УДК 519.85

П.І. Стецюк, О.П. Лиховид, В.О. Жидков, А.А. Супрун

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРОПУСКНИХ ЗДАТНОСТЕЙ ДУГ ВІДМОВОСТІЙКИХ МЕРЕЖ*

Ключові слова: відмовостійкі мережі, сценарій відмов, методи декомпозиції, *r*-алгоритми, Gurobi.

Ключевые слова: отказоустойчивые сети, сценарий отказов, методы декомпозиции, *r*-алгоритмы, Gurobi.

Вступ

Задачі знаходження як структур, так і параметрів стійких і безвідмовних мереж (телекомунікаційних, комп'ютерних, транспортних, енергетичних та ін.) є нині актуальними [1–4]. Окремі аспекти цих проблем розглянуто, зокрема, в роботі [5], де описано проблему пропускної здатності мережі на однонапрямленому графі при мінімізації загальної вартості мережі; в [6] розглянуто аспекти синтезу надійних мереж та наближені алгоритми до розв'язання та аналізу подібних задач. Подальший розвиток постановки та розв'язання таких задач надано в [7]. Дотичні до них задачі розглядаються в [8–11], де вивчаються властивості відмовостійких спеціальних графів з чисто математичної точки зору. Міркування, наведені в цих роботах, дозволяють визначити межі, у яких може знаходитися розв'язок оптимізаційної задачі, та вибрати найдоцільнішу її математичну модель.

Проблемам побудови оптимізаційних задач для відмовостійких мереж присвячено книгу [12]. У ній подано опис математичного та програмного забезпечення для низки задач оптимального проектування та маршрутизації в мережах з урахуванням можливого виходу з ладу окремих компонент мережі та зміни вимог до потоків. Також розглянуто такі важливі з точки зору практичних потреб задачі на мережах: проектування мережі мінімальної вартості за умови виходу з ладу окремих ланок, знаходження пропускних здатностей дуг надійної орієнтованої мережі, проектування оптимальної логічної структури надійної мережі, задача модернізації надійної мережі, задача оптимізації мереж з урахуванням неповної інформації, перспективне планування перевезень, знаходження оптимальної номенклатури рухомого складу. Розглянуто задачі лінійного програмування (ЛП-задачі) для знаходження оптимальних пропускних здатностей дуг відмовостійкої орієнтованої мережі. У статтях [13, 14] ці ЛП-задачі узагальнювались на випадок нелінійних опуклих задач, а в [15, 16] — на випадок булевих лінійних задач.

У даній роботі, яка є розвитком робіт [12, 14, 16], розглянуто математичні моделі двох класів задач знаходження пропускних здатностей дуг відмовостійкої орієнтованої мережі. Відмовостійкою вважається мережа, для якої можна задовольнити всі вимоги на передачу потоків як при відсутності відмов у мережі, так

* Робота підтримана CRDF Global (грант G-202102-68020).

© П.І. СТЕЦЮК, О.П. ЛИХОВИД, В.О. ЖИДКОВ, А.А. СУПРУН, 2021

і тоді, коли матиме місце будь-яка одна з усіх можливих одиничних відмов мережі. У першому класі задач (задача А) для передачі потоків можуть використовуватись всі можливі шляхи в мережі. У другому класі (задача Р) для передачі потоків задіяні тільки шляхи із наперед заданої множини шляхів. Математичні моделі представлені задачами лінійного, булевого та нелінійного програмування з мережевою структурою матриці обмежень.

Матеріал статті представлено в такому порядку. У першому розділі описано поняття одиничної відмови та сценарію відмов мережі, наведено зміст оптимізаційних задач А та Р для модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі, описано тестову мережу (6 вершин та 19 дуг) для перевірки алгоритмів розв'язання задач модернізації відмовостійких мереж.

У другому розділі описано базові моделі задач лінійного програмування для знаходження пропускних здатностей дуг відмовостійкої фізичної структури мережі (задача А) та відмовостійкої логічної структури мережі (задача Р), розглянуто їх властивості. У третьому розділі описано задачі А та Р у формі моделей змішаного булевого лінійного програмування. Наведено оптимальні розв'язки задачі А для різних сценаріїв відмов у тестовій мережі. Розв'язки знайдені за допомогою програми Gurobi [17] з NEOS-сервера [18], де математичну модель задачі А описано мовою моделювання AMPL [19].

У четвертому розділі описано нелінійні моделі опуклого програмування для задач А та Р, які призначено для знаходження оптимальних (за вибраним критерієм) пропускних здатностей дуг відмостійких мереж, та описано декомпозиційний алгоритм їх розвязання. У п'ятому розділі наведено опис програмного забезпечення для декомпозиційного алгоритму на основі ефективних реалізацій *r*-алгоритмів Шора [20–23]. Проведено порівняння програми IPOPT [24] та декомпозиційного алгоритму для розв'язання тестових задач.

1. Основні поняття для відмовостійкої мережі

Нехай $N = (V, A)$ — орієнтована мережа з множиною вершин V та множиною дуг A. Пропускну здатність дуги $a = (i, j) \in A$, спрямованої з вершини $i \in V$ у вершину $j \in V$, позначимо y_a.

Означення. Одиничною відмовою мережі назвемо такий її стан, коли пропускні здатності дуг змінюються за правилом: $y'_a = \mu_a y_a$, $\forall a \in A$, якщо хоча б один з коефіцієнтів $\mu_a \in [0, 1)$.

За допомогою цього поняття можна описати різноманітні аварійні ситуації, що мають місце у функціонуючих мережах будь-якого типу: автомобільних, залізничних, комунікаційних, енергетичних тощо. Множину одиничних відмов мережі будемо називати сценарієм відмов мережі та позначати буквою F (Fault) в комбінації з відповідним цьому сценарію набором цифр. Зауважимо, що для зручності одиничною відмовою мережі будемо вважати її повноцінне функціонування, що буде мати місце, якщо для всіх дуг коефіцієнти $\mu_a = 1$.

Для мережі $Net(4, 4)$ (рис. 1) в табл. 1 приведено сценарій відмов 0,5F, коли одна, але будь-яка дуга з чотирьох, зменшує свою пропускну здатність удвічі ($\mu_a = 0,5$). Якщо для сценарію 0,5F всі значення 0,5 замінити нульовими, то отримаємо новий сценарій відмов 1F, рівносильний повній відмові тільки однієї будь-якої дуги в мережі. На рис. 2 наведено одиничні відмови (окремі

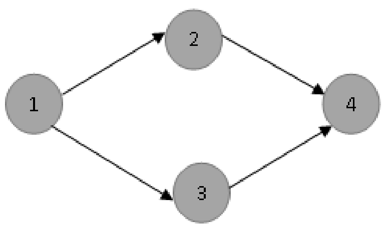


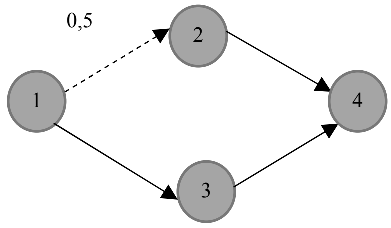
Рис. 1

пошкодження) у мережі $Net(4, 4)$ для сценаріїв 0,5F та 1F відповідно. Дуги, для яких коефіцієнти $\mu_a = 1$, виділені суцільними лініями, а дуги, для яких коефіцієнти $\mu_a = 0,5$, — пунктирними.

