

# КОСМИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

---

УДК 629.7.05

*В.В. Волосов, В.Н. Шевченко*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ

**Ключевые слова:** космический аппарат, параметры ориентации и уравнения их эволюции, кинематическая и динамическая задачи управления ориентацией, синтез стабилизирующего управления, отслеживание программы изменения ориентации.

### Введение

Современные космические аппараты (КА) являются сложными многофункциональными информационно-динамическими системами, предназначенными для выполнения все более расширяющегося спектра различных научных исследований и решения прикладных задач, или, иначе говоря, выполнения все более усложняющихся программ полета (космических миссий). Системы управления ориентацией и навигации являются одними из основных систем современных КА, которые определяют его функциональные возможности. Так, в частности, без прецизионных систем управления ориентацией и навигацией КА дистанционного зондирования Земли невозможно получать снимки с высокой разрешающей способностью и высокоточной картографической привязкой, которые имеют повышенный спрос. Наряду с этими прикладными задачами так же невозможно и выполнение ряда теоретических астро- и геофизических научных исследований, поэтому повышение точности систем управления ориентацией КА является перманентно одной из актуальных задач, стоящих перед их разработчиками.

Для решения задач повышения точности наряду с сохранением традиционных методов совершенствования приборов командно-измерительного комплекса, заметна устойчивая тенденция усовершенствования программно-математического обеспечения (ПМО) в общем создании систем управления КА. Стоимость разработки ПМО современных систем управления КА во многих случаях превышает стоимость их технических устройств. Математические модели (ММ) эволюции текущей ориентации КА, т.е. положения связанной с ним системы координат (ССК), относительно используемой опорной системы координат (ОСК), являются неотъемлемой составной частью соответствующих его ПМО.

В настоящее время имеется огромное количество публикаций, в которых в зависимости от специфики решаемых задач используются модели эволюции, основанные на применении различных параметров ориентации, а именно углов

Эйлера или Крылова–Эйлера, параметров Эйлера–Родрига–Гамильтона или компонентов кватернионов, параметров Родрига, модифицированных параметров Родрига и др. Однако в известных нам публикациях эти модели имеют вид и форму частной модели и зависят от конкретного вида ОСК. В настоящей работе предлагается форма представления кинематических уравнений эволюции ориентации, единая для любых из перечисленных параметров ориентации и вида ОСК. Показывается, что в терминах теоретической механики кинематические уравнения эволюции ориентации КА можно интерпретировать как уравнения относительного движения ССК относительно ОСК. Отмечаются недостатки и преимущества использования тех или иных перечисленных параметров ориентации. Предлагается общий для перечисленных параметров ориентации метод синтеза стабилизирующего управления, основанный на идее декомпозиции общей задачи управления на кинематическую и динамическую задачи [1] и применении для решения каждой из них метода функций Ляпунова (ФЛ).

### Кинематические уравнения в углах Эйлера–Крылова

Положение (ориентацию) связанной системы координат (ССК)  $Oxyz$  относительно опорной системы координат (ОСК)  $Ox_0y_0z_0$  будем задавать соответствующими порядку  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  поворотов (тангаж, крен, курс) углами  $\theta, \gamma, \psi$  Эйлера–Крылова. Соотношения между угловыми скоростями  $\omega_j, j = x, y, z$  и углами  $\theta, \gamma, \psi$  будут задаваться дифференциальными уравнениями, аналогичными кинематическим уравнениям Эйлера [1]. Рассмотрим способ получения названных уравнений, для чего совершим переход от ОСК  $Ox_0y_0z_0$  к ССК  $Oxyz$  последовательными поворотами на углы  $\theta, \gamma$  и  $\psi$ . Учтем при этом, что ОСК сама вращается относительно инерциального пространства с произвольной угловой скоростью  $\omega_0$ , проекции которой на оси ОСК  $Ox_0y_0z_0$  имеют вид  $\omega_0 = (\omega_{0X}, \omega_{0Y}, \omega_{0Z})^T$ . Указанным поворотам соответствуют рис. 1–3.

На рис. 1 показан переход от СК  $Ox_0y_0z_0$  к СК  $Ox'y'z'$  поворотом на угол  $\theta$ . Введем обозначения  $X_0 = (x_0y_0z_0)^T$  и  $X' = (x'y'z')^T$  для проекций произвольного вектора  $Z \in R^3$  на оси СК  $Ox_0y_0z_0$  и  $Ox'y'z'$ . Из рис. 1 непосредственно следует, что эти проекции связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

которые представим в более компактном виде:

$$X' = A_3(\theta)X_0, \quad (2)$$

$$A_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3^T(\theta) = A_3^{-1}(\theta).$$

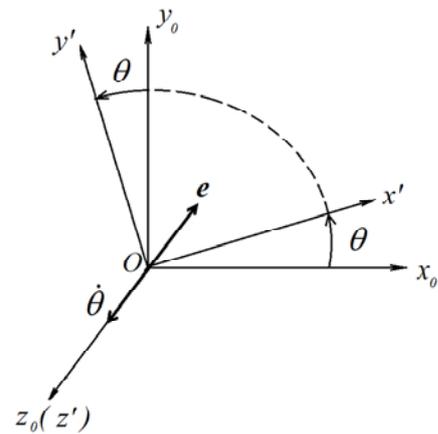


Рис. 1

При этом вектор угловой скорости  $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)^T$  СК  $Ox'y'z'$ , заданный проекциями на ее же оси, имеет вид

$$\omega' = A_3(\theta)\omega_0 + \dot{\theta}e_3, \quad e_3 = (0, 0, 1)^T. \quad (3)$$

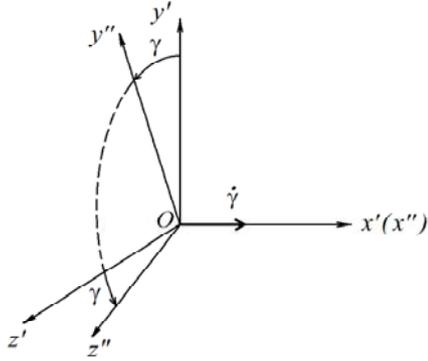


Рис. 2

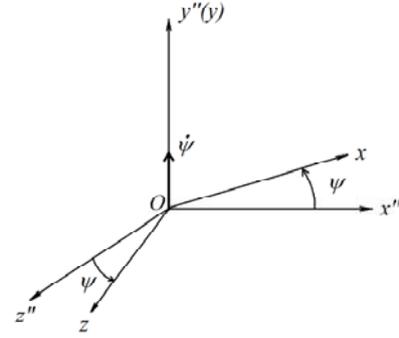


Рис. 3

Введя обозначения  $X'' = (x''y''z'')^T$  для проекций произвольного вектора на оси СК  $Ox''y''z''$  с учетом рис. 2 по аналогии с (1)–(3), получаем соотношения

$$X'' = A_1(\gamma)X' = A_1(\gamma)A_3(\theta)X_0, \quad (4)$$

$$\omega'' = A_1(\gamma)\omega' + \dot{\gamma}e_1 = A_1(\gamma)[A_3(\theta)\omega_0 + \dot{\theta}e_3] + \dot{\gamma}e_1, \quad (5)$$

