frac{1}{n}\right)-\overline{\mu}_n'\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1+e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{4\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+$$

$$+\frac{1-e^{-\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}}{4\left(\frac{1}{n}\right)^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}+\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)\leq C_1,\ \ (C_1=\text{const}). \tag{32}$$

Поскольку при всех $v\in\left[1-\frac{1}{n};1\right]$ функция $\bar{\mu}_n(v)$ выпуклая вверх, то, учитывая (28) и неравенства (30), (31), имеем

$$\int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} v(1-v)\left|d\bar{\mu}_n'(v)\right|\le\frac{1}{4}\left(\bar{\mu}_n'\left(1-\frac{1}{n}\right)-\bar{\mu}_n'(1)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{1-\frac{1}{n}}-\frac{1-e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+1-\frac{2}{e}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}+\left(1-\frac{2}{e}\right)\right)\le C_2,\ \ (C_2=\text{const}). \qquad (33)$$

Таким образом, сопоставляя соотношения (29), (32) и (33), окончательно получим

$$O\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\bar{\mu}_n'(v)\right|\right)=O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (34)$$

И наконец, подставляя соотношения (25) и (34) в правую часть равенства (17), получим скорость сходимости преобразования Фурье треугольного линейного матричного метода суммирования Абеля–Пуассона (10) для всех функций $f\in W_0^1$, а именно

$$A(\bar{\mu}_n)=\frac{4}{\pi^2 e}\cdot\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n\to\infty. \qquad (35)$$

В заключительной части данной работы займемся изучением для всех функций $f\in W_0^1$ скорости сходимости преобразования Фурье функции

$$\mu_n(v)=1-\lambda_n(v)=\frac{1-e^{-v}}{v},\ \ 0\le v<\infty\ ,$$

(см. формулы (9) и (13)), представляющей собой прямоугольный линейный матричный метод суммирования Абеля–Пуассона, т.е. займемся оценкой интеграла

$$A\left(\mu_n\right)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\frac{1-e^{-v}}{v}\cos vt dv\right|dt. \qquad (36)$$

Для этого воспользуемся формулой (3.951(3)) из [26, с. 507]

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\gamma x}-e^{-\beta x}}{x}\cos bx dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\beta^2}{b^2+\gamma^2},\ [\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma\ge 0]\ ,$$

согласно которой

$$\int\limits_0^{\infty}\mu_n(v)\cos vt dv=\int\limits_0^{\infty}\frac{1-e^{-v}}{v}\cos vt dv=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+1}{t^2}. \qquad (37)$$

Кроме того, имеет место формула (4.222(1)) из [26]

$$\int\limits_0^{\infty}\ln\frac{t^2+a^2}{t^2+b^2}dt=(a-b)\,\pi,\ \ a>0,\ \ b>0. \qquad (38)$$

Объединяя соотношения (36)–(38), имеем

$$A(\mu_n)=\frac{1}{\pi n}\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\frac{1-e^{-v}}{v}\cos vt dv\right|dt=\frac{2}{\pi n}\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\frac{1-e^{-v}}{v}\cos vt dv\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^\infty\left|\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+1}{t^2}\right|dt=\frac{1}{n}. \qquad (39)$$

Таким образом, оценка (39) показывает не только сходимость преобразования Фурье прямоугольного линейного матричного метода суммирования Абеля–Пуассона (7) для всех функций $f\in W_0^1$, но и саму скорость сходимости данного метода.

*Замечание.* Следует отметить, что если рассматривать преобразование Фурье других прямоугольных линейных матричных методов суммирования, таких как Гаусса–Вейерштрасса [27], бигармонического [28–32], обобщенного [33–36] и тригармонического [37] интегралов Пуассона, то для них также можно получить оценки, аналогичные (39). Кроме того, для сравнения можно получить оценки типа (35) для соответствующих треугольных линейных матричных методов Гаусса–Вейерштрасса, бигармонического, обобщенного и тригармонического интегралов Пуассона.