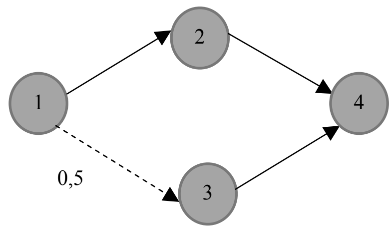
Таблиця 1

№	Дуги	0F	0,5 F				1F			
	(i, j)	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	(1,2)	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0
2	(1,3)	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0
3	(2,4)	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0
4	(3,4)	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0

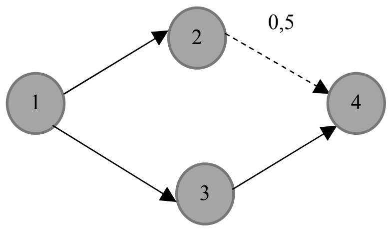
1. Сценарій 0,5F



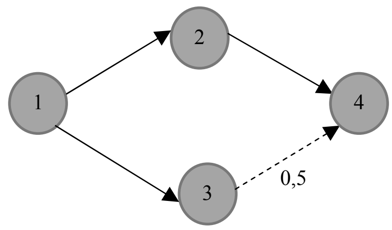
2. Сценарій 0,5F



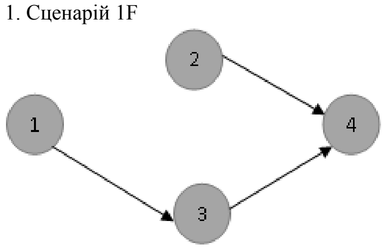
3. Сценарій 0,5F



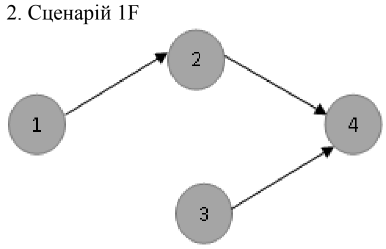
4. Сценарій 0,5F



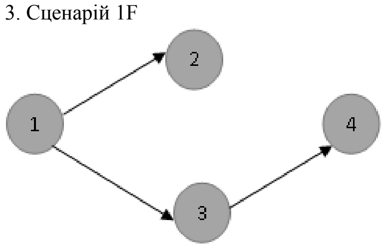
1. Сценарій 1F



2. Сценарій 1F



3. Сценарій 1F



4. Сценарій 1F

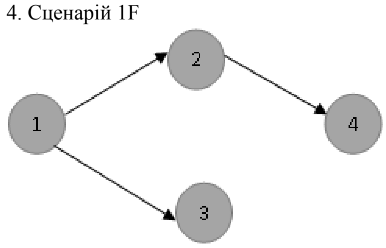


Рис. 2

Зміст задач знаходження пропускних здатностей дуг та вершин для відмовостійкої мережі полягає в наступному.

Задано:

1. Мережа: $N = (V, A)$**;** y_a^0 — значення існуючих пропускних здатностей дуг, $a \in A$; y_a^{low}, y_a^{up} — нижня та верхня межі на пропускні здатності дуг, $a \in A$.

2. Мережевий трафік: K **—** обсяги потоку в мережі; d_k, $k \in K$, — обсяг потоку від вершини $s(k) \in V$ до вершини $r(k) \in V$, які назвемо джерелом (sender) та стоком (receiver) відповідно.

3. Сценарії відмов: T для мережі $N = (V, A)$: $\mu_{at}, \mu_{at} \in [0, 1]$, $\forall a \in A$, $\forall t \in T$. Якщо $\mu = 0$, то це рівнозначно відмові дуги a. Якщо $\mu = 1$, то це означає, що дуга a не відмовляє.

Потрібно знайти: оптимальні за критерієм модернізації (розглянемо далі) пропускні здатності дуг y_a^*, $a \in A$ (що додаються до вже існуючих y_a^0), при яких забезпечується заданий обсяг трафіку K в мережі $N = (V, A)$, якщо станеться одна, але довільна, одинична відмова зі сценарію відмов T.

Для мережі $N = (V, A)$ розглянемо два типи задач знаходження пропускних здатностей дуг.

Задача А: для передачі потоків залучаються всі можливі шляхи в мережі.

Задача Р: для передачі потоків залучаються лише шляхи із заданої множини шляхів P. Тут $P = \cup_{k \in K} P_k$, де P_k — множина шляхів для потоку k.

Іншими словами, пересилання потоків в задачі А визначається фізичною (визначена вершинами та дугами орієнтовної мережі) структурою мережі, а в задачі Р — логічною (визначена набором можливих шляхів).

У наступному розділі опишемо базові задачі лінійного програмування (ЛП-задачі А та Р), які використовуватимуться при побудові для задач А та Р відповідних моделей булевого лінійного програмування (розд. 3) та нелінійного програмування (розд. 4). Розв’язки задач модернізації пропускних здатностей дуг проілюструємо на прикладі орієнтованої мережі Net(6,16) з шістьма вершинами та 16 дугами (рис. 3), яка розглядалася при описі математичного забезпечення для задач проектування надійних мереж [12].

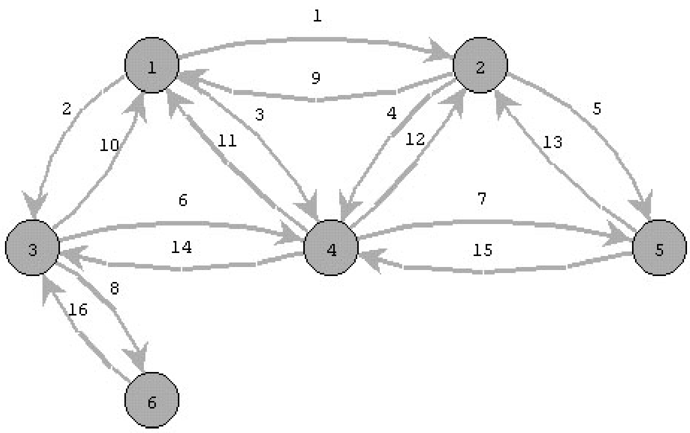


Рис. 3

Вартості створення одиниці пропускної здатності для дуг (1,2) та (2,1) будуть рівними 1,5, а для всіх інших дуг — рівними 1. Вважатимемо, що між усіма парами вершин потрібно переслати по мережі один і той же обсяг потоку, що дорівнює десяти одиницям, які із сценаріїв відмов, використовувані у мережі Net(6,16) [12, с. 114], будемо уточнювати для кожного окремого розрахунку тієї чи іншої задачі.