где

$$A_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad A_1^T(\gamma) = A_1^{-1}(\gamma), \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Переход от СК  $Ox''y''z''$  к ССК  $Oxyz$  осуществляется поворотом вокруг оси  $Oy''$  на угол  $\psi$  (см. рис. 3). Повторяя построения, соответствующие двум предыдущим переходам к промежуточным СК, получаем формулы для проекций соответствующих векторов на оси ССК и ОСК:

$$X = A_2(\psi)X'' = S(\Phi)X_0, \quad (7)$$

$$\omega = A_2(\psi)\omega'' + \dot{\psi}e_2 = S(\Phi)\omega_0 + \dot{\theta}A_2(\psi)A_1(\gamma)e_3 + \dot{\gamma}A_2(\psi)e_1 + \dot{\psi}e_2, \quad (8)$$

где

$$A_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad A_2^T(\psi) = A_2^{-1}(\psi), \quad \Phi = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$S^T(\Phi) = S^{-1}(\Phi)$  — ортогональная матрица направляющих косинусов между осями СК  $Ox_0y_0z_0$  и  $Oxyz$ , т.е. матрица такая, что имеют место соотношения

$$X = S(\Phi)X_0, \quad S(\Phi) = A_2(\psi)A_1(\gamma)A_3(\theta) = \{s_1(\Phi), s_2(\Phi), s_3(\Phi)\}, \quad (10)$$

$s_j(\Phi)$  — векторы–столбцы матрицы  $S(\Phi)$ ,

$$S(\Phi) = \begin{pmatrix} c\psi c\theta - s\psi s\gamma s\theta & c\psi s\theta + s\psi s\gamma c\theta & -s\psi c\gamma \\ -c\gamma s\theta & c\gamma c\theta & s\gamma \\ s\psi c\theta + c\psi s\gamma s\theta & s\psi s\theta - c\psi s\gamma c\theta & c\psi c\gamma \end{pmatrix}.$$

Здесь под обозначениями  $X_0$  и  $X$ , как отмечалось выше, понимаются проекции произвольного вектора на оси ОСК  $Ox_0y_0z_0$  и ССК  $Oxyz$ . Для упрощения записей используются обозначения  $\sin x = sx$ ,  $\cos x = cx$ ,  $x = \vartheta, \gamma, \psi$ .

После выполнения несложных преобразований соотношение (8) с учетом (4)–(7) и (9), (10) можно представить в виде

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = S(\Phi)\omega_0 + \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \cos\gamma \\ 0 & 1 & \sin\gamma \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = S(\Phi)\omega_0 + B^{-1}(\Phi)\dot{\Phi}. \quad (11)$$

Умножая левую часть уравнения (11) на матрицу  $B(\Phi)$ , получим кинематическое уравнение математической модели углового движения ССК относительно ОСК

$$\dot{\Phi} = B(\Phi)[\omega - S(\Phi)\omega_0], \quad (12)$$

$$\text{где } B(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \sin\psi \operatorname{tg}\gamma & 1 & -\cos\psi \operatorname{tg}\gamma \\ -\frac{\sin\psi}{\cos\gamma} & 0 & \frac{\cos\psi}{\cos\gamma} \end{pmatrix}, \quad \det B(\Phi) = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Выражение в квадратных скобках в (12) есть относительная скорость  $\omega_R = \omega - S(\Phi)\omega_0$  углового движения ССК  $Oxyz$  относительно ОСК  $Ox_0y_0z_0$ , заданная проекциями на оси ССК. Так как абсолютная угловая скорость ССК  $\omega$  равна сумме относительной и переносной скоростей  $\omega = \omega_R + \omega_E$ , то отсюда следует, что переносная скорость  $\omega_E = S(\Phi)\omega_0$ .

Математическая модель (12) имеет недостаток, присущий всем моделям с использованием в качестве параметров ориентации углов Эйлера, так же как и углов Крылова–Эйлера при любой последовательности поворотов перехода от ОСК к ССК [1]. При этом соответствующие матрицы  $B(\Phi)$  вырождаются при некоторых значениях углов. В рассмотренной последовательности поворотов  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  ( $\theta \rightarrow \gamma \rightarrow \psi$ ) вырождение происходит при  $\gamma = 90^\circ$ . При этом в уравнении модели (12) происходят разрывы производных  $\dot{\Phi}(t)$  углов, хотя в реальном движении ССК (твёрдого тела с неподвижной точкой в терминологии теоретической механики) никаких особенностей нет, поэтому для математического моделирования больших угловых движений ССК используются другие параметры ориентации. Так, например, Л. Эйлером были введены параметры

$$\lambda_0 = \cos \vartheta/2, \quad \lambda_j = \gamma_j \sin \vartheta/2, \quad j = 1, 2, 3; \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

называемые параметрами Эйлера–Родрига–Гамильтона (ЭРГ) и (или) параметрами Родрига–Гамильтона (РГ). Здесь  $\gamma_j$  — направляющие косинусы оси вращения твёрдого тела (ССК  $Oxyz$ ) с координатными осями ОСК  $Ox_0y_0z_0$  и ССК  $Oxyz$  и  $\vartheta$  — угол поворота относительно нее. Очевидно, что случаю совмещения

СК  $Ox_0y_0z_0$  и  $Oxyz$  соответствует значения угла поворота  $\vartheta = 0^0$  и  $\vartheta = 360^0$ , при которых  $\lambda_0 = \pm 1, \lambda^T = (0, 0, 0)$ . Для удобства последующего изложения, следуя [1], рассмотрим нормированный вектор, составленный из параметров ЭРГ:

$$\Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T), \quad \lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \Lambda^T \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda^T \lambda = 1.$$

Заметим, что кроме углов Эйлера–Крылова и параметров ЭРГ в математических моделях эволюции ориентации ССК КА относительно ОСК используются также параметры Родрига и модифицированные параметры Родрига, матрицы направляющих косинусов и др. (см., например, [1–10]).

