УДК 517.977

А.А. Чикрий, И.С. Раппопорт

ГАРАНТИРОВАННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ*

Ключевые слова: стратегия управления, групповое сближение, разрешающая функция, стробоскопическая стратегия.

Введение

В настоящей работе рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы группового сближения применительно к общей схеме метода разрешающих функций [1]. Следуя методике [2], введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата, когда условие Понтрягина не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии группового сближения и дано сравнение гарантированных времен. Исследована модифицированная схема метода разрешающих функций, обеспечивающая завершение процесса группового сближения в классе стробоскопической стратегии Хайека [3].

Работа является развитием идей [1–15], примыкает к исследованиям [16–23] и указывает новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач управления.

Постановка задачи, схема метода

Рассмотрим квазилинейный конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \ i = 1, ..., N, . \ z_i \in R^{n_i}, \ u_i \in U_i \subset R^{m_i}, \ v \in V \subset R^k, \qquad (1)$$

где R^{n_i} — евклидово n_i-мерное пространство, A_i — квадратные матрицы порядка n_i, U_i, V — непустые компакты, вектор-функции $\varphi_i(u_i, v)$ непрерывны по совокупности переменных, являющихся параметрами управления группы преследователей и убегающего.

Терминальное множество M^* состоит из цилиндрических множеств M_i^*, $M_i^* \subset R^{n_i}$, $i = 1, ..., N$, имеющих вид

$$M_i^* = M_i^0 + M_i, \qquad (2)$$

* Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда исследований Украины. Грант № 2020.02/0121.

где M_i^0 — линейное подпространство из R^{n_i}, M_i — выпуклые компакты из ортогональных дополнений L_i к M_i^0 в пространстве R^{n_i}.

Рассмотрим для процесса (1), (2) задачу группового преследования, состоящую в приведении хотя бы одной из траекторий системы (1) на соответствующее множество (2) при любых противодействиях убегающего. При этом если игра (1), (2) происходит на интервале $[0, T]$, то управления группы преследователей в момент t будем выбирать в виде набора измеримых функций

$$u(t) = \{u_i(t), i = 1, ..., N\},\ u_i(t) = u_i(z_i, v_t(\cdot)),\ u_i(t) \in U_i,\ i = 1, ..., N,\ t \in [0, T], \quad (3)$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$, или в виде набора измеримых контруправлений

$$u(t) = \{u_i(t), i = 1, ..., N\},\ u_i(t) = u_i(z_i, v(t)),\ u_i(t) = U_i,\ i = 1, ..., N,\ t \in [0, T]. \quad (4)$$

В случае (3) говорят о квазистратегии группы преследователей [1], в случае (4) — о страбоскопической стратегии Хайека [3] для группы преследователей.

Пусть $\gamma_i(t, \tau), \gamma_i : \Delta \to L,\ i = 1, ..., N,\ \Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторые, почти везде, ограниченные измеримые по t и суммируемые по τ, $\tau \in [0, T]$, для каждого $t > 0$ функции, которые, следуя [2], будем называть функциями сдвига.

Зафиксируем некоторый набор функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i = 1, ..., N\}$. Пусть π_i — оператор ортогонального проектирования из R^{n_i} на подпространство L_i. Положим

$$\xi_i(t) = \xi_i(t, z_i, \gamma_i(t, \cdot)) = \pi e^{tA_i} z_i + \int_0^t \gamma_i(t, \tau)\, d\tau,\ i = 1, ..., N,$$

и рассмотрим для $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, $z_i \in R^{n_i}$ многозначные отображения

$$\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i) = \{\alpha \ge 0 : [\pi_i e^{(t-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)] \cap \alpha[M_i - \xi_i(t] \ne \varnothing\}, \quad (5)$$

где $i = 1, ..., N$.