2. Базові ЛП-задачі А та Р

Припустимо, c_v, c_a — вартість створення одиниці пропускних здатностей для вершини v та дуги a, A_i^+ та A_i^- — множини дуг, що входять і виходять з вершини $v, v \in V$. Тоді задача А має такий вигляд: знайти

$$c_A^* = \min_{x,\, y} \sum_{a \in A} c_a y_a \tag{1}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} x_{akt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \quad \forall a \in A,\ \forall t \in T, \tag{2}$$

$$\sum_{a \in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a \in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{якщо } i = s(k); \qquad \forall i \in V, \\ -d_k, & \text{якщо } i = r(k); \qquad \forall k \in K, \\ 0 & \text{у протилежному випадку}; \quad \forall t \in T, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{akt} \ge 0, \forall a \in A,\ \forall k \in K,\ \forall t \in T, \tag{4}$$

$$y_a^{low} \le y_a \le y_a^{up},\ \forall a \in A. \tag{5}$$

Тут змінні x_{akt} позначають невідомий потік продукту k по дузі a при пошкодженні t, $s(k) = \text{sender}(k)$, $r(k) = \text{receiver}(k)$. Змінні y_a позначають невідомі значення пропускних здатностей дуг $a \in A,$ що додаються до існуючих пропускних здатностей y_a^0.

Формулювання задачі Р має такий вигляд: знайти

$$c_P^* = \min_{z,\, y} \sum_{a \in A} c_a y_a \tag{6}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a),\ \forall a \in A,\ \forall t \in T, \tag{7}$$

$$\sum_{p \in P_k} z_{kpt} = d_k,\ \forall k \in K,\ \forall t \in T, \tag{8}$$

$$z_{kpt} \ge 0, \forall k \in K, \forall p \in P,\ \forall t \in T, \tag{9}$$

$$y_a^{low} \le y_a \le y_a^{up},\ \forall a \in A, \tag{10}$$

де

$$\delta_{kpa} = \begin{cases} 1, & \text{коли шлях } p \in P_k \text{ включає дугу } a; \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тут змінні z_{kpt} позначають потік продукту $k \in K$ по шляху $p \in P_k$ при пошкодженні $t \in T.$ Змінні y_a такі ж, як і для задачі (1)–(5).

Зміст ЛП-задач (1)–(5) та (6)–(10) досить прозорий. Цільові функції (1) та (6), які мінімізуються, задають сумарні витрати на вартість тих пропускних здатностей (що доповнюють вже існуючі) дуг, які потрібно знайти з метою забезпечення безвідмовної роботи мережі $N(V, A)$. Зміст обмежень у ЛП-задачах А та Р такий: обмеження (2), (7) означають, що потоки по дугах не повинні перевищувати пропускних здатностей дуг при довільній одиничній відмові зі сценарію відмов; обмеження (3), (8) гарантують виконання умов по мережевому трафіку; обмеження (4), (9) відповідають за невід'ємність потоків, а нерівності (5), (10) накладають двосторонні обмеження на вибір пропускних здатностей дуг, що додаються до уже існуючих.

Для ЛП-задачі (1)–(5) кількість змінних N_A та кількість обмежень M_A (без урахування найпростіших обмежень (4) — обмежень на невід'ємність змінних x_{akt}) визначаються за формулами

$$N_A = |A|*|K|*|T| + |A|, \ M_A = |A|*|T| + |V|*|K|*|T| + 2*|A|, \tag{11}$$

де для N_A перший доданок задає кількість змінних x_{akt}, другий — кількість змінних y_a, а для M_A перший доданок задає кількість обмежень (2), другий — кількість обмежень (3), третій — кількість обмежень (5).

Для ЛП-задачі (6)–(10) кількість змінних N_P та кількість обмежень M_P (без урахування найпростіших обмежень (9) — обмежень на невід'ємність змінних z_{kpt}) визначаються за формулами

$$N_P = |K|*|P|*|T| + |A|, \quad M_P = |A|*|T| + |K|*|T| + 2*|A|, \tag{12}$$

де для N_P перший доданок задає кількість змінних z_{kpt}, другий — кількість змінних y_a, а для M_P перший доданок задає кількість обмежень (7), другий — кількість обмежень (8), третій — кількість обмежень (10).

Якщо мережа $N(V, A)$ має відносно невеликі розміри (20 вершин, 100 дуг), то ЛП задачі А та Р мають дуже велику вимірність. Так, наприклад, якщо $|A| \approx 100$, $|K| \approx 400$, $|V| \approx 20$, $|T| \approx 1000$, то у ЛП-задачі А кількість змінних N_A та кількість обмежень M_A мають порядок 10^7. Якщо при цьому ще й $|P| \approx 10000$, то у ЛП-задачі Р кількість змінних N_P має порядок 10^8 та кількість обмежень M_P мають порядок 10^5.

У цьому випадку ЛП-задачі (1)–(5) та (6)–(10) неможливо розв'язати навіть за допомогою найкращих сучасних програм для задач лінійного програмування, наприклад CPLEX та Gurobi, тому що це вимагає значних обчислювальних ресурсів. Однак в обох ЛП-задачах матриця обмежень має вкладену блочну структуру (рис. 4, нульові блоки білого кольору), що дає можливість розробляти декомпозиційні алгоритми розв'язування ЛП-задач А та Р і для більших, ніж наведені вище, розмірів мережі, наприклад, мережа може містити 100 вершин та 1000 дуг.

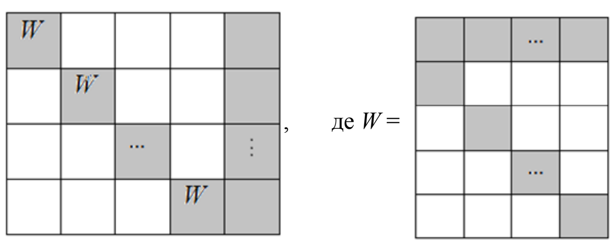


Рис. 4

Такі декомпозиційні алгоритми описано (розд. 4) як для лінійної цільової функції, так і для опуклих гладкої та негладкої цільових функцій.

У наступному розд. 3 для задач А та Р розглянуто моделі змішаного булевого лінійного програмування, які враховують витрати на створення нових дуг та визначають ті, пропускні здатності яких потрібно модернізувати у відмовостійкій мережі.