## Заключение

В ходе проведенных в данной работе исследований установлено, что преобразование Фурье (13) и (14) суммирующих функций $\overline{\mu}_n(v)$ и $\mu_n(v)$, задающих соответственно треугольный и прямоугольный линейные матричные методы суммирования Абеля–Пуассона, суммируемо на всей числовой оси. Более того, сравнивая полученные оценки (39) и (35), приходим к выводу, что скорость сходимости преобразования Фурье суммирующей функции $\mu_n(v)$ прямоугольного линейного матричного метода Абеля–Пуассона для всех $f\in W_0^1$ в $\ln n$ раз лучше скорости сходимости преобразования Фурье уже суммирующей функции $\overline{\mu}_n(v)$ треугольного линейного матричного метода Абеля–Пуассона.

Применение полученных оценок в алгоритмах фильтрации позволит улучшить их эффективность. Фильтрация преимущественно является не конечным этапом обработки, а некоторой предобработкой, например, для последующего распознавания образов. Построение вычислительной процедуры (алгоритма), позволяющей достигнуть наилучших результатов в удалении шума из исходного изображения, на основе полученных оценок обеспечит повышение эффективности методов цифровой фильтрации сигналов и изображений.

Таким образом, можно сделать вывод, что для более качественного машинного перевода технических текстов, очевидно, следует использовать преобразование Фурье именно прямоугольных линейных матричных методов суммирования, использование которых находит свое подтверждение в работах прикладного характера [38–41]. Более того, его использование позволит качественно повысить скорость и частоту идентификации текстовой информации с дальнейшей обработкой и использованием в формате качественных цифровых данных.

*В.В. Собчук, Г.І. Харкевич*

# ЗАЛЕЖНІСТЬ ЯКОСТІ МАШИННОГО ПЕРЕКЛАДУ ТЕКСТУ ВІД ВИКОРИСТОВУВАНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Машинний переклад широко використовується при перекладі різної комерційної, технічної, наукової інформації, що пов'язано з процесом глобалізації і відповідно розширенням мережі ділових відносин. Математичні методи, що стосуються машинних перекладів текстів, останнім часом отримали новий поштовх у зв'язку з інтенсивним розвитком теорії перетворення Фур'є. Так, при обробці контрастних сигналів та зображень зросли вимоги до точності фільтрації, які згодом дозволять створювати ефективніші алгоритми фільтрації. Серед існуючих алгоритмів фільтрації найбільш ефективними є частотні алгоритми, тобто такі, в яких обробці підлягають коефіцієнти розкладу зашумленого сигналу по Фур'є-базису. При використанні алгоритмів Фур'є фільтрації важливу роль відіграють властивості перетворення Фур'є, які, в свою чергу, залежать від належності до того чи іншого класу диференційовних функцій. Необхідною умовою для існування неперервного перетворення Фур'є є абсолютна збіжність деяких функцій, за допомогою якої описується досліджуваний реальний процес. У ролі таких функцій, що моделюються, на практиці дуже часто використовують так звані "підсумовуючі функції", які дуже зручно будувати за допомогою лінійного матричного підсумовування рядів Фур'є. Що стосується останніх, то тут прийнято розрізняти як трикутні, так і прямокутні лінійні матричні методи. Роботу присвячено дослідженню умов збіжності перетворень Фур'є як трикутних, так і прямокутних лінійних матричних методів підсумовування рядів Фур'є. Крім того, в даній статті показано, що швидкість збіжності перетворення Фур'є прямокутного лінійного методу Абеля–Пуассона в $\ln n$ разів швидше швидкості збіжності аналогічного трикутного лінійного методу Абеля–Пуассона. Цей результат у подальшому може суттєво впливати на вибір більш ефективного перетворення Фур'є, яке можна буде використовувати у процесі машинного перекладу тексту.

**Ключові слова:** розпізнавання образів, метод цифрових перетворень, кодування сигналів, обробка інформації, ряд Фур'є, перетворення Фур'є, машинний переклад.