*Условие 1***.** Для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = 1, ..., N\}$ на множестве Δ справедливы включения

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[\pi_i e^{(t-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)] - \mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i)[M_i - \xi_i(t)]\},\ i = 1, ..., N.$$

Условие 1 эквивалентно предположению, что для $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, $z_i \in R^{n_i}$ $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i) \ne \varnothing$, $i = 1, ..., N$, и введено для удобства изложения. Если это условие выполнено, то по аналогии с работой [2] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции первого типа:

$$\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)\},\ \alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0) =$$

$$= \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)\},$$

где $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, $z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N$. Покажем [4], что многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, замкнутозначны, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, так что верхняя $\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0)$ и нижняя $\alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0)$ разрешающие функции, $i = 1, ..., N$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [4], т.е. $\alpha_i^*(t, \tau, v(\tau), z_i^0)$ и $\alpha_*^i(t, \tau, v(\tau), z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$, со значениями из V. Отметим также, что функции $\inf\limits_{v \in V} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0) = \alpha_i^*(t, \tau, z_i^0)$ и $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0) = \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$.

Обозначим $\delta(t, \tau, z) = \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i=1,...,N} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i)$, $\tau \in [0, t]$, $z = \{z_i, z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N\}$. Функция $\delta(t, \tau, z) = \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i=1,...,N} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i)$ измерима по τ, при каждом t, $t > 0$, $\tau \in [0, t]$ [15].

Сформулируем необходимые факты из выпуклого [23] анализа в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $X \in R^n$ — выпуклый компакт, $\omega(\tau)$ — неотрицательная ограниченная измеримая числовая функция, $f(\tau)$ — измеримая функция, $\tau \in [0, T]$, $T > 0$. Если $0 \in \operatorname{int} X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ и $\int\limits_0^T \omega(\tau) d\tau < 1$, то $\int\limits_0^T f(\tau) d\tau \in \operatorname{int} X$, $\operatorname{int} X$ — внутренность множества X.

Условие 2. Для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = 1, ..., N\}$ на множестве Δ выполнено условие 1 и справедливы включения

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[\pi_i e^{(t-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)] - \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)[M_i - \xi_i(t)]\},$$

где $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0) = \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)$, $(t, \tau) \in \Delta$, $i = 1, ..., N$.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i = 1, ..., N\}$ множество

$$T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge 0 : \inf_{v(\cdot) \in V(\cdot)} \max_{i=1,...,N} \int_0^t \alpha_i^*(t, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \ge 1,$$
$$\max_{i=1,...,N} \int_0^t \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0) d\tau < 1\}. \tag{6}$$

Если при некотором i, $i = 1, ..., N$, для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, $\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0) \equiv +\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (6) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_\alpha(z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (6). В случае, если неравенства в соотношении (6) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot), i = 1, ..., N\}$ выполнено условие 2, множество $T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим сначала случай $\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i^0(T,\cdot)) \notin M_i$ для всех i, $i = 1, ..., N$, и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,...,N} [\int_0^t \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau + \int_t^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0) d\tau],\ t \in [0, T].$$

Функции $\alpha_i^*(T, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, и поэтому суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$. Функции $\alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)$, $i = 1, ..., N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$.

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^T \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \le 1 - \inf_{v(\cdot) \in V(\cdot)} \max_{i=1,...,N} \int_0^T \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{7}$$

Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$, $i = 1, ..., N$,

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{(T-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(T, \tau) \in \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)[M_i - \xi_i(T)]\}. \tag{8}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и верхних разрешающих функций первого типа $\alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображения $U_i^1(\tau, v)$, $i = 1, ..., N$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы и компактнозначны при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_i^1(\tau, v)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_i^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равным

ISSN 1028-0979

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)),\ i = 1, ..., N. \tag{9}$$

Из равенства (7) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - \left[\int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau\right] = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим для $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(U_j, v) - \gamma_j(T, \tau) \in \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)]\}. \tag{11}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображение $U_j^2(\tau, v)$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_j^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователя с номером j на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_j(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \tag{12}$$

а управления остальных преследователей на интервале $[t_*, T]$ выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(T) = \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(T, \cdot)) + \int_0^T [\pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(T, \tau)] d\tau.$$

Тогда, учитывая соотношения (8)–(12), получаем

$$\pi_j z_j(T) \in \xi_j(T) + \int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau = \xi_j(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau -\right.$$

$$\left. - \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau\right] + \int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0) M_j d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) M_j d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau\right] M_j = M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(T) \in M_j$ и, следовательно, $z_j(T) \in M_j^*$.