3. Булеві задачі A та P

Математичні моделі відповідних задач змішаного булевого лінійного програмування (булевих задач А та Р) легко отримати, якщо у задачах (1)–(5) та (6)–(10) цільові функції (1) і (6) замінити цільовими функціями

$$F_A^* = \min_{x,\,y,\,u} \sum_{a\in A} C_a u_a + \sum_{a\in A} c_a y_a, \tag{13}$$

$$F_P^* = \min_{z,\,y,\,u} \sum_{a\in A} C_a u_a + \sum_{a\in A} c_a y_a, \tag{14}$$

а обмеження (5) та (10) — обмеженнями

$$y_a^{low} u_a \le y_a \le y_a^{up} u_a,\ \ \forall a \in A, \tag{15}$$

де C_a — витрати на створення доданих пропускних здатностей дуг, а булеві змінні $u_a = 0 \vee 1$ дорівнюють одиниці, якщо дуга $a \in A$ додається до мережі, і нулю в протилежному випадку.

Тоді формулювання булевої задачі А має такий вигляд: знайти

$$F_A^* = \min_{x,\,y,\,u} \sum_{a\in A} C_a u_a + \sum_{a\in A} c_a y_a \tag{16}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k\in K} x_{akt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a),\ \ \forall a \in A,\ \ \forall t \in T, \tag{17}$$

$$\sum_{a\in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a\in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{якщо } i = s(k); \quad \forall i \in V, \\ -d_k, & \text{якщо } i = r(k); \quad \forall k \in K, \\ 0 & \text{у протилежному випадку;} \quad \forall t \in T, \end{cases} \tag{18}$$

$$x_{akt} \ge 0,\ \ \forall a \in A,\ \ \forall k \in K,\ \ \forall t \in T, \tag{19}$$

$$y_a^{low} u_a \le y_a \le y_a^{up} u_a,\ \ \forall a \in A. \tag{20}$$

Формулювання булевої задачі Р має такий вигляд: знайти

$$F_P^* = \min_{z,\,y,\,u} \sum_{a\in A} C_a u_a + \sum_{a\in A} c_a y_a \tag{21}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k\in K} \sum_{p\in P_k} \delta_{kpa}\, z_{kpt} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a),\ \ \forall a \in A,\ \ \forall t \in T, \tag{22}$$

$$\sum_{p\in P_k} z_{kpt} = d_k,\ \ \forall k \in K,\ \ \forall t \in T, \tag{23}$$

$$z_{kpt} \ge 0,\ \ \forall k \in K,\ \ \forall p \in P,\ \ \forall t \in T, \tag{24}$$

$$y_a^{low} u_a \le y_a \le y_a^{up} u_a,\ \ \forall a \in A. \tag{25}$$

Якщо $C_a = 0,$ то розв'язки булевих задач (16)–(20) та (21)–(25) співпадають з розв'язками ЛП-задач (1)–(5) та (6)–(10). Якщо $C_a > 0$, то мінімізуватимуться сумарні витрати на вартість та створення пропускних здатностей дуг, що доповнюють існуючі у мережі. Вибір відповідних дуг мережі залежатиме від коефіцієнтів $C_a > 0, a \in A.$

Один із можливих способів розв'язання задач (16)–(20) і (21)–(25) полягає у представленні їх на мові моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) [19] та використанні сучасного програмного забезпечення для розв'язання задач цілочислового лінійного програмування, наприклад програми Gurobi [17] з NEOS-сервера [18]. У табл. 2, 3 наведено результати тестування програми Gurobi для розв'язання задачі (16)–(20) на прикладі орієнтованої мережі Net(6, 16) (див. рис. 3). Тут сценарії відмов відповідають сценаріям із [12, с. 114, 115]:

а) відсутність одиничних відмов;

б) відмовити може будь-яка, але одна дуга, за винятком дуг, зв'язаних з вершиною 6;

в) одна відмова, коли одночасно відмовляють чотири дуги: (1,2), (2,1), (2,4) та (4,2);

г) будь-яка з дуг, але тільки одна, може зменшити свою пропускну здатність вдвічі.

Таблиця 2

N	(i, j)	c_{ij}	$y_a^0 = y_{ij}^0 = 0$				$y_{ij}^0 = (y_{ij}^*)_a$		
			a	b	c	f	b	c	f
1	(1, 2)	1,5	10	50	0	46,66	40	0	20
2	(1, 3)	1	20	80	20	53,33	60	0	30
3	(1, 4)	1	20	40	30	16,66	20	10	10
4	(2, 4)	1	30	30	0	10	0	0	0
5	(2, 5)	1	10	50	50	26,66	40	40	20
6	(3, 4)	1	60	80	60	53,33	20	0	0
7	(4, 5)	1	40	50	80	46,66	10	40	0
8	(3, 6)	1	50	50	50	100	0	0	50
9	(2, 1)	1,5	10	50	0	46,66	40	0	20
10	(3, 1)	1	20	80	20	53,33	60	0	30
11	(4, 1)	1	20	40	30	16,66	20	10	10
12	(4, 2)	1	30	30	0	10	0	0	0
13	(5, 2)	1	10	50	50	26,66	40	40	20
14	(4, 3)	1	60	80	60	53,33	20	0	0
15	(5, 4)	1	40	50	80	46,66	10	40	0
16	(6, 3)	1	50	50	50	100	0	0	50
$\sum_{(i,\,j)\in A} c_{ij} y_{ij}^*$			490	910	580	753,33	420	180	280

В табл. 2 наведено два варіанти мінімальних за сумарною вартістю пропускних спроможностей дуг мережі Net(6, 16) при сценаріях відмов а)–г), яким відповідають нульові значення $C_a = 0$. Вони отримані програмою Gurobi при двох різних значеннях існуючих пропускних спроможностей — нульових значеннях $y_a^0 = y_{ij}^0 = 0$ та ненульових $y_{ij}^0 = (y_{ij}^*)_a$, отриманих для сценарію а) за існуючих пропускних спроможностях $y_a^0 = y_{ij}^0 = 0$. При цьому час розв'язання дорівнював декільком секундам.

Зауважимо, що результати розрахунку в табл. 2 співпадають з результатами розрахунків із [12, с. 116, 117], що і повинно бути, оскільки ЛП-задача А із [12] співпадає з ЛП-задачею (1)–(5).

