УДК 519.216

Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева

ТЕХНОЛОГИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ ПОЛЕЗНЫМ СИГНАЛОМ И ПОМЕХОЙ ПО ОЦЕНКЕ ИХ РЕЛЕЙНОЙ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Ключевые слова: зашумленный сигнал, помеха, полезный сигнал, дисперсия, корреляционная функция, коэффициент корреляции.

Введение

Во многих случаях основная причина получения неадекватных решений при анализе зашумленных сигналов связана с погрешностями результатов обработки измерительной информации [1–3]. Это объясняется тем, что при разработке соответствующих алгоритмов и технологий в недостаточной мере учитывается специфика формирования реальных сигналов [1–3]. Поэтому не удается использовать огромный информационный потенциал зашумленных сигналов, и результаты решения многочисленных важнейших задач получаются ошибочными [4–9].

Например, при корреляционном анализе зашумленных сигналов $G(t) = X(t) + E(t)$ считается, что такие классические условия, как стационарность, нормальность закона распределения и отсутствие корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $E(t)$, выполняются. Однако в системах мониторинга и контроля достаточно часто при возникновении неисправностей нарушается такое важное условие, как отсутствие корреляции между полезным сигналом и помехой [1].

Исследования показали, что для полного использования колоссального информационного потенциала зашумленных сигналов созрела необходимость создания таких технологий, которые как при выполнении предполагаемых классических условий, так и при их невыполнении обеспечивали бы адекватность полученных результатов решаемых задач. Для этого необходимо создать технологии, позволяющие извлечь из сигналов как можно большее количество полезной информации [10–14]. Один из возможных вариантов решения этой задачи сводится к созданию технологий, позволяющих извлечь информацию как из помехи, так и из характеристик взаимосвязи между полезном сигналом и помехой [1–3].

Постановка задачи

Известно, что на практике реальные сигналы представляют собой сумму полезных сигналов $X(t)$ и помех $E(t)$, т.е.

$$G(t) = X(t) + E(t). \tag{1}$$

Из-за зашумленности полезных сигналов $X(t)$ помехами $E(t)$ при определении оценок их корреляционных функций $R_{XX}(\mu)$ возникают ощутимые погрешности.

При этом, как показано в [1, 10–14], суммарная помеха $E(t)$ складывается из помехи $E_1(t)$ от влияния внешних факторов и шума $E_2(t)$, который возникает от зарождения дефекта в процессе эксплуатации объектов, т.е.

$$E(t) = E1(t) + E2(t). \tag{2}$$

Предположим, что $G(t)$ — дискретизированный стационарный случайный сигнал с нормальным законом распределения, состоящий из полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$ с математическим ожиданием m_{E}, равным нулю. При этом формула вычисления оценки D_G дисперсии зашумленного сигнала $G(t)$ имеет вид [1, 10–14]

$$D_G = R_{GG}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G^2(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left[X(i\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)\right]\left[X(i\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^2(i\Delta t) + 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}^2(i\Delta t) =$$

$$= R_{XX}(0) + 2R_{X\mathrm{E}}(0) + R_{\mathrm{EE}}(0). \tag{3}$$

Следовательно, погрешность полученного результата равна

$$\lambda_{GG}(\mu = 0) = 2R_{X\mathrm{E}}(0) + R_{\mathrm{EE}}(0) = D_{\mathrm{E}},$$

где $R_{X\mathrm{E}}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t)$ — взаимная корреляционная функция между полезным сигналом и помехой; $R_{\mathrm{EE}}(0) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t)$ — дисперсия помехи $\mathrm{E}(t)$.

Формулу для вычисления оценки корреляционной функции $R_{GG}(\mu)$ при $\mu \neq 0$ можно также представить в виде [1, 10–14]

$$R_{GG}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(i\Delta t)G((i+\mu)\Delta t) \approx$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left[X(i\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)\right]\left[X((i+\mu)\Delta t) + \mathrm{E}((i+\mu)\Delta t)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left[\, X(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{E}(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + X(i\Delta t)\mathrm{E}((i+\mu)\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)\mathrm{E}((i+\mu)\Delta t)\,\right] =$$

$$= R_{XX}(\mu) + R_{\mathrm{E}X}(\mu) + R_{X\mathrm{E}}(\mu) + R_{\mathrm{EE}}(\mu). \tag{4}$$

Учитывая, что $R_{\mathrm{EE}}(\mu) = 0$ при $\mu \neq 0$, суммарная погрешность будет равна

$$\lambda_{GG}(\mu) \approx \begin{cases} 2R_{X\mathrm{E}}(0) + R_{\mathrm{EE}}(0) & \text{при} \quad \mu = 0, \\ 2R_{X\mathrm{E}}(\mu) & \text{при} \quad \mu \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

В силу этого имеет место очевидное неравенство $R_{XX}(\mu) \neq R_{GG}(\mu)$.