Если для некоторого номера q, $1 \le q \le N$, $\xi_q(T, z_q^0, \gamma_q(T, \cdot)) \in M_q$, то при $v \in V$, $\tau \in [0, T]$ рассмотрим многозначное отображение

$$U_q^2(\tau, v) = \{u_q \in U_q : \pi_q e^{(T-\tau)A_q} \varphi_q(U_q, v) - \gamma_q(T, \tau) \in \alpha_*^q(T, \tau, z_q^0)[M_q - \xi_q(T)]\}. \tag{13}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^q(T, \tau, z_q^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображение $U_q^2(\tau, v)$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [0, T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_q^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_q^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления q-го преследователя на интервале $[0, T]$ положим равным $u_q(\tau) = u_q^2(\tau, v(\tau))$, а управления остальных преследователей на интервале $[0, T]$ выберем произвольными.

Согласно формуле (1) получим

$$\pi_q z_q(T) = \xi_q(T) + \int_0^T [\pi_q \Omega_{q^\cdot}(T, \tau)\varphi_q(u_q(\tau), v(\tau)) - \gamma_q(T, \tau)]d\tau. \tag{14}$$

В соответствии с выбором управления и по определению момента T имеем $0 \in M_q - \xi_q(T)$,

$$\pi_q \Omega_q(T, \tau)\varphi_q(u_q(\tau), v(\tau)) - \gamma_q(T, \tau) \in \alpha_*^q(T, \tau, z_q^0)[M_q - \xi_q(T)],$$

$$\int_0^T \alpha_*^q(T, \tau, z_q^0)d\tau \le \max_{i=1, \dots, N} \int_0^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)d\tau < 1.$$

Тогда с учетом леммы 1 справедливо включение

$$\int_0^T [\pi_q \Omega_q(T, \tau)\varphi_q(u_q(\tau), v(\tau)) - \gamma_q(T, \tau)]d\tau \in M_q - \xi_q(T).$$

Следовательно, соотношения (13), (14) дают $\pi_q z_q(T) \in \xi_q(T) + M_q - \xi_q(T) =$ $= M_q$ и поэтому получим $z_q(T) \in M_q^*$.

Теорема доказана.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i = 1, \dots, N\}$ множество

$$T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge 0 : \int_0^t \delta(t, \tau, z)d\tau \ge N, \ \int_0^t \max_{i=1, \dots, N} \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)d\tau < \frac{1}{N}\}. \tag{15}$$

Если при $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, $\delta(t, \tau, z^0) \equiv +\infty$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (15) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (15). В случае, когда неравенства в соотношении (15) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Следствие. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0$, $z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \dots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot), i = 1, \dots, N\}$ выполнено условие 2, множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда

$T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)d\tau \ge \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \int_0^T \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)d\tau =$$

$$= \frac{1}{N} \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \int_0^T \sum_{i=1}^N \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)d\tau \ge \frac{1}{N} \int_0^T \delta(T, \tau, z)d\tau \ge 1.$$

С другой стороны, справедлива цепочка неравенств

$$\max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)d\tau \le \sum_{i=1}^N \int_0^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)d\tau =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^N \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)d\tau \le \int_0^T N \max_{i=1,\dots,N} \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)d\tau < 1.$$

Таким образом, $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ и осталось применить теорему 1.