**Кинематические уравнения в параметрах ЭРГ.** Метод получения кинематических уравнений углового движения ССК твердого тела относительно вращающейся орбитальной ОСК с использованием параметров РГ (компонентов нормированного кватерниона) приведен, например, в [2]. Векторно–матричное представление уравнений [1], аналогичное по структуре уравнениям (12) для углов Крылова–Эйлера, приведено в [11, 12, 13] и имеет вид

$$2 \dot{\Lambda} = B(\Lambda)[\omega - S(\Lambda)\omega_0], \quad \|\Lambda(t)\| \equiv \|\Lambda(t_0)\| = 1, \quad (13)$$

где  $B(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^T \\ \lambda_0 I_3 + \check{\lambda} \end{pmatrix}$  — (4x3)–матрица полного ранга,  $\check{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$  —

кососимметричная матрица  $\det \check{\lambda} = 0, \text{rang } \check{\lambda} = 2 \forall \|\lambda\| \neq 0$ ,

$$S(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0 \check{\lambda} + 2\check{\lambda} \check{\lambda}, \quad S^{-1}(\Lambda) = S^T(\Lambda), \quad (14)$$

$$S(\Lambda) = (s_1(\Lambda) \quad s_2(\Lambda) \quad s_3(\Lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

и  $s_j(\Lambda), j = 1, 2, 3$  — векторы–столбцы матрицы  $S(\Lambda)$ . Остальные обозначения ( $\omega$  и  $\omega_0$ ) имеют тот же смысл, что и в (12).

Заметим, что кинематические уравнения (13) и другие в параметрах РГ могут быть непосредственно получены как решение задачи Н.П. Еругина — нахождение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих известные первые интегралы [14]. Так, в результате дифференцирования по времени первого интеграла  $\Lambda^T(t)\Lambda(t) \equiv c$  искомого множества получаем линейное алгебраическое уравнение

$$\frac{d\Lambda^T \Lambda}{dt} = \dot{\Lambda}^T \Lambda + \Lambda^T \dot{\Lambda} = 2\Lambda^T \dot{\Lambda} = 0,$$

общее решение (все множество решений) которого имеет вид

$$\dot{\Lambda} = (I_4 - P_\Lambda)U, \quad (15)$$

где  $P_\Lambda = \Lambda(\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T$  — оператор проектирования [15] на подпространство, порожденное вектором  $\Lambda \in R^4$ . Под символом  $U$  здесь понимается произвольный

вектор, в том числе и нелинейная вектор-функция  $U(t, \Lambda)$ , и, в частности, компоненты вектора  $\Lambda(t)$  могут интерпретироваться как параметры ЭРГ при  $\|\Lambda(t)\| \equiv 1$ . Полагая в (15)  $U = \frac{1}{2}B(\Lambda)[\omega - S(\Lambda)\omega_0]$  и учитывая соотношение  $\Lambda^T B(\Lambda) = (0, 0, 0)$ , получаем уравнение (13). Также, полагая в (15)  $U = \frac{1}{2}A(\omega, \omega_0)\Lambda$ , где  $A(\omega, \omega_0)$  — произвольная кососимметрическая матрица ( $\Lambda^T A(\omega, \omega_0)\Lambda \equiv 0 \forall \Lambda \in R^4$ ), получим следующее уравнение:

$$2\dot{\Lambda} = A(\omega, \omega_0)\Lambda, \quad A(\omega, \omega_0) = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega - \omega_0)^T \\ (\omega - \omega_0) & -(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_0) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Несложно проверить, что уравнения (16) представляют собой другую форму представления уравнений (13).

Преимущества моделирования углового движения с помощью кинематических уравнений (13) в параметрах ЭРГ (компонентах кватерниона по [1]) по сравнению с использованием уравнений (12) состоят в том, что в них нет каких-либо особенностей и случаев вырождения и нет тригонометрических функций, необходимость вычисления которых повышает требования к быстродействию бортовых компьютеров. Однако недостатки имеются и в модели (13). При длительных временных интервалах численного интегрирования уравнения (13) накопления вычислительных погрешностей могут привести к нарушению условия нормировки  $\|\Lambda(t)\| \equiv 1$ . При этом вычисленное значение  $\tilde{\Lambda}(t)$ ,  $\|\tilde{\Lambda}(t)\| \neq 1$  не будет определять соответствующую ориентацию.

### Кинематические уравнения в классических параметрах Родрига

Между параметрами Родрига  $q_j, j = 1, 2, 3$  и ЭРГ имеют место следующие прямые и обратные взаимно-однозначные соотношения [7]:

$$q = \frac{1}{\lambda_0}\lambda, \quad q^T = (q_1, q_2, q_3), \quad \lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (17)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + q^T q}}, \quad \lambda = \frac{q}{\sqrt{1 + q^T q}}. \quad (18)$$

Заметим, что при использовании классических параметров Родрига при моделировании вращательного движения КА, в отличие от параметров ЭРГ, для которых  $\lambda_0^2(t) + \lambda^T(t)\lambda(t) \equiv 1$ , вообще говоря, может иметь место особенность  $q(t) \rightarrow \infty$  при движениях, которым соответствует случай  $\lambda_0(t) \rightarrow 0$ ,  $\vartheta(t) \rightarrow \pm 180^\circ$ .

Кинематические уравнения эволюции ориентации КА относительно произвольно вращающейся ОСК приведены ниже.

**Утверждение 1.** Кинематические уравнения эволюции ориентации КА относительно произвольно вращающейся ОСК в классических параметрах Родрига имеют вид

$$2\dot{q} = B(q)[\omega - S(q)\omega_0], \quad (19)$$

где

$$B(q) = I_3 + \bar{q} + qq^T, B^{-1}(q) = \frac{1}{1+q^T q} (I_3 - \bar{q}); \quad (20)$$

$$S(q) = \frac{1}{1+q^T q} [(1-q^T q)I_3 + 2qq^T - 2\bar{q}], S^{-1}(q) = S^T(q). \quad (21)$$

В отличие от матрицы  $B(\Phi)$  в кинематических уравнениях (12), матрица  $B(q)$  не вырождается при любых значениях  $\|q\| < \infty$ . В этом непосредственно убеждаемся, вычислив  $\det B^{-1}(q) = (1+q^T q)^{-2}$ .

*Доказательство.* Из формул (13), (14), (17) и (18) последовательно получаем

$$2\dot{\lambda}_0 = -\lambda^T \tilde{\omega}, \quad 2\dot{\lambda} = (\lambda_0 I_3 + \tilde{\lambda}) \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda) \omega_0;$$

$$2\dot{q} = -\frac{2}{\lambda_0^2} \lambda \dot{\lambda}_0 + \frac{2}{\lambda_0} \dot{\lambda}, \quad 2\dot{q} = (qq^T + I_3 + \bar{q}) \tilde{\omega} = B(q) \tilde{\omega};$$

$$S(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0 \tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda} \tilde{\lambda} = \frac{1}{1+q^T q} [(1+q^T q)I_3 - 2\bar{q} + 2\bar{q}\bar{q}] = S(q).$$

Воспользовавшись известным свойством произведения матриц  $\bar{q}\bar{q} = qq^T - q^T q I_3$ , получим для матрицы  $S(q)$  формулу (21), завершающую доказательство утверждения 1.