По этой причине на практике во многих случаях по оценке $R_{GG}(\mu)$ не удается обеспечить адекватность результатов решаемых задач, так как при этом часть ценной информации, содержащейся в помехах $\mathrm{E}(t)$ сигналов $\mathrm{G}(t)$, теряется. В связи с этим очевидна необходимость создания алгоритмов и технологий определения оценки дисперсии помехи D_{E} и взаимно-корреляционной функции $R_{X\mathrm{E}}(\mu)$ между полезным сигналом и помехой. Но самое важное заключается в том, что новые технологии должны позволить использовать ценную информацию, которая нередко содержится в помехах зашумленных сигналов $G(t)$, для решения задач мониторинга, контроля и других практических задач [1, 10–15]. При этом разрабатываемые алгоритмы могут иметь также самостоятельный интерес, так как открывают возможность повышения точности традиционных технологий корреляционного анализа зашумленных сигналов. Поэтому ниже приводятся алгоритмы и технологии вычисления не только релейной взаимной корреляционной функции, но и коэффициента корреляции между полезным сигналом и помехой.

Технология определения релейной взаимно-корреляционной функции между полезном сигналом и помехой

Как показано выше, при нормальном режиме эксплуатации объекта, помеха $\mathrm{E}(t)=\mathrm{E}_1(t)$ возникает от случайных внешних факторов, не имеющих корреляции с полезным сигналом $X(t)$. Однако в начале скрытого периода изменения технического состояния объекта в результате зарождения различных дефектов возникает помеха $\mathrm{E}_2(t)$, которая коррелирует с полезным сигналом. Поэтому, начиная с этого момента корреляция между полезным сигналом $X(t)$ и суммарной помехой $\mathrm{E}(t)$ = $\mathrm{E}_1(t)+\mathrm{E}_2(t)$ отличается от нуля. При этом зарождение и развитие неисправностей, по существу, отражается в оценках взаимных корреляционных функций $R_{X\mathrm{E}}(\mu)$ между $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ [1, 10–14]. Поэтому для контроля начала и динамики изменения технического состояния объектов целесообразно использовать оценку $R_{X\mathrm{E}}(\mu)$. Однако довольно часто для контроля латентного периода неисправностей, в первую очередь, необходима технология мониторинга начала скрытого периода перехода объекта в аварийное состояние. Поэтому в системах контроля в некоторых случаях может оказаться целесообразным использование простых технологий сигнализации начала этого процесса. С этой точки зрения в качестве информативного признака для контроля начала скрытого периода возникновения неисправностей целесообразно использовать оценки релейных взаимно-корреляционных функций, которые можно вычислить с помощью формулы [1, 16]

$$R^r_{X\mathrm{E}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)\mathrm{E}((i+\mu)\Delta t).$$

Очевидно, что для применения этой формулы необходимо определение отсчетов помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$ и полезного сигнала $X(i\Delta t)$, которые невозможно измерить непосредственно или выделить из зашумленного сигнала $G(t)$ [1, 14, 15].

В связи с этим рассмотрим один из возможных вариантов приближенного вычисления оценок релейной взаимной корреляционной функции $R^{\mathrm{r}*}_{X\mathrm{E}}(\mu)$ между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ в результате вычисления релейной корреляционной функции $R^r_{GG}(\mu)$ зашумленного сигнала $G(t)$.