 ISSN 1028-0979

Таблиця 3

N	(i, j)	C_a	Без активних обмежень (15)				Активна дуга $y_{11}^{up} = 20$		
			a	b	c	f	a	b	C
1	(1, 2)	10	0	50	0	33,33	0	50	0
2	(1, 3)	10	20	80	20	43,33	20	80	20
3	(1, 4)	10	30	40	30	30	30	40	30
4	(2, 4)	10	40	30	0	0	40	0	0
5	(2, 5)	10	10	50	50	33,33	0	50	50
6	(3, 4)	10	60	80	60	53,33	60	80	60
7	(4, 5)	10	40	50	80	33,33	50	50	80
8	(3, 6)	10	50	50	50	100	50	50	50
9	(2, 1)	10	0	50	0	53,33	10	80	0
10	(3, 1)	10	20	80	20	53,33	20	80	30
11	(4, 1)	10	30	40	30	0	20	10	20
12	(4, 2)	10	50	30	0	30	50	30	0
13	(5, 2)	10	1,30E-12	50	50	23,33	1,90E-12	50	50
14	(4, 3)	10	60	80	60	73,33	60	80	70
15	(5, 4)	10	50	50	80	53,33	50	80	80
16	(6, 3)	10	50	50	50	100	50	50	50
$\sum_{a\in A_a} C_a u_a + \sum_{a\in A_a} c_a y_a$			640	1070	700	896,67	645	1075	710

В табл. 3 наведено оптимальні (мінімальні за сумарними витратами на вартість та створення) додані пропускні спроможності дуг мережі Net(6,16) для ненульових значень $C_a = 10$ при тих же сценаріях відмов а)–г). Вони отримані за допомогою програми Gurobi для варіанта без активних обмежень (20) та для варіанта з обмеженням зверху на пропускну здатність всього для однієї дуги $y_{11}^{up} = y_{(4,1)}^{up} = 20$. Для варіанта з обмеженням зверху на пропускну здатність в табл. 3 відсутній варіант г). Це пов'язано з тим, що розв'язок задачі для цього варіанта без активних обмежень (20) повністю співпадає з розв'язком для варіанта г) з обмеженням для дуги 11. Із табл. 3 видно, що активне обмеження зверху на пропускну здатність навіть однієї дуги (зменшено на десять одиниць порівняно зі значенням із розв'язку задачі для варіанта а) без активних обмежень (20)) може призвести до досить суттєвого перерозподілу оптимальних пропускних здатностей дуг (дуги 4, 5, 9). Час розв'язання задач для табл. 3 також дорівнював декільком секундам.

4. Опуклі задачі А та Р. Декомпозиційні алгоритми

Математичні моделі задач знаходження пропускних спроможностей дуг відмовостійкої мережі можуть бути представлені як опуклі оптимізаційні задачі, в яких мінімізується цільова опукла функція (як гладка, так і негладка) від невідомих $Y = \{y_a, \forall\, a \in A\}$ — пропускних спроможностей дуг мережі. Окремим випадком опуклих задач є ЛП-задачі А та Р, для них опукла функція є лінійною функцією $f_1(Y) = \sum_{a\in A} c_a y_a$ та мінімізує сумарні витрати за вартістю пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі. Квадратична гладка функція $f_2(Y) = \sum_{a\in A} (y_a - y_a^e)^2$ і негладка функція $f_3(Y) = \sum_{a\in A} \left| y_a - y_a^e \right|$, де $y_a^e,\ a \in A,$ — деякі «бажані» пропускні здатності дуг, дозволяють знайти пропускні здатності дуг мережі з мінімальним відхиленням від «бажаних» пропускних здатностей дуг за критерієм найменших квадратів та критерієм найменших модулів. Нижче розглянемо задачі мінімізації опуклої функції $f(Y) = f_i(Y)$, де $i \in \{1, 2, 3\}$, при обмеженнях ЛП-задач, прибравши в (5) та (10) двосторонні обмеження на невідомі пропускні здатності дуг.

Тоді формулювання опуклої задачі А має такий вигляд: знайти

$$f_A^* = \min_{x,\, y} \left\{ f(Y) + \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} Q_a y_{at} \right\} \tag{26}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} x_{akt} - y_{at} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \ \forall a \in A, \ \forall t \in T, \tag{27}$$

$$\sum_{a \in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a \in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{якщо } i = s(k); \quad \forall i \in V, \\ -d_k, & \text{якщо } i = r(k); \quad \forall k \in K, \\ 0 & \text{у протилежному випадку}; \quad \forall t \in T, \end{cases} \tag{28}$$

$$x_{akt} \ge 0, \ \forall a \in A, \ \forall k \in K, \ \forall t \in T, \tag{29}$$

$$y_{at} \ge 0, \ \forall a \in A, \ \forall t \in T, \ y_a \ge 0, \ \forall a \in A. \tag{30}$$

Формулювання опуклої задачі Р має такий вигляд: знайти

$$f_P^* = \min_{z,\, y} \left\{ f(Y) + \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} Q_a y_{at} \right\} \tag{31}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} - y_{at} \le \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \ \forall a \in A, \ \forall t \in T, \tag{32}$$

$$\sum_{p \in P_k} z_{kpt} = d_k, \ \forall k \in K, \ \forall t \in T, \tag{33}$$

$$z_{kpt} \ge 0, \ \forall k \in K, \ \forall p \in P, \ \forall t \in T, \tag{34}$$

$$y_{at} \ge 0, \ \forall a \in A, \ \forall t \in T, \ y_a \ge 0, \ \forall a \in A. \tag{35}$$

Для забезпечення сумісності систем обмежень введено додаткові невід'ємні змінні $y_{at} \ge 0, \ \forall a \in A, \ \forall t \in T$, де y_{at} відповідає тому значенню пропускної здатності дуги $a \in A$, якого не вистачає при виникненні t-ї одиничної відмови мережі для виконання обмежень (27) та (32), що відповідають цим $a \in A$ та $t \in T$. «Штрафні» множники Q_{at} вибираються такими, щоб оптимальні значення y_{at}^* дорівнювали нулю. Якщо структура одиничних відмов така, що відмовостійке функціонування мережі $N(V, A)$ неможливе, то ненульові оптимальні значення y_{at}^* будуть характеризувати ті критичні місця в мережі $N(V, A)$, через які неможливо забезпечити її відмовостійке функціонування.

Зі структури опуклих задач (див. рис. 4) видно, що змінні $Y = \{y_a, \forall\, a \in A\}$ є зв'язуючими в обох задачах. Тому для їх розв'язання доцільно використовувати схему декомпозиції за змінними Y [20]. При цьому координуючі (зовнішні) задачі полягають в мінімізації негладких опуклих функцій $F_A(Y)$ та $F_P(Y)$ від зв'язуючих змінних Y і для знаходження їх мінімумів можна застосовувати r-алгоритм [20, 22], який вважається одним із ефективних методів негладкої оптимізації [25–27].