Если выполнено условие 2, то положим для $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, $i = 1, \dots, N$,

$$\beta_i^1(t, \tau, v, z_i) = \begin{cases} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i), \text{ если } \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i) = \max\limits_{j=1,\dots,N} \alpha_j^*(t, \tau, v, z_j), \\ \alpha_*^i(t, \tau, v, z_i), \text{ если } \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i) \ne \max\limits_{j=1,\dots,N} \alpha_j^*(t, \tau, v, z_j). \end{cases}$$

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \dots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i = 1, \dots, N\}$ множество

$$T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge 0 : \max_{i=1,\dots,N} \int_0^t \inf_{v\in V} \beta_i^1(t, \tau, v, z_i^0)d\tau \ge 1, \quad \max_{i=1,\dots,N} \int_0^t \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)d\tau < 1\}. \quad (16)$$

Если при некотором i, $i = 1, \dots, N$, для $\tau \in [0, t]$, $\inf\limits_{v\in V} \beta_i^1(t, \tau, v, z_i^0) \equiv +\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (16) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (16). В случае, когда неравенства в соотношении (16) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \dots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot), i = 1, \dots, N\}$ выполнено условие 2, множество $T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau)\in V$, $\tau\in[0,T]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим сначала случай $\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i^0(T,\cdot))\notin M_i$ для всех i, $i=1,...,N$, и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\max_{i=1,...,N}[\int_0^t \beta_i^1(T,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau+\int_t^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau],\ t\in[0,T].$$

Функции $\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)$, $i=1,...,N$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, и поэтому суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\beta_i^1(T,\tau,v(\tau),z_i^0)$, $i=1,...,N$, измеримы по τ, $\tau\in[0,T]$. Функции $\alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)$, $i=1,...,N$, измеримы по τ, $\tau\in[0,T]$.

По определению T имеем

$$h(0)=1-\max_{i=1,...,N}\int_0^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\max_{i=1,...,N}\int_0^T \beta_i^1(T,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau\le 1-\max_{i=1,...,N}\int_0^T \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что

$$h(t_*)=0. \tag{17}$$

Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t_*]\}$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v\in V$, $\tau\in[0,t_*]$, $i=1,...,N$,

$$U_i^1(\tau,v)=\{u_i\in U_i:\pi_i e^{(T-\tau)A_i}\varphi_i(U_i,v)-\gamma_i(T,\tau)\in\beta_i^1(T,\tau,v(\tau),z_i^0)[M_i-\xi_i(T)]\} \tag{18}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающих функций $\beta_i^1(T,\tau,v(\tau),z_i^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображения $U_i^1(\tau,v)$, $i=1,...,N$, $L\otimes B$-измеримы и компактнозначны при $v\in V$, $\tau\in[0,t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_i^1(\tau,v)$ существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u_i^1(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau\in[0,t_*]$ положим равным

$$u_i(\tau)=u_i^1(\tau,v(\tau)),\ i=1,...,N. \tag{19}$$

Из равенства (17) следует, что существует такой номер j, $1\le j\le N$, что

$$1-[\int_0^{t_*}\beta_j^1(T,\tau,v(\tau),z_j^0)d\tau+\int_{t_*}^T \alpha_*^j(T,\tau,z_j^0)d\tau]=0. \tag{20}$$

Рассмотрим для $v\in V$, $\tau\in[t_*,T]$ многозначное отображение

 ISSN 1028-0979

$$U_j^2(\tau, v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(U_j, v) - \gamma_j(T, \tau) \in \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)]\}. \quad (21)$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] можно заключить, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_j^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователя с номером j на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_j(\tau)(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \quad (22)$$

а управления остальных преследователей на интервале $[t_*, T]$ выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(T) = \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(T, \cdot)) + \int_0^T [\pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(T, \tau)] d\tau.$$

Тогда, учитывая соотношения (18)–(22), получаем

$$\pi_j z_j(T) \in \xi_j(T) + \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0)[M_j - \xi_j(T)]\, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) \times$$

$$\times [M_j - \xi_j(T)]\, d\tau = \xi_j(T)[1 - \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)\, d\tau] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) M_j d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) M_j d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau \right] M_j = M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(T) \in M_j$ и, следовательно, $z_j(T) \in M_j^*$.