### Кинематические уравнения в модифицированных параметрах Родрига

Между модифицированными параметрами Родрига  $q_j, j=1, 2, 3$  и ЭРГ имеют место следующие прямые и обратные взаимно однозначные соотношения [7]:

$$\sigma = \frac{1}{1+\lambda_0} \lambda, \quad \sigma^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (22)$$

$$\lambda_0 = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2}. \quad (23)$$

При использовании модифицированных параметров Родрига для моделирования динамики вращательного движения КА, как и при использовании классических, может иметь место, вообще говоря, неограниченное возрастание нормы вектора параметров  $\|\sigma(t)\|$ . Так, из формулы (22) получаем

$$\sigma^T \sigma = \frac{1}{(1+\lambda_0)^2} \lambda^T \lambda = \frac{1-\lambda_0^2}{(1+\lambda_0)^2} = \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}. \quad (24)$$

Как известно, случаю совмещения осей ССК и ОСК соответствуют два значения параметров ЭРГ:  $\Lambda^T = (\pm 1, 0, 0, 0)$ , т.е.  $\lambda_0 = \pm 1$ . При этом из (24) следует, что при  $\lambda_0 \rightarrow -1$  норма вектора параметров может неограниченно возрастать  $\|\sigma\| \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 2.** Кинематические уравнения эволюции ориентации КА относительно произвольно вращающейся ОСК в модифицированных параметрах Родрига имеют вид

$$2\dot{\sigma} = B(\sigma)[\omega - S(\sigma)\omega_0], \quad (25)$$

$$B(\sigma) = \left( \frac{1}{2} (1 - \sigma^T \sigma) I_3 + \tilde{\sigma} + \sigma \sigma^T \right), \quad B^{-1}(\sigma) = \frac{4}{(1 + \sigma^2)^2} B^T(\sigma), \quad (26)$$

$$S(\sigma) = I_3 + \frac{8\tilde{\sigma}\tilde{\sigma} - 4(1 - \sigma^T \sigma)\tilde{\sigma}}{(1 + \sigma^T \sigma)^2}, \quad S^T(\sigma) = S^{-1}(\sigma). \quad (27)$$

Доказательство формул (25)–(27) утверждения 2 может быть получено на основе формул (13), (14), (22) и (23), аналогично доказательству утверждения 1 с использованием формул (13), (14), (17) и (18).

В приведенных утверждениях содержится обобщение известных результатов для случаев произвольных угловых скоростей  $\omega_0$  вращения ОСК. Для частного случая  $\omega_0 = 0$  ориентации относительно инерциальной ОСК формулы утверждений с точностью до обозначений совпадают с формулами, приведенными в [7, 8].

### Синтез управления ориентацией КА

Рассмотрим применение предложенных кинематических уравнений для решения задач синтеза управлений ориентацией КА. Как более наглядный вариант сначала рассмотрим уравнения с использованием углов Эйлера–Крылова.

**Постановка задачи 1.** Пусть угловое движение КА описывается кинематическими уравнениями (12) и динамическим уравнением Эйлера [1, 3]

$$J \dot{\omega} = M_C + M_g - \tilde{\omega} J \omega, \quad (28)$$

где  $J$  — симметрическая положительно определенная матрица  $J = J^T > 0$  представления тензора инерции КА относительно центра масс  $O$  в ССК;  $M_C$  и  $M_g$  — искомый момент управления и гравитационный момент с проекциями на оси ССК, соответственно. Заметим, что, вообще говоря, на КА действует еще возмущающий момент  $M_P$  аэродинамических сил и солнечного давления. Однако если их принимать во внимание, это может привести к ненужному здесь загромождению изложения решения рассматриваемой задачи, поэтому момент  $M_P$  в правой части уравнения (28) опущен. Для простоты предполагается, что гравитационное поле является центральным, и КА движется по круговой орбите радиусом  $R$ . По аналогии с [17] предполагается, что ось  $Oy_0$  ОСК направлена по текущему радиус-вектору КА, ось  $Ox_0$  направлена по трансверсали в сторону движения, и ось  $Oz_0$  дополняет их до правой тройки. При этом  $\omega_0 = (0, 0, \omega_{03})^T$ ,  $\omega_{03} = -\sqrt{\mu / R^3}$  [18]. Согласно [17, 19], формулу для вычисления гравитационного момента можно представить в виде  $M_g = 3\mu R^{-3} \tilde{s}_2(\Phi) J s_2(\Phi)$ , где  $\tilde{s}_2(\Phi)$  — косо-симметричная матрица вектора–столбца  $s_2(\Phi)$  матрицы  $S(\Phi)$  (см. формулу (10)) и  $\mu$  — гравитационная постоянная Земли  $\mu = 398600,4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ .

Поставим задачу синтеза управления  $M_C(\Phi, \omega, \Phi_S)$  такого, что при начальном состоянии  $\Phi(t_0), \omega(t_0)$  реализуется достижение и стабилизация заданной ориентации  $\|\Phi(t) - \Phi_S\| \rightarrow 0$  и  $\|\omega(t) - \omega_S\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Так как вектор углов ориентации  $\Phi_S$  предполагается постоянным, то из уравнения (12) следует, что  $\dot{\Phi}_S = B(\Phi_S)[\omega_S - S(\Phi_S)\omega_0] = 0$  и  $\omega_S = S(\Phi_S)\omega_0$ .