 ISSN 1028-0979

Внутрішня підзадача, яку потрібно розв'язати для обчислення субградієнта функції $F_A(Y)$, буде пов'язана з пошуком значень двоїстих змінних до обмежень (37) для задачі лінійного програмування такого вигляду: знайти

$$\varphi_A^*(t) = \min_{x,\, y} \sum_{a \in A} Q_a y_{at} \tag{36}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} x_{akt} - y_{at} \le \mu_{at}(y_a^0 + \overline{y}_a), \ \ \forall a \in A \tag{37}$$

$$\sum_{a \in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a \in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{якщо } i = s(k); \\ -d_k, & \text{якщо } i = r(k); \\ 0 & \text{у протилежному випадку;} \end{cases} \quad \forall i \in V, \forall k \in K, \tag{38}$$

$$x_{akt} \ge 0, \ \ \forall a \in A, \ \ \forall k \in K, \tag{39}$$

$$y_{at} \ge 0, \ \ \forall a \in A, \tag{40}$$

де $\overline{y}_a$ — відомі поточні (на даний момент) значення пропускних здатностей дуг. При обчисленні субградієнта функції $F_A(Y)$ внутрішню підзадачу потрібно розв'язувати $|T|$ раз.

Для розв'язання внутрішньої підзадачі (36)–(40) можна застосувати як схему декомпозиції за обмеженнями з використанням r-алгоритму, так і стандартні програми для розв'язування задач лінійного програмування (наприклад, методи внутрішніх точок [28, 29], що дозволяють врахувати блочну структуру підзадачі). При використанні r-алгоритму потрібна тільки підпрограма для знаходження найкоротших шляхів в орієнтованій мережі.

Щоб обчислити субградієнт функції $F_P(Y)$, потрібно $|T|$ раз розв'язати підзадачу знаходження двоїстих змінних до обмежень (42) для такої задачі лінійного програмування: знайти

$$\varphi_A^*(t) = \min_{x,\, y} \sum_{a \in A} Q_a y_{at} \tag{41}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kpa} z_{kpt} - y_{at} \le \mu_{at}(y_a^0 + \overline{y}_a), \ \ \forall a \in A, \tag{42}$$

$$\sum_{p \in P_k} z_{kpt} = d_k, \ \ \forall k \in K, \tag{43}$$

$$z_{kpt} \ge 0, \ \ \forall k \in K, \ \ \forall p \in P, \tag{44}$$

$$y_{at} \ge 0, \ \ \forall a \in A, \tag{45}$$

де $\overline{y}_a$ — відомі поточні значення пропускних здатностей дуг, що доповнюють існуючі.

Підзадача (41)–(45) простіша, ніж відповідна підзадача (36)–(40), і для її розв'язування можна використовувати r-алгоритм у комбінації зі схемою декомпозиції за обмеженнями (42).

5. Програмне забезпечення: програми Solver A та Solver P

Для розв'язання опуклих задач знаходження оптимальних пропускних здатностей дуг для побудови відмовостійкої орієнтованої мережі реалізовані такі програми: SolverA для задачі (26)–(30) та SolverP для задачі (31)–(35) (мова програмування ФОРТРАН). Алгоритми розв'язування обох задач базуються на подвійному використанні двох схем декомпозиції (одна в одній): схема декомпозиції за змінними, якими є невідомі значення доданих пропускних здатностей дуг орієнтованої мережі; схема декомпозиції за обмеженнями (для розв'язання підзадач, які виникають для кожної одиничної відмови при фіксованих значеннях доданих пропускних здатностей дуг). Відповідні вказаним схемам декомпозиції задачі негладкої оптимізації розв'язуються за допомогою r-алгоритму з адаптивним регулюванням крокового множника, де параметри r-алгоритму вибрані таким чином: коефіцієнт розтягу простору $\alpha = 4$, а параметри адаптивного регулювання крокового множника — $n_h = 3$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1{,}1$. Максимальна кількість ітерацій, відведена r-алгоритму для розв'язування підзадач, дорівнює 500.

У результаті роботи програм SolverA та SolverP отримуємо такі параметри відмовостійкої орієнтованої мережі $N(V, A)$: мінімальні за сумарною вартістю пропускні здатності дуг мережі $N(V, A)$, що доповнюють існуючі, тобто для кожної дуги $a \in A$ знаходиться y_a^* — ресурс пропускної здатності дуги a, що доповнює існуюче значення пропускної здатності цієї дуги y_a^0; достатня умова того, що неможливо виконати усі вимоги на передачу об'ємів потоків, щоб орієнтована мережа була відмовостійкою. Це може бути з двох причин: а) структура мережі $N(V, A)$ така, що задовільнити вимоги до потоків неможливо; б) структура одиничних відмов мережі $N(V, A)$ така, що задовільнити вимогам до потоків неможливо. Достатньою умовою невиконання усіх вимог на передачу об'ємів потоків в мережі є нерівність $\sum\limits_{t \in T} \sum\limits_{a \in A} Q_{at} y_{at}^* \gg 0$, яка має місце тоді і тільки тоді, коли в f_A^* або f_P^* вносить ненульовий вклад «штрафна» частина цільової функції.

Загальна структура програми SolverA наведена на рис. 5, де вказані блоки виконують наступні функції.

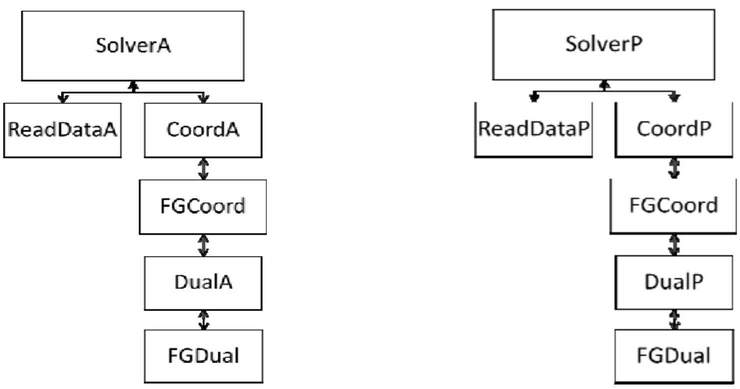


Рис. 5

 ISSN 1028-0979

Головна програма SolverA керує процесом знаходження розв'язку опуклої задачі А. У програмі встановлюються штрафні параметри (на основі вхідних даних), запускається процесс розв'язування задачі (26)–(30), аналізується отриманий розв'язок, результати розрахунку виводяться в файл протоколу роботи програми. Програма SolverA використовує підпрограми ReadDataA та CoordA.

Підпрограма ReadDataA читає вхідні дані задачі та перевіряє їх коректність за низкою ознак. Вхідні дані читаються послідовно з трьох файлів, які містять: а) структуру орієнтованої мережі; б) об'єми потоків між парами вершин, що пересилаються по мережі; в) сценарій відмов у мережі.