Случай, когда для некоторого номера q, $1 \le q \le N$, $\xi_q(T, z_q^0, \gamma_q(T, \cdot)) \in M_q$, можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot, \cdot) = \{\gamma_i(\cdot, \cdot), i = 1, ..., N\}$ выполнено условие 2, множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда $T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) \subset T_\beta(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)\,d\tau \ge \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}\int_0^T \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)\,d\tau =$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^T \sum_{i=1}^N \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)d\tau \ge \frac{1}{N}\int_0^T \delta(T,\tau,z)\,d\tau \ge 1\,.$$

Таким образом, $T_N^{\delta}(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\subset T_{\beta}(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$ и осталось применить теорему 2.

Схема метода для класса стробоскопических стратегий

Из доказательств теорем 1 и 2 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $v_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. Теорема 3 показывает, что для реализации гарантированного времени можно ограничиться контруправлением с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Условие 3. Для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0,\,z_i^0\in R^{n_i},$ $i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau),\quad i=1,\dots,N\}$ на множестве Δ выполнено условие 1 и справедливы включения

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[\pi_i e^{(t-\tau)A_i}\varphi_i(U_i,v)-\gamma_i(t,\tau)]-\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0)[M_i-\xi_i(t)]\},$$

где $\inf\limits_{v\in V}\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)=\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0),\ \ (t,\tau)\in\Delta,\ i=1,\dots,N.$

Если выполнены условия 2 и 3, то положим для $(t,\tau)\in\Delta,\ i=1,\dots,N$,

$$\beta_i^2(t,\tau,z_i)=\begin{cases}\alpha_i^*(t,\tau,z_i),\ \text{если}\ \alpha_i^*(t,\tau,z_i)=\max\limits_{j=1,\dots,N}\alpha_j^*(t,\tau,z_j),\\ \alpha_*^i(t,\tau,z_i),\ \text{если}\ \alpha_i^*(t,\tau,z_i)\ne\max\limits_{j=1,\dots,N}\alpha_j^*(t,\tau,z_j).\end{cases}$$

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0,\,z_i^0\in R^{n_i},\,i=$ $=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau),\ \ i=1,\dots,N\}$ множество

$$\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\max_{i=1,\dots,N}\int_0^t\beta_i^2(t,\tau,z_i^0)d\tau\ge 1,\ \max_{i=1,\dots,N}\int_0^t\alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)\,d\tau<1\}.\qquad(23)$$

Если при некотором $i,\ i=1,\dots,N$, для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, $\beta_i^2(t,\tau,z_i^0)\equiv+\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (23) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (23). В случае, если неравенства в соотношении (23) не выполняются при всех $t>0$, положим $\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 3. Пусть для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0,\,z_i^0\in R^{n_i},$ $i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)=\{\gamma_i(\cdot,\cdot),\ i=1,\dots,N\}$ выполнены условия 2 и 3, множество $\Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент Θ, используя управление вида (4) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, \Theta]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим сначала случай $\xi_i(\Theta, z_i^0, \gamma_i(\Theta, \cdot)) \notin M_i$ для всех i, $i = 1, ..., N$, и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,...,N} [\int_0^t \beta_i^2(\Theta, \tau, z_i^0)\, d\tau + \int_t^\Theta \alpha_*^i(\Theta, \tau, z_i^0)\, d\tau],\ t \in [0, \Theta].$$

По определению Θ имеем

$$h(0) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^\Theta \alpha_*^i(\Theta, \tau, z_i^0)\, d\tau > 0,\ h(\Theta) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^\Theta \beta_i^2(\Theta, \tau, z_i^0)\, d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{24}$$

Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$, $i = 1, ..., N$:

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{(\Theta-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(\Theta, \tau) \in \beta_i^2(\Theta, \tau, z_i^0)[M_i - \xi_i(\Theta)]\}. \tag{25}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающих функций $\beta_i^2(\Theta, \tau, z_i^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображения $U_i^1(\tau, v)$, $i = 1, ..., N$, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы и компактнозначны при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_i^1(\tau, v)$ существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_i^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)),\ i = 1, ..., N. \tag{26}$$