Для этого сначала примем следующие обозначения и условия [16]:

$$\operatorname{sgn}G(i\Delta t)=\begin{cases}+1 & \text{when } G(i\Delta t)>0,\\ 0 & \text{when } G(i\Delta t)=0,\\ -1 & \text{when } G(i\Delta t)<0.\end{cases}$$

Тогда релейная корреляционная функция $R^r_{GG}(\mu)$ зашумленного сигнала $G(t)$ будет вычисляться по формуле [16]

$$R_{GG}^{r}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+\mu)\Delta t)\ =$$

$$=\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\left[\mathrm{X}(i\Delta t)+\mathrm{E}(i\Delta t)\right]\left[X((i+\mu)\Delta t)+\mathrm{E}((i+\mu)\Delta t)\right].$$

Учитывая, что [1]

$$\begin{cases}\operatorname{sgn}G(i\Delta t)=\operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t),\\ \operatorname{sgn}G(i\Delta t)G(i\Delta t)=\operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)G(i\Delta t)=\operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)\left[X(i\Delta t)+\mathrm{E}(i\Delta t)\right],\end{cases}\tag{6}$$

выражение для вычисления релейной корреляционной функции $R_{GG}^{r}(\mu)$ при $\mu=0$ зашумленного сигнала $G(t)$ можно представить в виде

$$R_{GG}^{r*}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}G(i\Delta t)G(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)\left[X(i\Delta t)+\mathrm{E}(i\Delta t)\right]\ =$$

$$=\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}X(i\Delta t)X(i\Delta t)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}X(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t)=R_{XX}^{r}(0)+R_{X\mathrm{E}}^{r}(0),\tag{7}$$

где $R_{XX}^{r}(\mu)$, $R_{X\mathrm{E}}^{r}(\mu)$ — релейная корреляционная функция полезного сигнала и взаимная корреляционная функция между полезным сигналом и помехой.

В [1] показано, что оценки релейной взаимной корреляционной функции $R_{X\mathrm{E}}^{r*}(0)$ можно вычислить по выражению

$$R_{X\mathrm{E}}^{r*}(\mu=0)=R_{GG}^{r}(\mu=0)-2R_{GG}^{r}(\mu=1)+R_{GG}^{r}(\mu=2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgnG}(i\Delta t)G(i\Delta t)-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ 2\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+1)\Delta t)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+2)\Delta t)=$$

$$=\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\operatorname{sgnG}(i\Delta t)G(i\Delta t)-2\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+1)\Delta t)+\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+2)\Delta t)\right].\tag{8}$$

Справедливость указанной формулы можно проверить разложением ее правой части на слагаемые, т.е.

$$R_{X\mathrm{E}}^{r*}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \left[\ \operatorname{sgnG}(i\Delta t)G(i\Delta t)-2\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+1)\Delta t)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sgn}G(i\Delta t)G((i+2)\Delta t)\ \right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}X(i\Delta t)\left[X(i\Delta t)+\mathrm{E}(i\Delta t)\right]-$$

$$-2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}X(i\Delta t)\left[X((i+1)\Delta t)+\mathrm{E}((i+1)\Delta t)\right]+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)\left[\ X((i+2)\Delta t)+\right.$$

$$\left.+\ \mathrm{E}((i+2)\Delta t)\ \right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ \operatorname{sgn}\mathrm{X}(i\Delta t)X(i\Delta t)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}X(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t)-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ 2\operatorname{sgn}X(i\Delta t)X((i+1)\Delta t)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ 2\operatorname{sgn}X(i\Delta t)\mathrm{E}((i+1)\Delta t)+$$

 ISSN 1028-0979

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} X(i\Delta t)X((i+2)\Delta t)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} X(i\Delta t)\mathrm{E}((i+2)\Delta t)=$$

$$=R^r_{XX}(0)+R^r_{X\mathrm{E}}(0)-2R^r_{XX}(\Delta t)-2R^r_{X\mathrm{E}}(\Delta t)+R^r_{XX}(2\Delta t)+R^r_{X\mathrm{E}}(2\Delta t). \tag{9}$$

При этом, если выполняются условия стационарности и нормальности закона распределения зашумленных сигналов, то для контролируемых объектов справедливы равенства [1]

$$\begin{cases} R^r_{X\mathrm{E}}(0)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} X(i\Delta t)\mathrm{E}(i\Delta t)\neq 0, \\ R^r_{XX}(0)+R^*_{XX}(2\Delta t)-2R_{XX}(\Delta t)\approx 0, \\ R^r_{X\mathrm{E}}(\Delta t)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} X(i\Delta t)\mathrm{E}((i+1)\Delta t)\approx 0, \\ R^r_{X\mathrm{E}}(2\Delta t)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn} X(i\Delta t)\mathrm{E}((i+2)\Delta t)\approx 0, \end{cases} \tag{10}$$

и благодаря этому правая часть выражения (9) примет вид

$$R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=0)=R^r_{X\mathrm{E}}(\mu=0),$$

что подтверждает справедливость выражения (8).