Підпрограма CoordA реалізує роботу r-алгоритму для розв'язування координуючої негладкої задачі, пов'язаної зі схемою декомпозиції за змінними (використовує підпрограму FGCoord). Підпрограма FGCoord обчислює значення негладкої координуючої функції та її субградієнта, послідовно використовуючи підпрограму DualA для кожного з пошкоджень.

Підпрограмма DualA знаходить двоїсті змінні до обмежень (37) підзадачі (36)–(40). Для їх знаходження за допомогою r-алгоритму розв'язується задача максимізації негладкої ввігнутої функції, що відповідає схемі декомпозиції за обмеженнями (37). Підпрограма FGDual обчислює значення функції та її субградієнта для підпрограми DualA, використовуючи метод знаходження найкоротшого шляху в орієнтованій мережі [30, с.137].

Аналогічно схемі реалізовано програму SolverP (рис. 5), де відповідні блоки виконують такі функції.

Головна програма SolverP керує процесом знаходження розв'язку опуклої задачі Р. У програмі встановлюються штрафні параметри (на основі вхідних даних), запускається алгоритм розв'язування задачі (31)–(35), аналізується отриманий розв'язок, результати розрахунку виводяться в файл протоколу роботи програми. Програма SolverP використовує підпрограми ReadDataP та CoordP.

Підпрограма ReadDataP читає вхідні дані задачі та перевіряє їх коректність. Вхідні дані читаються послідовно з чотирьох файлів, які містять: а) структуру орієнтованої мережі; б) об'єми потоків, що пересилаються по мережі; в) структуру пошкоджень мережі; г) допустимі шляхи для передачі потоків в мережі.

Підпрограма CoordP реалізує роботу r-алгоритму для розв'язування координуючої негладкої задачі, пов'язаної зі схемою декомпозиції за змінними Y для задачі (31)–(35). Підпрограма FGCoord обчислює значення негладкої координуючої функції та її субградієнта, які використовуються програмою CoordP. Для обчислення цих значень послідовно для кожного з пошкоджень використовується підпрограма DualC.

Підпрограмма DualC знаходить двоїсті змінні до обмежень (42) підзадачі (41)–(45) за допомогою r-алгоритму. Підпрограма FGDual обчислює значення функції та суперградієнта для підпрограми DualC.

Нині проводяться тестування та дослідження ефективності програм SolverA та SolverP для описаних вище лінійної функції $f_1(Y)$, квадратичної функції $f_2(Y)$ та нелінійної негладкої функції $f_3(Y)$ на прикладі орієнтованої мережі Net(6, 16). Для порівняння вибрано відому програму IPOPT [24] з NEOS-сервера. Результати тестування показали, що час розв'язання опуклих тестових задач з одиничними відмовами дуг за допомогою програми SolverA може бути суттєво менший за час розв'язання таких задач за допомогою програми IPOPT. Так, для сценарію б) час розв'язання задачі А з функцією $f_1(Y)$ за допомогою програми SolverA дорівнює 2,5 с, з функцією $f_2(Y)$ — 2,7 с, з функцією $f_3(Y)$ — 2,6 с, а за допомогою програми IPOPT відповідно 97, 424 та 99 с. При цьому у всіх випадках знайдено оптимальні розв`язки.

Висновки

Наведено опис математичних моделей для двох класів задач знаходження пропускних здатностей дуг відмовостійкої орієнтованої мережі. У першому класі задач (задача A) для передачі потоків задіяні всі можливі шляхи в мережі. У другому класі задач (задача P) для передачі потоків задіяні тільки шляхи із наперед заданої множини шляхів. Математичні моделі задач представлено задачами лінійного програмування, змішаного булевого лінійного програмування, нелінійного програмування з вкладеною блочною структурою матриці обмежень (див. рис. 4). Вони включають широкий набір цільових функцій, що розширює клас задач модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійких мереж, до яких їх можна застосувати.

Також представлено алгоритми розв'язання цих типів задач, засновані на використанні відомих солверів для задач математичного програмування та *r*-алгоритмів Шора у сполученні з методами декомпозиції [20, 31]. Наведено приклади тестових задач; обчислювальні експерименти демонструють реалістичність розробки для сучасних ПЕОМ алгоритмів реального часу за швидкодією для розв'язання задач модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійких орієнтованих мереж розмірами 100 вершин та 1000 дуг.

П.І. Стецюк, О.П. Лиховид, В.О. Жидков, А.А. Супрун

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРОПУСКНИХ ЗДАТНОСТЕЙ ДУГ ВІДМОВОСТІЙКИХ МЕРЕЖ

Розглянуто математичні моделі двох класів задач модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійких орієнтованих мереж. Відмовостійкою вважається мережа, для якої можна задовольнити всі вимоги на передачу потоків, якщо матиме місце одна, будь-яка відмова, з усіх можливих одиничних відмов мережі. У першому класі задач (задача A) для передачі потоків можуть використовуватись всі можливі шляхи в мережі. У другому класі задач (задача P) для передачі потоків задіяно тільки шляхи із напередзаданої множини шляхів. Математичні моделі представлено задачами лінійного, булевого та нелінійного програмування з блочною структурою матриці обмежень. Матеріал статті представлено в п'яти розділах. У розд. 1 описано поняття одиничної відмови та сценарію відмов мережі, наведено зміст оптимізаційних задач A та P для модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі, описано тестову мережу (6 вершин та 19 дуг) для перевірки алгоритмів розв'язання задач модернізації відмовостійких мереж. У розд. 2 описано базові моделі задач лінійного програмування для знаходження пропускних здатностей дуг відмовостійкої фізичної структури мережі (задача A) та відмовостійкої логічної структури мережі (задача P), розглянуто їх властивості. У розд. 3 описано задачі A та P у формі моделей змішаного булевого лінійного програмування. Наведено оптимальні розв'язки задачі A для різних сценаріїв відмов на прикладі тестової мережі. Розв'язки знайдено за допомогою програми Gurobi з NEOS-сервера, де математичну модель задачі A описано мовою моделювання AMPL. У розд. 4 описано нелінійні моделі опуклого програмування для задач A та P, призначені для знаходження оптимальних за вибраним критерієм пропускних здатностей дуг відмовостійких мереж, та описано декомпозиційний алгоритм їх розв'язання. У розд. 5 наведено опис програмного забезпечення мовою програмування ФОРТРАН для декомпозиційного алгоритму на основі ефективних реалізацій *r*-алгоритмів Шора. Проведено порівняння декомпозиційного алгоритму з програмою IPOPT на основі результатів розв'язання тестових задач.