Из равенства (24) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - [\int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^\Theta \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0)\, d\tau] = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим для $v \in V$, $\tau \in [t_*, \Theta]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(\Theta-\tau)A_j} \varphi_j(U_j, v) - \gamma_j(\Theta, \tau) \in \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)]\}. \tag{28}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающей функции $\alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 22] можно заключить, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, \Theta]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [22] в многозначном отображении $U_j^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователя с номером j на интервале $[t_*, \Theta]$ положим равным

$$u_j(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \tag{29}$$

а управления остальных преследователей на интервале $[t_*, \Theta]$ выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(\Theta) = \xi_j(\Theta, z_j^0, \gamma_j(\Theta, \cdot)) + \int_0^{\Theta} [\pi_j e^{(\Theta-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(\Theta, \tau)]\, d\tau.$$

Тогда, учитывая соотношения (25)–(29), получаем

$$\pi_j z_j(\Theta) \in \xi_j(\Theta) + \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)]\, d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)]\, d\tau =$$

$$= \xi_j(\Theta)[1 - \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) d\tau - \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)\, d\tau] + \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) M_j d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0) M_j d\tau = [\int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0)\, d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0)\, d\tau] M_j = M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(\Theta) \in M_j$ и, следовательно, $z_j(\Theta) \in M_j^*$.

Случай когда для некоторого номера q, $1 \le q \le N$, $\xi_q(\Theta, z_q^0, \gamma_q^0(\Theta, \cdot)) \in M_q$, можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = 1, ..., N\}$ множество

$$\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \max_{j=1,...,N} \alpha_j^*(t, \tau, z_j)\, d\tau \ge N, \int_0^t \max_{i=1,...,N} \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0)\, d\tau < \frac{1}{N} \right\}. \tag{30}$$

Если при некотором i, $i = 1, ..., N$, для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, $\max\limits_{j=1,...,N} \alpha_j^*(t, \tau, z_j) \equiv$ $\equiv +\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (30) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (30). В случае когда неравенства в соотношении (30) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Следствие. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, ..., N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot),\ i = 1, ..., N\}$ выполнены усло-

 ISSN 1028-0979

вия 2 и 3, множество $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))\Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, , соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент Θ с использованием управления вида (4) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i=1,\ldots,N} \int_0^T \beta_i^2(T, \tau, z_i^0)\, d\tau \ge \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \int_0^T \beta_i^2(T, \tau, z_i^0)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \beta_i^2(T, \tau, z_i^0)\, d\tau \ge \frac{1}{N} \int_0^T \max_{j=1,\ldots,N} \alpha_j^*(t, \tau, z_j)\, d\tau \ge 1 .$$

Таким образом, $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset \Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ и осталось применить теорему 3.

Сравнение гарантированных времен

Лемма 2. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = \ = 1, \ldots, N\}$ выполнены условия 2 и 3, многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, принимают непустые компактные значения на множестве $\Delta \times V$ и верхние разрешающие функции $\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, ограничены, $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$. Тогда имеет место неравенство

$$\delta(t, \tau, z^0) \ge \max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i^*(t, \tau, z_i^0),\ (t, \tau) \in \Delta . \tag{31}$$

Если к тому же многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i)$, $i = 1, \ldots, N$, принимают непустые выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, т.е. $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0) = [\alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0),\ \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0)]$, то в соотношении (31) имеет место равенство.

Теорема 4. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot),\ i = 1, \ldots, N\}$ выполнены условия 2 и 3.

Тогда имеют место включения

$$T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \supset T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \supset T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) ,$$

$$T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) ,\ T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) .$$

Если же многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i)$, $i = 1, \ldots, N$, принимают непустые выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, то справедливы равенства

$$T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \Theta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) ,\ T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)).$$

Доказательства леммы 2 и теоремы 4 непосредственно следуют из соответствующих определений и теорем.