Таким образом, можно считать, что оценка, полученная по формуле (8), представляет собой оценку релейной взаимной корреляционной функции $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu\Delta t)$ между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$.

Покажем, что оценку $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu\Delta t)$ можно определить при различных временных сдвигах между $X(i\Delta t)$ и $\mathrm{E}(i\Delta t)$. Например, при $\mu=1\Delta t$ формула вычисления оценки $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=1\Delta t)$ будет иметь вид

$$R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big[\operatorname{sgn} G(i\Delta t)G((i+1)\Delta t)-$$

$$-2\operatorname{sgn} G(i\Delta t)G((i+2)\Delta t)+\operatorname{sgn} G(i\Delta t)G((i+3)\Delta t)\Big]. \tag{11}$$

При $\mu=2\Delta t$ формула вычисления оценки $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=2\Delta t)$ будет иметь вид

$$R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=2\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big[\operatorname{sgnG}\left(i\Delta t\right)G((i+2)\Delta t)-$$

$$-2\operatorname{sgnG}(i\Delta t)G((i+3)\Delta t)+\operatorname{sgnG}(i\Delta t)G((i+4)\Delta t)\Big]. \tag{12}$$

Очевидно, что оценки $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=3\Delta t)$, $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu=4\Delta t)$, … можно вычислить аналогичным образом. Следовательно, обобщенную формулу вычисления оценки $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu)$ можно представить в виде

$$R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgnG}(i\Delta t)\big[G((i+\mu)\Delta t)-2G((i+\mu+1)\Delta t)+G((i+\mu+2)\Delta t)\big]. \tag{13}$$

Понятно, что при нормальном техническом состоянии объекта из-за отсутствия корреляции между $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ оценка релейной взаимной корреляционной функции $R^r_{X\mathrm{E}}(\mu=0)$ между полезным сигналом и помехой будет близка к нулю.

Из выражений (9)–(13) очевидно, что при зарождении различных дефектов, предшествующих неисправностям на объекте, величина оценки релейной взаимной корреляционной функции в зависимости от степени корреляции между $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ будет изменяться. Отличительная особенность этого алгоритма связана с тем, что при зарождении различных неисправностей, когда между $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ возникает корреляция, разницы значений оценок $R^{\mathrm{r}*}_{X\mathrm{E}}(\mu = 0)$, $R^{\mathrm{r}*}_{X\mathrm{E}}(\mu = \Delta t)$, $R^{\mathrm{r}*}_{X\mathrm{E}}(\mu = 2\Delta t)$, … в различные моменты времени однозначно отражают динамику развития неисправности, что способствует получению надежной информации о динамике развития аварий объекта.

Алгоритмы определения оценки коэффициента корреляции между полезным сигналом и помехой по релейной корреляционной функции зашумленных сигналов

Известно, что релейная взаимная корреляционная функция $R^{r}_{X\mathrm{E}}(\mu)$ характеризует степень связи между значениями полезного сигнала $X(t)$ в момент времени t и знаком помехи $\mathrm{E}(t)$ в момент времени $t + \mu\Delta t$. При этом зависимость между релейными и нормированными взаимными корреляционными функциями для нормально распределенных случайных процессов $X(t)$, $\mathrm{E}(t)$ выражается соотношением [16]

$$R^{r}_{X\mathrm{E}}(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho_{X\mathrm{E}}(\mu)\sigma_{\mathrm{E}}\,, \tag{14}$$

где $\rho_{X\mathrm{E}}(\mu)$ — нормированная взаимная корреляционная функция между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$, σ_{E} — среднее квадратичное отклонение помехи $\mathrm{E}(t)$.