**Решение задачи 1.** Для решения задачи воспользуемся методом ее декомпозиции на кинематическую и задачи ориентации [1], [20–23] и выберем кинематическую функцию Ляпунова в виде

$$V_C = (\Phi - \Phi_S)^T (\Phi - \Phi_S). \quad (29)$$

Вычисляя производную ФЛ согласно уравнению (12), получаем

$$\dot{V}_C = 2(\Phi - \Phi_S)^T (\dot{\Phi} - \dot{\Phi}_S) = 2(\Phi - \Phi_S)^T B(\Phi)[\omega - S(\Phi)\omega_0]. \quad (30)$$

Выбрав «управление» (требуемое значение угловой скорости КА)  $\omega_C = \omega_C(\Phi)$ :

$$\omega_C(\Phi) = S(\Phi)\omega_0 - \frac{1}{2\tau} B^{-1}(\Phi)(\Phi - \Phi_S), \quad (31)$$

где  $\tau > 0$  — регулируемый параметр, из (30) с учетом (29) получим

$$\dot{V}_C = -\tau^{-1} (\Phi - \Phi_S)^T (\Phi - \Phi_S) = -\tau^{-1} V_C < 0. \quad (32)$$

Согласно [24, 25] из соотношений (29) и (32) следует, что  $\|\Phi(t) - \Phi_S\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Для нахождения управляющего момента, обеспечивающего получение требуемого значения угловой скорости КА  $\omega = \omega_C$ , выберем динамическую ФЛ:

$$V_d = 0,5(\omega - \omega_C)^T (\omega - \omega_C), \quad (33)$$

производная которой в силу уравнения Эйлера (28) имеет вид

$$\dot{V}_d = (\omega - \omega_C)^T [J^{-1}(M_C + M_g - \check{\omega}J\omega) - \dot{\omega}_C]. \quad (34)$$

Полагая в (34) управляющий момент

$$M_C = -M_g + \check{\omega}J\omega + J\dot{\omega}_C - \frac{1}{\tau}J(\omega - \omega_C) \quad (35)$$

и учитывая (33), получаем

$$\dot{V}_d = -\frac{1}{\tau}(\omega - \omega_C)^T (\omega - \omega_C) = -\tau^{-1} V_d < 0. \quad (36)$$

Из соотношений (33) и (36) следует, что «управление» стремится к требуемому значению  $\|\omega(t) - \omega_C\| \rightarrow 0$ .

Для завершения решения задачи осталось найти формулу для вычисления слагаемого  $\dot{\omega}_C$  в выражении (35) для момента  $M_C$ . Из формулы (31) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_C &= \dot{S}(\Phi)\omega_0 - \frac{1}{2\tau} \dot{B}^{-1}(\Phi)(\Phi - \Phi_S) - \frac{1}{2\tau} B^{-1}(\Phi)\dot{\Phi}, \\ \dot{\omega}_C &= \dot{S}(\Phi)\omega_0 - \frac{1}{2\tau} \dot{B}^{-1}(\Phi)(\Phi - \Phi_S) - \frac{1}{2\tau} [\omega - S(\Phi)\omega_0]. \end{aligned}$$

Учитывая обобщенное уравнение Пуассона [6] для производной матрицы направляющих косинусов, которое в принятых здесь обозначениях имеет вид  $\dot{S}(\Phi) = -\check{\omega}S(\Phi) + S(\Phi)\check{\omega}_0$ , получаем

$$\dot{\omega}_C = [-\check{\omega}S(\Phi) + S(\Phi)\check{\omega}_0]\omega_0 - \frac{1}{2\tau} \dot{B}^{-1}(\Phi)(\Phi - \Phi_S) - \frac{1}{2\tau} [\omega - S(\Phi)\omega_0],$$

$$\dot{\omega}_C = -\ddot{\omega}S(\Phi)\omega_0 - \frac{1}{2\tau}\dot{B}^{-1}(\Phi)(\Phi - \Phi_S) - \frac{1}{2\tau}[\omega - S(\Phi)\omega_0]. \quad (37)$$

Воспользовавшись формулой (11), для производной матрицы

$$B^{-1}(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \cos \gamma \\ 0 & 1 & \sin \gamma \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix}$$

последовательно получаем:

$$\dot{B}^{-1}(\Phi) = e_1^T \dot{\Phi} A_1(\Phi) + e_2^T \dot{\Phi} A_2(\Phi),$$

$$\dot{B}^{-1}(\Phi) = \rho_1(\Phi) A_1(\Phi) + \rho_2(\Phi) A_2(\Phi), \quad \rho_J(\Phi) = e_J^T B(\Phi) [\omega - S(\Phi)\omega_0], \quad (38)$$

$$\text{где } A_1(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \sin \gamma \\ 0 & 0 & \cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \psi \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2(\Phi) = \begin{pmatrix} -\sin \psi & 0 & -\cos \psi \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Подводя итоги, заметим, что в результате получения формулы (38) с учетом формул (10) для матрицы  $S(\Phi)$ , (31), (35) и (37) завершено решение задачи синтеза управляющего момента  $M_C(\Phi, \omega, \Phi_S)$ , т.е. решение поставленной задачи 1.

При этом если в формуле (35) для момента  $M_C$  пренебречь производной  $\dot{\omega}_C$ , то из уравнения Эйлера (28) получится уравнение устойчивого векторного апериодического звена:  $\tau \dot{\omega} + \omega = \omega_C$ . Оно же получается из уравнений  $\tau \dot{V}_d + V_d = 0$ ,  $\tau \dot{\omega} - \tau \dot{\omega}_C = \omega - \omega_C$  (см. (33), (36)), если  $\dot{\omega}_C = 0$ . Это уравнение с точностью до принятых здесь определений и обозначений совпадает с уравнением (5) из [26], в которой исследуются алгоритмы управления ориентацией силовыми гироскопами орбитального комплекса «Мир».

**Постановка задачи 2.** Пусть угловое движение КА описывается кинематическими уравнениями в параметрах Родрига (19)–(21) и динамическим уравнением Эйлера (28).

Поставим задачу синтеза управления  $M_C(q, \omega, q_S)$  такого, что при произвольном начальном состоянии  $q(t_0), \omega(t_0)$  реализуется достижение и стабилизация произвольной заданной ориентации  $\|q(t) - q_S\| \rightarrow 0$  и  $\|\omega(t) - \omega_S\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Под символом  $\omega_S = S(q_S)\omega_0$  понимается установившееся значение угловой скорости КА, соответствующее его заданной постоянной ориентации  $q(t) \equiv q_S$ , при которой в уравнении (19)  $\dot{q}(t) \equiv \dot{q}_S = 0$ .