P.I. Stetsyuk, O.P. Lykhovyd, V.O. Zhydkov, A.A. Suprun

OPTIMIZATION PROBLEMS OF MODERNIZATION OF THE CAPACITY OF ARCS OF FAULT-TOLERANT NETWORKS

Mathematical models of two classes of problems of modernization of the capacity of arcs of fault-tolerant oriented networks are considered. A network is considered to be fault-tolerant for which it is possible to satisfy all the demands for the transmission of flows when there will be one, but any failure, from all possible single network failures. For the first class of problems (problem A), all possible paths in the network can be used for the transmission of flows. For the second class of problems (problem P), only paths from a predetermined set of paths are used to transfer flows. Mathematical models are represented by linear, Boolean and nonlinear programming problems with a block structure of the constraint matrix.The material of the article is presented in five sections. The first section describes the concepts of a single failure and the scenario of network failures, the content of optimization problems A and P for modernization of capacity of arcs of a fault-tolerant network, a test network (6 vertices and 19 arcs) to test algorithms for solving the problems of modernization of fault-tolerant networks. In the second section, basic models of linear programming problems for finding the capacities of arcs of the fault-tolerant physical structure of a network (problem A) and the fault-tolerant logical structure of a network (problem P) are described, and their properties are considered. The third section describes problems A and P in the form of mixed Boolean linear programming models. Optimal solutions of problem A for various failure scenarios are given for the example of the test network. The solutions were found using the Gurobi program from the NEOS server, where the mathematical model of problem A is described in the AMPL modeling language.The fourth section describes nonlinear convex programming models for problems A and P, developed to find the optimal capacities of fault-tolerant networks according to the selected criterion, and a decomposition algorithm for their solution. The fifth section describes software in the FORTRAN programming language for the decomposition algorithm based on efficient implementations of Shor's *r*-algorithms. The decomposition algorithm is compared with the IPOPT program based on the results of solving test problems.

Keywords: fault-tolerant networks, failures scenario, decomposition methods, *r*-algorithm, Gurobi.

1. Koren I., Krishna C.M. Fault tolerant systems, ELSEVIER 2020. 416 p ISBN 9780128181058.
2. Mostafa A. Design and analysis of reliable and fault-tolerant computer systems, Kuwait, 2006. 464 p. https://doi.org/10.1142/p457 ISBN 978-1-86094-668-4.
3. Nagurney A. Sustainable transportation networks. Edward Elgar Publishing Inc. 2000. 304 p. ISBN: 978 1 84064 357 2.
4. Nagurney A., Qiang Q. Fragile networks: Identifying *vulnerabilities* and synergies in an uncertain world. John W. Wiley & Sons. 2009. 344 p. ISBN: 978-0-470-50112-2.
5. Sharifov F.A. The problem of synthesis of reliable networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. **36**. P. 596–604. https://doi.org/10.1007/BF02667067.
6. Shor N. Z., Sharifov F. A. The general problem of synthesis of reliable networks, *Problems of Informatics and Cybernetics*. 2006. N 2–3. P. 126–131.
7. Sharifov F.A., Hulianytskyi L.F. Models and complexity of problems of design and reconstruction of telecommunication and transport systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**. P. 693–700. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9659-8.
8. Buchanan A., Sung J.S., Butenko S., Pasiliao E.L. An Integer programming approach for fault-tolerant connected dominating sets. *INFORMS Journal on Computing*. 2015. **27(1)**. P. 178–188. http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.2014.0619.
9. Buchanan A., Sung J.S., Boginski V., Butenko S. On connected dominating sets of restricted diameter. *European Journal of Operational Research*. 2014. **236(2)**. P. 410–418. http: //dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.11.036.

10. Ekinci G.B., Gauci J.B. On the reliability of generalized Petersen graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 2019. **252**. P. 2–9.
11. Ekinci G.B., Kirlangiç A. Super connectivity of Kronecker product of complete bipartite graphs and complete graphs. *Discrete Mathematics*. 2016. **339(7)**. P. 1950–1953.
12. Задачі оптимального проектування надійних мереж. Н.З. Шор, І.В. Сергієнко, В.П. Шило, П.І. Стецюк та ін. Київ : Наук. думка, 2005. 230 с.
13. Стецюк П.И., Жидков В.А. О двух задачах оптимизации пропускных способностей дуг отказоустойчивости сети. *Материалы V-й международной научной конференции «Транспортные системы и логистика»*. Кишинэу, 11–13 декабря 2013 г. С. 300–309.
14. Stetsyuk P.I., Lykhovyd O.P. Two families of convex problems for finding capacities of arcs of a fault-tolerant network. *Proceedings of 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*. Ukraine: Lviv, July 2–6, 2019. P. 1057–1060 (published in IEEE Xplore Digital Library https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp).
15. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. Две ЛП-задачи с булевыми переменными для отказоустойчивой сети. *Інформатика та системні науки (ІСН-2014): матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф. (м. Полтава, 13-15 березня 2014 року)*. Полтава : ПУЕТ, 2014. С. 284–287.
16. Стецюк П.І., Лиховид О.П., Омельяненко А.М. Задачі модернізації пропускних здатностей дуг відмовостійкої мережі. *Тези доповідей XVIII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2020)»*, 18–20 листопада 2020 р. Дніпро : ДНУ, 2020. С. 10–15.
17. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer reference manual. 2014. https://www.gurobi.com
18. NEOS Solvers [Electronic resource]: https://neos-server.org/neos/solvers/
19. Fourer R., Gay D., Kernighan B. AMPL. A modeling language for mathematical programming. Belmont: Duxburry Press, 2003. 517 p.
20. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. К. : Наук. думка, 1979. 200 с.
21. Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 1. С. 113–134.
22. Stetsyuk P.I. Shor's r-algorithms: theory and practice. *Optimization Methods and Applications*: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. S. Butenko, P.M. Pardalos, V. Shylo (Eds). Springer International Publishing, 2017. P. 495–520.
23. Стецюк П.И. Теория и программные реализации r-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. **53**, № 5. С. 43–57.
24. IPOPT Solver [Electronic resource]: https://github.com/coin-or/Ipopt.
25. Стецюк П.І., Стецюк М.Г., Брагін Д.О., Молодик М.О. Використання r-алгоритму Шора в лінійних задачах робастної оптимізації. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2021. № 1. С. 29–42.
26. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы. Кишинэу : Эврика, 2014. 488 с.
27. Sergienko I. V. Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity. New York: Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2012. 226 p.
28. Дикин И.И. Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования. Новосибирск: Наука, 1980. 127 с.
29. Зоркальцев В.И., Пержабинский С.М., Стецюк П.И. Поиск нормальных решений СЛАУ при двусторонних ограничениях на переменные методом внутренних точек. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. № 6. С. 71–80.
30. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network flows: theory, algorithms, and applications. Engle-wood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1993. 846 p.
31. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. № 1. С. 4–22.

Получено 25.08.2021