Отсюда нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{X\mathrm{E}}(\mu)$ можно вычислить по выражению [16]

$$\rho_{X\mathrm{E}}(\mu) = \frac{R^{r}_{X\mathrm{E}}(\mu)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sigma_{\mathrm{E}}}\,. \tag{15}$$

Из этой формулы следует, что для вычисления нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{X\mathrm{E}}(\mu)$ между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ необходимо знание релейной взаимной корреляционной функции $R^{r}_{X\mathrm{E}}(\mu)$ и среднего квадратического отклонения помехи σ_{E}. Очевидно, что по формуле (13) можно вычислить релейную взаимную корреляционную функцию $R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu)$. В то же время в работах [1, 10–15] показано, что среднеквадратическое отклонение σ_{E} помехи можно вычислить по выражениям:

$$\sigma^{*}_{\mathrm{E}} = \begin{cases} \sqrt{R_{GG}(\mu = 0) - 2R_{GG}(\mu = \Delta t) + R_{GG}(\mu = 2\Delta t)} & \text{для общего случая,} \\ \sqrt{R_{GG}(0) - R_{GG}(\Delta t)} & \text{для частного случая,} \end{cases} \tag{16}$$

где $R_{GG}(\mu) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} G(i\Delta t)G((i+\mu)\Delta t)$.

Следовательно, воспользовавшись формулами (13), (16), вычисление нормированной взаимной корреляционной функции можно свести к виду

$$\rho^*_{X\mathrm{E}}(\mu) = \frac{R^{r*}_{X\mathrm{E}}(\mu)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^*_{\mathrm{E}}}. \tag{17}$$

При этом известно, что значение нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{X\mathrm{E}}(0)$ при $\mu = 0$ есть коэффициент корреляции

$$r_{X\mathrm{E}} = \rho_{X\mathrm{E}}(0) = \frac{R^{r}_{X\mathrm{E}}(0)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma_{\mathrm{E}}}. \tag{18}$$

Поэтому, воспользовавшись формулами (13), (16), вычислим значение коэффициента корреляции $r_{X\mathrm{E}}$ между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$:

$$r^*_{X\mathrm{E}} = \rho^*_{X\mathrm{E}}(0) = \frac{R^{r*}_{X\mathrm{E}}(0)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^*_{\mathrm{E}}}. \tag{19}$$

Таким образом, с помощью формул (13), (16), (17), (19) можно вычислить коэффициент корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$.

Технологии проведения вычислительных экспериментов и результаты сравнительного анализа

Для проверки достоверности алгоритма вычисления коэффициента корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ проведены вычислительные эксперименты с использованием средства компьютерной математики MATLAB. Вычислительные эксперименты проводились следующим образом.

Сначала формировался полезный сигнал $X(t)$. Известно, что любой стационарный случайный процесс $X(t)$ на бесконечном интервале T можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией гармонических колебаний со случайной амплитудой и фазой [10–15]. В общем виде совокупность функций [10–15]

$$X_k(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_{\nu k} \cos\left(\frac{2\pi\nu}{T} t + \phi_{1\nu k}\right) + b_{\nu k} \sin\left(\frac{2\pi\nu}{T} t + \phi_{2\nu k}\right)\right)$$

представляет собой случайный процесс, если известны функции распределения вероятности коэффициентов $a_{\nu k}$, $b_{\nu k}$ и фаз $\phi_{\nu k}$, $\phi_{1\nu k}$, $\phi_{2\nu k}$.

Поэтому при проведении вычислительных экспериментов формировались полезные сигналы $X(t)$ в виде суммы гармонических колебаний. Допускалось, что полезный сигнал — стационарный эргодический процесс и $X(t)$ — одна из его реализаций.

После этого с помощью генератора случайных чисел формировалась помеха, которая подчиняется нормальному закону распределения с дискретными значениями $\mathrm{E}(i\Delta t)$. Предполагалось, что это истинная помеха. Формировались зашумленные сигналы $G(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)$. Суть экспериментов сводилась к тому, что вычислялись релейная и нормированная взаимные корреляционные функции и коэффициент корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ по разработанным алгоритмам (13), (16), (17), (19) с использованием значений сформированного зашумленного сигнала $G(i\Delta t)$. Полученные значения сравнивались со значениями этих же характеристик, которые были вычислены по традиционным алгоритмам с использованием сгенерированных дискретных значений полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$. Затем проводился сравнительный анализ. Для этого были определены величины относительных погрешностей по выражениям:

$$\Delta R_{X\mathrm{E}}^{r}(\mu)=\left|R_{X\mathrm{E}}^{r}(\mu)-R_{X\mathrm{E}}^{r*}(\mu)\right| \Big/ R_{X\mathrm{E}}^{r}(\mu)\cdot 100\ \%,$$

$$\Delta D_{\mathrm{E}}=\left|D_{\mathrm{E}}-D_{\mathrm{E}}^{*}\right| \Big/ D_{\mathrm{E}}\ D_{\mathrm{E}},$$

$$\Delta r_{X\mathrm{E}}=\left|r_{X\mathrm{E}}-r_{X\mathrm{E}}^{*}\right| \Big/ r_{X\mathrm{E}}\cdot 100\ \%.$$

Ниже приводятся результаты одного из множества проведенных вычислительных экспериментов. Смоделирован полезный случайный сигнал $X(t)=$ $=\sum\limits_{kk} a_{kk}\cdot\sin\left(2\pi\frac{(k\cdot\omega_{kk})^{n}}{T}+\phi\right)+b$ в виде возмущенной гармонической дискретной функции с начальной фазой ϕ, которая имеет равномерное распределение вероятностей; где $k\in[0,K]$, K = 2598, показатель степени n = 1,5; период сигнала T = 800; начальная фаза ϕ задается в виде rand(size(k))*pi / 3 [12], где функция rand(size(k)) формирует вектор, соразмерный с вектором k, элементами которого являются случайные величины, распределенные по равномерному закону в интервале (0, 1). Коэффициенты a_{kk} и частоты ω_{kk} выбраны следующим образом:

$X(t)$ = 58*sin(z*(k*1,5).^ n + ksi) + 200.

Затем формируется помеха $\mathrm{E}(t)$, которая подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m_{\mathrm{E}}\approx 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\mathrm{E}}\approx 20$.

Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица

Характеристики	Заданные характеристики	Вычисленные характеристики	Относительные погрешности, %
Релейная взаимная корреляционная функция	$R_{X\mathrm{E}}^{r}(0)$ = 5,0364	$R_{X\mathrm{E}}^{r*}(0)$ = 5,0796	$\Delta R_{X\mathrm{E}}^{r}(\mu)$ = 0,857
Дисперсия помехи	D_{E} = 402,31	D_{E}^{*} = 436,35	ΔD_{E} = 8,46
Коэффициент корреляции	$r_{X\mathrm{E}}$ = 0,24366	$r_{X\mathrm{E}}^{*}$ = 0,25153	$\Delta r_{X\mathrm{E}}$ = 3,2

Таким образом, после анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы.

• Заданное $R_{X\mathrm{E}}^{r}(0)$ и вычисленное $R_{X\mathrm{E}}^{r*}(0)$ оценки релейной взаимной корреляционной функции помехи практически совпадают (табл., строка 1), т.е.

$$R_{X\mathrm{E}}^{r}(0)\approx R_{X\mathrm{E}}^{r*}(0),$$

величина относительной погрешности составляет ΔD_{E} = 0,857 %.

• Заданное D_{E} и вычисленное D^*_{E} оценки дисперсии помехи практически совпадают (табл., строка 2), т.е. $D_{\mathrm{E}} \approx D^*_{\mathrm{E}}$, и величина относительной погрешности составляет $\Delta D_{\mathrm{E}} = 8{,}46$ %.

• Заданное $r_{X\mathrm{E}}$ и вычисленное $r^*_{X\mathrm{E}}$ оценки коэффициентов корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ практически совпадают (табл., строка 3), т.е. $r_{X\mathrm{E}} \approx r^*_{X\mathrm{E}}$, и величина относительной погрешности составляет $\Delta r_{X\mathrm{E}} = 3{,}2$ %.

Заключение

Исследования показали, что несмотря на многократное увеличение надежности и точности технических средств, в последние годы трудности обеспечения адекватности полученных результатов в системах контроля продолжают оставаться существенными [1–15]. Для решения этой проблемы необходимо полное использование колоссального информационного потенциала зашумленных сигналов, получаемых на выходах соответствующих датчиков. В связи с этим созрела необходимость создания новых технологий, которые как при выполнении предполагаемых классических условий, так и при их невыполнении обеспечивали бы адекватность результатов задач, решаемых в информационных системах. Для этого необходимы такие технологии, которые позволили бы извлечь из сигналов как можно большее количество информации [1, 10–15]. Предлагаемые в работе технологии определения оценок коэффициентов корреляции между полезным сигналом и помехой позволяют извлечь дополнительную полезную информацию из зашумленных сигналов. Благодаря этому открывается возможность при использовании таких новых эффективных информативных признаков, как коэффициент корреляции, повысить степень достоверности и надежности функционирования современных информационных систем.