**Решение задачи 2.** Для решения задачи воспользуемся методом ее декомпозиции на кинематическую и динамическую задачи ориентации и выберем кинематическую ФЛ в виде

$$V_C = (q - q_S)^T (q - q_S). \quad (39)$$

Вычисляя производную этой функции согласно уравнению (19), получаем

$$\dot{V}_C = 2(q - q_S)^T (\dot{q} - \dot{q}_S) = (q - q_S)^T B(q) [\omega - S(q)\omega_0]. \quad (40)$$

Выбрав «управление» (требуемое значение угловой скорости КА)  $\omega = \omega_C = \omega_C(q)$ :

$$\omega_C = S(q)\omega_0 - \frac{1}{\tau}B^{-1}(q)(q - q_S), \quad (41)$$

получим

$$\dot{V}_C = -\frac{1}{\tau} (q - q_S)^T (q - q_S) = -\tau^{-1}V_C < 0. \quad (42)$$

Для нахождения управляющего момента, обеспечивающего получение требуемого значения угловой скорости КА, выберем динамическую ФЛ

$$V_d = 0,5(\omega - \omega_C)^T (\omega - \omega_C), \quad (43)$$

производная которой в силу уравнения Эйлера (28) имеет вид:

$$\dot{V}_d = (\omega - \omega_C)^T [J^{-1}(M_C + M_g - \check{\omega}J\omega) - \dot{\omega}_C]. \quad (44)$$

Полагая в (44) управляющий момент

$$M_C = -M_g + \check{\omega}J\omega + J\dot{\omega}_C - \frac{1}{\tau}J(\omega - \omega_C), \quad (45)$$

получаем

$$\dot{V}_d = -\frac{1}{\tau}(\omega - \omega_C)^T (\omega - \omega_C) = -\tau^{-1}V_d < 0. \quad (46)$$

Из уравнений (39)–(46) следует, что при выборе управляющего момента  $M_C$  в виде (45) угловая скорость КА  $\|\omega(t) - \omega_C\| \rightarrow 0$  и выполняется соотношение  $\|q(t) - q_S\| \rightarrow 0$  в постановке задачи. Для реализации требуемого значения момента  $M_C$  осталось найти требуемое значение  $\dot{\omega}_C$  в формуле (45).

В результате дифференцирования выражения для  $\omega_C$  в уравнении (41) с учетом обобщенного уравнения Пуассона [6] для производной матрицы направляющих косинусов, имеющего в используемых здесь обозначениях вид  $\dot{S} = -\check{\omega}S + S\check{\omega}_0$ , и уравнения (19) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_C &= \dot{S}(q)\omega_0 - \tau^{-1}\dot{B}^{-1}(q)(q - q_S) - \tau^{-1}B^{-1}(q)\dot{q}, \\ \dot{\omega}_C &= [-\check{\omega}S(q) + S(q)\check{\omega}_0]\omega_0 - \tau^{-1}\dot{B}^{-1}(q)(q - q_S) - 0,5\tau^{-1}[\omega - S(q)\omega_0], \\ \dot{\omega}_C &= -\check{\omega}S(q)\omega_0 - \frac{1}{\tau}\dot{B}^{-1}(q)(q - q_S) - \frac{1}{2\tau}[\omega - S(q)\omega_0]. \end{aligned} \quad (47)$$

Воспользовавшись известной формулой для производной обратной матрицы  $\dot{A}^{-1} = -A^{-1}\dot{A}A^{-1}$  и формулой (20), находим

$$\dot{B}^{-1}(q) = -B^{-1}(q)\dot{B}(q)B^{-1}(q) = -\frac{1}{(1 + q^T q)^2}(I_3 - \check{q})(\check{q} + \dot{q}q^T + q\dot{q}^T)(I_3 - \check{q}), \quad (48)$$

$$\text{где } \check{q} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 & 0 & -\dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 & \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{q}_J = e_J^T \dot{q}, \quad e_1^T = (1, 0, 0), \quad e_2^T = (0, 1, 0), \quad e_3^T = (0, 0, 1),$$

и значения  $\dot{q}$  определяются в правой части уравнения (19). Подставив значение  $\dot{\omega}_C$  из (47) и (48) в (45), получаем формулу для требуемого управляющего механического момента  $M_C$ , завершающую решение задачи 2.

Результаты выполнения вычислительных экспериментов, иллюстрирующих работоспособность полученных алгоритмов, приведены в приложении.

**Приложение.** Выше была решена задача синтеза алгоритма стабилизации заданного постоянного значения вектора параметров ориентации  $\Phi_S$ . Рассмотрим на конкретном примере возможность формального применения использованного метода декомпозиции для решения задачи отслеживания заданного программного значения параметров ориентации, т.е. синтеза управления  $M_C$  такого, что  $\|\Phi(t) - \Phi_S\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\Phi_S = \Phi_S(t)$  — заданная программа изменения ориентации. Заметим, что проблемы повышения точности управления КА по отслеживанию заданной программы ориентации являются актуальными в задачах маршрутной съемки поверхности Земли, выполнения стыковки с некооперируемыми КА и т.д. В целях иллюстрации универсальности предлагаемых алгоритмов рассмотрим случай ориентации относительно инерциальной СК, полагая в (12)  $\omega_0 = 0$ . Для решения задачи формально воспользуемся изложенным выше методом декомпозиции решения синтеза управления КА из условия его заданной постоянной ориентации. Выберем для этого аналог кинематической ФЛ в виде

$$V_C = 0,5(\Phi - \Phi_S)^T (\Phi - \Phi_S), \quad (\text{П.1})$$

производная которой с учетом вышесказанного имеет вид

$$\dot{V}_C = (\Phi - \Phi_S)^T (B(\Phi)\omega - \dot{\Phi}_S). \quad (\text{П.2})$$

Полагая в (П.2) «управление»  $\omega = \omega_C$ , где

$$\omega_C = B^{-1}(\Phi)[\dot{\Phi}_S - 0,5\tau^{-1}(\Phi - \Phi_S)], \quad (\text{П.3})$$

получим

$$\dot{V}_C = -0,5\tau^{-1}(\Phi - \Phi_S)^T (\Phi - \Phi_S), \quad \dot{V}_C = -\tau^{-1}V_C \leq 0.$$

Для получения реального механического управляющего момента  $M_C$ , необходимого для реализации требуемого значения угловой скорости  $\omega = \omega_C$ , выберем «динамическую» ФЛ в виде

$$V_d = 0,5(\omega - \omega_C)^T J(\omega - \omega_C). \quad (\text{П.4})$$

Дифференцируя ФЛ (П.4) в силу уравнения Эйлера (28), находим

$$\dot{V}_d = (\omega - \omega_C)^T (M_C + M_g - \check{\omega}J\omega - J\dot{\omega}_C). \quad (\text{П.5})$$

Полагая в (П.5) управляющий момент

$$M_C = -M_g + \check{\omega}J\omega + J\dot{\omega}_C - \tau^{-1}J(\omega - \omega_C), \quad (\text{П.6})$$

с учетом (П.4) получим

$$\dot{V}_d = -\tau^{-1}V_d \leq 0. \quad (\text{П.7})$$

Из (П.7), (П.4) непосредственно следует, что  $\|\omega - \omega_C\|_J \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а следовательно, убывает и ФЛ (П.1).