*V.V. Sobchuk, G.I. Kharkevych*

## DEPENDENCE OF THE QUALITY OF MACHINE TRANSLATION OF THE TEXT ON THE USED FOURIER TRANSFORMATION

Machine translation is widely used in the translation of commercial, technical, scientific information that is connected with the process of globalization and, accordingly, the expansion of the network of business relations. Mathematical methods related to machine translation of the texts have recently received new development due to the intensive development of Fourier transformation theory. Thus, the requirements for filtering accuracy in the processing of contrast signals and images have increased, allowing to create efficient filtering algorithms. Frequency algorithms are the most efficient of all the existing filtering algorithms, i.e., those where the coefficients of decomposition of the noisy signal by Fourier basis are the subject to processing. When using Fourier filtering algorithms, the properties of Fourier transformation play an important role, that depend on belonging to a particular class of differential functions. The necessary condition for the existence of the continuous Fourier transformation is the absolute convergence of some functions by means of which the real studied process is describing. In practice, the so-called "summation functions" are often used as simulated functions, which can be constructed using a linear matrix summation of Fourier series. As for the latter, scientists distinguish between both triangular and rectangular linear matrix methods. This paper is devoted to the study of the convergence conditions of Fourier transformations of both triangular and rectangular linear matrix methods for summing Fourier series. Moreover, this article shows that the rate of convergence of Fourier transformation of the rectangular linear Abel-Poisson method is at $\ln n$ times faster than the rate of convergence of the analogous triangular linear Abel-Poisson method. This result can further significantly influence the choice of the more effective Fourier transformation used in the process of machine translation of the text.

**Keywords:** image recognition, method of digital transformations, signal coding, information processing, Fourier series, Fourier transformation, machine translation.

1. Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В., Колкер А.Б. Фильтрации сигналов и изображений: Фурье и Вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad): монография. Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.

2. Степанец А.И. Методы теории приближения. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
3. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. On a differential game in a system with distributed parameters. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2016. **292**. P. 276–285. DOI: 10.1134/S0081543816020243.
4. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2007. **9**. P. 37–55. DOI: 10.1007/978-0-8176-4553-3_2.
5. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
6. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
7. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291** (Suppl 1). P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
8. Chikrii A.O., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in dynamic games of approach. *Cybernet. and Systems Anal.* 2014. **50**, N 2. P. 201–217. DOI: 10.1007/s10559-014-9607-7.
9. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernet. and Systems Anal.* 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
10. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **268** (Suppl 1). P. 54–70. DOI: 10.1134/s0081543810050056.
11. Chikrii A.A., Matichin I.I. Riemann-Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: Breton M., Szajowski K. (eds) *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games*. Boston : Birkhäuser, 2011. **11**. P. 61–81. DOI: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4.
12. Харкевич Ю.И., Ханин А.Г. Аппроксимативные свойства операторов типа Абеля−Пуассона на обобщенных классах Гельдера. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2021. № 1. С. 76–83.
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
14. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of $(\psi, \beta)$-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
15. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
17. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals. *Carpathian Math. Publ.* 2020. **12**, N 1. P. 138–147. DOI: 10.15330/cmp.12.1.138-147.
18. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by $\lambda$-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
20. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
21. Abdullayev F.G., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2020. **72**, N 1. P. 21–38. DOI: 10.1007/s11253-020-01761-6.
22. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of $(\psi, \beta)$-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.

24. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
25. Новикова А.К. О приближении функций в пространствах *C* и *L*. Вопросы суммирования рядов Фурье. Киев : Ин-т математики АН УССР. 1985. С. 14–51. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
27. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of $(\psi, \beta)$-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J*. 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
30. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
31. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
32. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253009-0217-x.
33. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80.
34. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class $W^r$ from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
35. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poissoin integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 4. P. 43–54.
36. Харкевич Ю.И. Точные равенства приближения функций класса Соболева их обобщенными интегралами Пуассона. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2021. N 2. С. 93–101.
37. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
38. Kharkevych G., Kharkevych Yu., Kal'chuk I., Sobchuk V. Usage of Fourier transformation theory in machine translation. *2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020)*. Ukraine : Kyiv, 2020. P. 196–199. DOI: 10.1109/ATIT50783.2020.9349329.
39. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Yu., Yakovleva A. The usage of interpolation polynomials in the studying of data transmission in networks. *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC)*. Ukraine : Kyiv, 2020. P. 1–4. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239180.
40. Tovkach R., Kharkevych Yu., Kal'chuk I. Application of a Fourier series for an analysis of a network signals. *2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2019 – Proceedings*. 2019. P. 107–110. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030488.
41. Makarchuk A., Kal'chuk I., Kharkevych Yu., Voloshyna T. Usage of Fourier transformation in theoretical studying of signals in data transmission. *2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (IEEE ATIT 2020)*. Ukraine : Kyiv, 2020. P. 192–195. DOI: 10.1109/ATIT50783.2020.9349308.


*Получено 13.04.2021*