Т.А. Алієв, Н.Ф. Мусаєва

ТЕХНОЛОГІЇ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА КОРРЕЛЯЦІЇ МІЖ КОРИСНИМ СИГНАЛОМ І ЗАВАДОЮ З ОЦІНКИ ЇХ РЕЛЕЙНОЇ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

Показано, що часто при формуванні зашумлених сигналів порушується умова відсутності кореляції між корисним сигналом і завадою. Тому при кореляційному аналізі цих сигналів виникають визначені похибки, що стають причиною неадекватності отриманих результатів. Крім того, існуючі технології кореляційного аналізу не дозволяють використовувати завади як носії цінної інформації. Тому для повного використання колосального інформаційного потенціалу зашумлених сигналів необхідно створити нові технології, які як при виконанні відомих класичних умов, так і при їх невиконанні виключили б втрату цінної інформації. Розроблено алгоритми визначення оцінки коефіцієнта кореляції між корисним сигналом і завадою, які неможливо виміряти безпосередньо або виділити з зашумленого сигналу. З цією метою використано нормовану взаємну кореляційну функцію між корисним сигналом і завадою. Розроблено алгоритм обчислення оцінок нормованої взаємної кореляційної функції між корисним сигналом і завадою за оцінками релейної кореляційної функції на зашумлення сигналу. Показано, що значення цієї оцінки, обчислене при нульовому часовому зсуві, становить собою оцінку коефіцієнта кореляції між корисним сигналом і завадою. Проведено технологію обчислювальних експериментів, порівняльний аналіз, підтверджено достовірність запропонованих алгоритмів і технологій. Показано, що при нормальному технічному стані об'єкта оцінки релейної взаємної кореляційної функції і коефіцієнта кореляції між корисним сигналом і перешкодою будуть близькі нулю. При зародженні різних дефектів, що передують неполадкам на об'єкті, ці оцінки залежно від ступеня пошкодження будуть змінюватися. Тому в системах моніторінга і контролю саме оцінки взаємної кореляційної функції і коефіцієнта кореляції між корисним сигналом і завадою доцільно використовувати як інформативні ознаки для сигналізації та контролю початку змін технічного стану об'єктів і динаміки розвитку їх несправностей. Завдяки використанню цих нових ефективних інформативних ознак можна підвищити ступінь достовірності і надійності функціонування сучасних інформаційних систем.

Ключові слова: зашумлений сигнал, завада, корисний сигнал, дисперсія, кореляційна функція, коефіцієнт кореляції.

T.A. Aliev, N.F. Musaeva

TECHNOLOGIES FOR CALCULATING THE CORRELATION COEFFICIENT BETWEEN THE USEFUL SIGNAL AND THE NOISE USING THE ESTIMATE OF THEIR RELAY CROSS-CORRELATION FUNCTION

It is shown that when noisy signals are formed, the condition for the absence of correlation between the useful signal and the noise is often violated. This causes certain errors of correlation analysis of these signals, resulting in the inadequacy of the results obtained. In addition, the existing correlation analysis technologies do not allow using the noise as a carrier of valuable information. Therefore, the full use of the colossal information potential of noisy signals requires new technologies that would exclude the loss of valuable information, both when the known classical conditions are met and when they are not. Algorithms are developed for determining the estimate of the correlation coefficient between the useful signal and the noise, which cannot be measured directly or isolated from a noisy signal. For this purpose, the normalized cross-correlation function between the useful signal and the noise is used. An algorithm for calculating the estimates of the normalized cross-correlation function between the useful signal and the noise is developed using the estimates of the relay correlation function of the noisy signal. It is shown that the value of this estimate, calculated at a zero time shift, is an estimate of the correlation coefficient between the useful signal and the noise. A technology for conducting computational experiments is proposed, a comparative analysis is carried out, and the reliability of the proposed algorithms and technologies is confirmed. It is shown that under the normal technical condition of the object, the estimates of the relay cross-correlation function and the correlation coefficient between the useful signal and the noise will be close to zero. With the emergence of various defects preceding malfunctions at the object, these estimates will change depending on the degree of damage. Therefore, it is the estimates of the cross-correlation function and the correlation coefficient between the useful signal and the noise that should be used in monitoring and control systems as informative attributes for signaling and monitoring the beginning of changes in the technical condition of objects and the dynamics of their malfunctions. The use of these new effective informative attributes makes it possible to increase the degree of accuracy and reliability of operation of modern information systems.