Для завершения решения задачи найдем значение производной  $\dot{\omega}_C$ , входящей в формулу для управляющего момента  $M_C$  в (П.6). В результате дифференцирования (П.3), опуская громоздкие простые преобразования, находим

$$\dot{\omega}_C = \dot{B}^{-1}(\Phi)[\dot{\Phi}_S - 0,5\tau^{-1}(\Phi - \Phi_S)] + B^{-1}(\Phi)[\ddot{\Phi}_S + 0,5\tau^{-1}\dot{\Phi}_S] - 0,5\tau^{-1}\omega, \quad (\text{П.8})$$

где

$$\dot{B}^{-1}(\Phi) = \rho_1(\Phi)A_1(\Phi) + \rho_2(\Phi)A_2(\Phi),$$

$$\rho_j(\Phi) = e_j^T B(\Phi)\omega, \quad e_1^T = (1, 0, 0), \quad e_2^T = (0, 1, 0),$$

$$A_1(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \sin \gamma \\ 0 & 0 & \cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \psi \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2(\Phi) = \begin{pmatrix} -\sin \psi & 0 & -\cos \psi \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Проиллюстрируем работоспособность приведенного алгоритма на примере отслеживания программы  $\Phi_S(t)$  изменения ориентации КА относительно инерциальной СК ( $\omega_0$  в уравнении (12) полагаем равным нулю  $\omega_0 = (0, 0, 0)^T$ ). Положим

$$\Phi_S(t) = \begin{pmatrix} \gamma_S(t) \\ \psi_S(t) \\ \theta_S(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\gamma \\ A_\psi \cos \Omega_\psi t \\ A_\theta \sin \Omega_\theta t \end{pmatrix},$$

где  $A_\gamma = 5^\circ$ ,  $A_\psi = 25^\circ$ ,  $A_\theta = 15^\circ$ ;  $\Omega_\psi = \frac{2\pi}{T_\psi}$ ,  $\Omega_\theta = \frac{2\pi}{T_\theta}$ ,  $T_\psi = 200\text{с}$ ,  $T_\theta = 100\text{с}$ .

Для построения графиков  $\Phi(t)$  отслеживания программы  $\Phi_S(t)$  интегрировалась численным методом Рунге-Кутты система уравнений, состоящая из кинематических уравнений (12) при  $\omega_0 = (0, 0, 0)^T$ , динамического уравнения Эйлера (28) при  $J = I_3$ . Управляющий момент  $M_C$  в уравнении Эйлера формировался по формулам (П.3) и (П.6) с параметром  $\tau = 0,5\text{с}$ . При этом, следуя [24], слагаемое  $J\dot{\omega}_C$  в (П.6) не учитывалось, т.е. применялся приближенный алгоритм с  $\dot{\omega}_C = (0, 0, 0)^T$  и без использования громоздких формул (47), (48). При выполнении интегрирования все начальные условия при  $t_0 = 0$  полагались нулевыми  $\Phi(t_0) = (0, 0, 0)^T$ ,  $\omega(t_0) = (0, 0, 0)^T$ . На рис. 4 графики иллюстрируют эффективность предложенного преднамеренно упрощенного (с  $\dot{\omega}_C = (0, 0, 0)^T$ ) алгоритма отслеживания. На рис. 5 переходный процесс установления отслеживания КА заданной программы представлен в укрупненном масштабе.

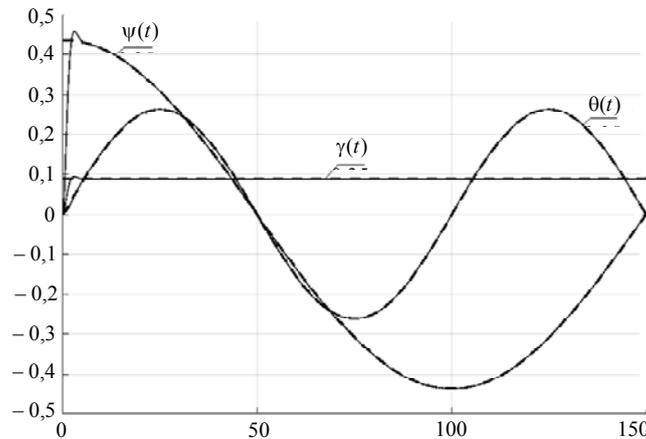


Рис. 4

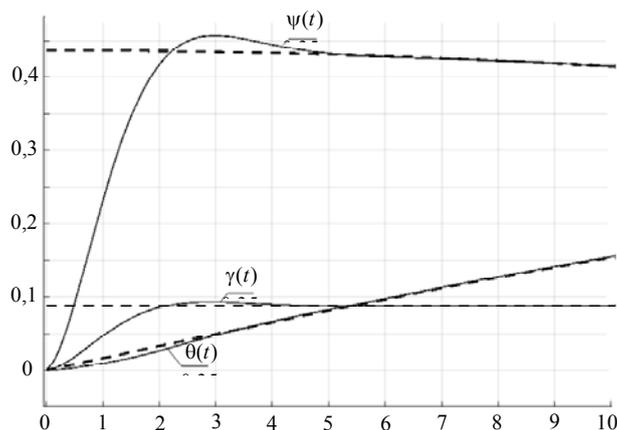


Рис. 5

### Заключення

Предложена общая структура уравнений математической модели (ММ) эволюции ориентации, жестко связанной с твердым телом (космическим аппаратом) системы координат (ССК) относительно опорной системы координат (ОСК), вращающейся с произвольной угловой скоростью, заданной проекциями на ее оси. В качестве параметров ориентации используются углы Эйлера–Крылова, компоненты нормированного кватерниона (параметры Родрига–Гамильтона), параметры Родрига, модифицированные параметры Родрига. Предложен конструктивный единый для использования всех моделей метод синтеза управления стабилизации заданной ориентации ССК. Метод основан на декомпозиции общей задачи на кинематическую и динамическую задачи ориентации и использовании соответствующих функций Ляпунова для их решения. С помощью компьютерного моделирования проиллюстрировано свойство структурной грубости алгоритма в смысле Андронова–Понтрягина [27–29], а именно: на конкретном примере проиллюстрировано свойство даже преднамеренно структурно упрощенного полученного алгоритма стабилизации заданной постоянной ориентации твердого тела для достаточно точного отслеживания программы ее изменения.

*В.В. Волосов, В.М. Шевченко*

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КУТОВОГО РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ

Запропоновано загальну структуру кінематичних рівнянь еволюції орієнтації космічного апарата (КА) (системи координат, зв'язаної з КА (ЗСК)) щодо опорної системи координат (ОСК). Передбачається, що початки систем координат збігаються й розташовані в довільній точці КА. Кожна із систем координат обертається з довільною абсолютною кутовою швидкістю (швидкістю відносно інерціального простору), заданою проекціями на їхні осі. Як параметри орієнтації можуть використовуватися кути Ейлера-Крылова, параметри Родрига-Гамильтона, модифіковані параметри Родрига. Показано, що відомі представлені рівняння еволюції орієнтації ССК відносно ОСК у параметрах Родрига-Гамильтона (компонентах нормованих кватерніонів) можуть бути отримані із розв'язку задачі Н.П. Єругіна — відшукування всієї множини диференціальних рівнянь, що мають заданий інтеграл руху. Відмічено переваги й недоліки використання кожного з зазначених параметрів орієнтації. Запропоновано загальний

для всіх цих рівнянь метод синтезу керування орієнтацією, заснований на декомпозиції вихідної задачі на кінематичну й динамічну задачі й використанні відомих узагальнень прямого методу Ляпунова для їхнього розв'язку. За допомогою комп'ютерного моделювання проілюстровано властивість структурної грубості в сенсі О.О. Андронова–Л.С. Понтрягіна одержаного алгоритму. А саме, на конкретному прикладі проілюстровано властивість навіть навмисно структурно спрощеного алгоритму стабілізації заданої постійної орієнтації КА з достатньою точністю відслідковувати програму її зміни. Задача спостереження є типовою в керуванні стиковкою КА, спуском КА з орбіти, виконання маршрутних зйомок поверхні Землі.

**Ключові слова:** космічний апарат, параметри орієнтації й рівняння їх еволюції, кінематична й динамічна задачі керування орієнтацією, синтез стабілізуючого керування, відстеження програми зміни орієнтації.

*V.V. Volosov, V.N. Shevchenko*

## MATHEMATICAL MODELS OF ANGULAR MOTION OF SPACE VEHICLES AND THEIR USE IN ORIENTATION CONTROL PROBLEMS

A general structure of the kinematic equations for attitude evolution of a spacecraft (SC) (coordinate system associated with a spacecraft (SCS)) relative to the reference coordinate system (RCS) is proposed. It is assumed that the origins of the coordinate systems coincide and are located at an arbitrary point of the spacecraft. Each of the coordinate systems rotates at an arbitrary absolute angular velocity (relative to the inertial space) specified by the projections on their axes. Attitude parameters can be the Euler–Krylov angles, Rodrigues–Hamilton parameters, and modified Rodrigues parameters. It is shown that the well-known representations of the attitude evolution equations of the SCS relative to the RCS using the Rodrigues-Hamilton parameters (components of normalized quaternions) can be simply obtained from the solution of the Erugin problem of finding the entire set of differential equations with a given integral of motion. The advantages and disadvantages of use for each of the specified attitude parameters are considered. A method of attitude control synthesis is proposed which is common for all these equations and based on the decomposition of the original problem into kinematic and dynamic ones and the use of well-known generalizations of the direct Lyapunov method for their solution. The property of structural roughness according to Andronov–Pontryagin [27–29] of the obtained algorithm is illustrated with the help of computer simulation. Particularly, a specific example illustrates the possibility for even a structurally simplified algorithm of stabilizing a specified constant spacecraft attitude to track the program of its change with sufficient accuracy. The tracking task is typical for the control of spacecraft docking, spacecraft de-orbiting, and performing route surveys of the Earth's surface.

**Keywords:** Keywords: spacecraft, attitude parameters and equations of their evolution, kinematic and dynamic problems of attitude control, synthesis of stabilizing control, tracking the attitude change program.

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 288 с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика системы материальных точек. М.: Наука, 1969. 332 с.
4. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

5. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 39. 23 с.
6. Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение. 1982. 216 с.
7. Schaub H., Junkins J. Analytical mechanics of space systems, AIAA Education Series, 4th Edition, Reston, VA, 2018. doi:10.2514/4.105210\_2009.
8. Shuster M.D. A survey of attitude representation. *The Journal of the Astronautical Sciences*. 1993. **41**. N 4. P. 439–517.
9. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Наведение и управление свободнолетающим роботом при завершении сближения с пассивным объектом в дальнем космосе. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2017. **19**, № 4. С. 81–90.
10. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Экономичные способы обеспечения высокой информативности землеобзора при гиросиловом наведении космических аппаратов. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2009. **11**, № 3, С.141–152.
11. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1990. 292 с.
12. Волосов В.В., Тютюнник Л.И. Синтез законов управления ориентацией космического аппарата с использованием кватернионов. *Космічна наука та технологія*. 1999. **5**. № 4. С. 61–69.
13. Volosov V.V., Kutsenko I.A., Selivanov Y.A. Development and investigation of the robust algorithms of ellipsoidal estimation of the inertia characteristics of a spacecraft controlled by powered gyroscopes *Journal of Automation and Information Sciences*. 2005. **37**, № 8. P. 44–57. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v37.i8.50.
14. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск : Наука и техника. 1979. 744 с.
15. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320с.
16. Volosov V.V., Shevchenko V.N. Synthesis of algorithms for spacecraft attitude control based on generalizations of the direct Lyapunov method. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, № 9. P. 29–41. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i9.30.
17. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.
18. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Изд. 2–е. М. : Наука. 1971. 584 с.
19. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова. 1975. 308 с.
20. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И., Штепа Ю.П. Магнитная система управления угловым движением микроспутника. *Космічна наука і технологія*. 1996. **2**. № 5–6. С. 17–25.
21. Onishchenko S.M. Optimal Stabilization of the Earth Artificial Satellite with Redundant System of Fly-Wheels. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **48**, № 12. P. 1–12. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i12.10.
22. Volosov V.V. Attitude Control of a Spacecraft in the Orbital Coordinate System Using Ellipsoidal Estimates of its State Vector. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1999. **31**, № 4–5. P. 24–32. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v31.i4-5.230.
23. Волосов В.В., Шевченко В.Н. Синтез алгоритмов управления ориентацией космического аппарата на основе обобщений прямого метода Ляпунова. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 5. С. 106–117.
24. Красовский Н.Н. Некоторые задачи об устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.
25. Зубов В.И. Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М.: Высшая школа. 1973. 272 с.
26. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Зыков С.Г., Сазонов В.В., Тесленко В.П. Математическое моделирование эйлеровых разворотов орбитального комплекса «Мир» гиродинами. Космические исследования. 1991. **29**, № 4. С. 532–543.
27. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. Докл. АН СССР. 1937. **34**. № 5. С. 247–250.
28. Неймарк Ю.И. Динамическая система как основная модель современной науки. *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 3. С. 196–201.
29. Оморов Р.О. Топологическая грубость динамических систем. XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019, Москва 17–20 июня 2019. С. 243–246.

Получено 14.07.2021