Keywords: noisy signal, noise, useful signal, variance, correlation function, correlation coefficient.

1. Aliev T.A. Noise control of the beginning and development dynamics of accidents, Springer. 2019. 201 p. DOI:10.1007/978-3-030-12512-7.
2. Сандомирский С. Г. Влияние точности измерения и диапазона изменения физической величины на коэффициент корреляции между ее истинными значениями и результатами измерений. *Измерительная техника*. 2014. № 10. С. 13–17. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22651542.
3. Сандомирский С. Г. Зависимость коэффициента корреляции между результатами измерения параметра и его истинными значениями от приведенной погрешности измерения. *Приборы и методы измерений*. 2019. **10**, № 1. С. 90–98. DOI:10.21122/2220-9506-2019-10-1-90-98.
4. Igor N. Javorskyj , Roman M. Yuzefovych , Oxana Yu. Dzeryn , Pavel A. Semenov. Properties of LSM-estimator of correlation function of biperiodically correlated random processes. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 6. P. 44–57. DOI: 10.1615/ JAutomat-InfScien.v52.i6.40.
5. Marinvan Heel, Michael Schatz, Elena Orlova. Correlation functions revisited. *Ultramicroscopy*. 1992. **46**, N 1–4. P. 307–316. https://doi.org/10.1016/0304-3991(92)90021-B.
6. Schulz-DuBois, E.O., Rehberg, I. Structure function in lieu of correlation function. *Applied Physics A*. 1981. N 24, P. 323–329. https://doi.org/10.1007/BF00899730.
7. Farid ASMA. Damage detection by updating using correlation functions. *Scientific Bulletin-University Politehnica of Bucharest, Series D: Mechanical Engineering*. 2011. **73**, N 1. P. 31–42. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full34986.pdf
8. Pinghe Ni, Yong Xia, Siu-Seong Law and Songye Zhu. Structural damage detection using auto/cross-correlation functions under multiple unknown excitations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2014. **14**, N 05. 1440006. https://doi.org/10.1142/S0219455414400069.
9. Bendat J. S., Piersol A. G., Engineering applications of correlation and spectral analysis, 2-nd ed. N. Y.: Wiley, 1993. 458 p. DOI:org/10.2514/3.49131.
10. Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I. Analytic representation of the density function of normal distribution of noise. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47(8)**, № 4. P. 24–40. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.30.
11. Aliev T.A., Musaeva N.F., Gazizade B.I. Algorithms for calculating high-order moments of the noise of noisy signals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 6. P. 1–13. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i6.10.
12. Aliev T.A. & Musaeva N.F. & Suleymanova M.T. Algorithms for Indicating the beginning of accidents based on the estimate of the density distribution function of the noise of technological parameters. *Automatic Control and Computer Science*. 2018. **52**, N 3. P. 231–242. DOI: 10.3103/S0146411618030021.
13. Aliev T.A., Musaeva N.F. Technologies for early monitoring of technical objects using the estimates of noise distribution density. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 9. P. 12–23.
14. Aliyev T. A., Musaeva N.F., Rzayeva N.E., Mammadova A.I. Development of technologies for reducing the error of traditional algorithms of correlation analysis of noisy signals. *Measurement Techniques*, Springer. 2020. N 6. P. 421–430. DOI: 10.32446/0368-1025it.2020-6-9-16.
15. Aliev T.A., Musaeva N.F., Rzayeva N.E., Mamedova A.I. Technologies for forming equivalent noises of noisy signals and their use. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 5. P. 1–12. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v52.i5.10.
16. Козубовский С.Ф. Корреляционные экстремальные системы. Киев: Наук. думка, 1973. 224 с. https://scask.ru/f_book_kiber2.php?id=419.

Получено 17.07.2021