Заключение

В работе рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы группового сближения применительно к общей схеме метода разрешающих функций. Сформулированы достаточные условия гарантированного результата, когда условие Понтрягина не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии группового сближения и дано сравнение гарантированных времен. Исследована модифицированная схема метода разрешающих функций, обеспечивающая завершение процесса группового сближения в классе котруправлений.

А.О.Чикрій, Й.С. Раппопорт

ГАРАНТОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ГРУПОВОГО ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглянуто проблему гарантованого результату в ігрових задачах групового зближення керованих об'єктів. Запропоновано метод вирішення таких задач, пов'язаний з побудовою деяких скалярних функцій, що якісно характеризують хід зближення групи керованих об'єктів і ефективність прийнятих рішень. Такі функції називаються розв'язувальними. Метод розв'язувальних функцій дозволяє ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень і їх селекторів в обгрунтуваннях ігрових конструкцій і отриманні на їх основі змістовних результатів. У будь-яких формах методу розв'язувальних функцій головним є накопичувальний принцип, який використовується в поточному підсумовуванні розв'язувальних функцій для оцінки якості гри групового зближення аж до досягнення деякого порогового значення. На відміну від основної схеми згаданого методу розглядається випадок, коли класична умова Понтрягіна не має місця. У цій ситуації замість неіснуючих селекторів Понтрягіна розглядаються деякі функції зсуву і з їх допомогою вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції, за допомогою яких формулюються достатні умови завершення гри групового зближення за деякий гарантований час. Наводиться порівняння гарантованих часів для різних схем групового зближення керованих об'єктів.

Ключові слова: стратегія керування, групове зближення, розв`язувальна функція, стробоскопічна стратегія.

A.A. Chikrii, J.S. Rappoport

GUARANTEED RESULT IN GROUP APPROACH GAME PROBLEMS OF CONTROLLED OBJECTS

The problem of a guaranteed result in game problems of group approach of controlled objects is considered. A method for solving such problems is proposed, which is associated with the construction of some scalar functions that qualitatively characterize the progress of the approach of a group of controlled objects and the efficiency of the decisions made. Such functions are called resolving functions. The attractiveness of the method of resolving functions lies in the fact that it makes it possible to use effectively the modern technique of multivalued mappings and their selection in substantiating game constructions and obtaining meaningful results on their basis. In any form of the method of resolving functions, the main principle is the accumulative principle, which is used in the current summation of the resolving functions to assess the quality of the game of the group approach until a certain threshold value is reached. In contrast to the main scheme of the mentioned method, the case is considered when the classical Pontryagin condition does not hold. In this situation, instead of Pontryagin's selection, which do not exist, some shift functions are considered and, with their help, special multivalued mappings are introduced. They generate upper and lower resolving functions with the help of which sufficient conditions for the completion of the game of group approach in a certain guaranteed time are formulated. Comparison of guaranteed times for different schemes of group approach of controlled objects is given.

Keywords: strategies of control, group approach, resolving function, stroboscopic strategy.

1. Chikrii A. A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media. 2013. 424 p.
2. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2016. № 3. С. 65–78. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30
3. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. **12**. 266 p.
4. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. Кибернетика и системный анализ. 2012. **48**, № 5. С. 40–64. DOI https://doi.org/10.1007/s10559-012-9430-y.
5. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*. 1976. № 3. С. 145–146.
6. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. Об одной задаче группового преследования. *Кибернетика.* 1979. № 6. С. 145–146.
7. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями. *ДАН СССР.* 1981. **256**, № 3. С. 530–535.
8. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *ДАН СССР*. 1981. **259**, № 4. С. 785–788.
9. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх. *Techische Hochschul Leipzig*, *Wissenshaftliche Zeitschriff.* 1982. № 1. С. 13–27.
10. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы. *Прикл. математика и механика*. 1997. **61**, № 4. С. 584–594.
11. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2016. № 2. С. 1–10. DOI:10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.70.
12. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. **52**, № 4. С. 90–102. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9860-z.
13. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 1. С. 72–84. DOI:10.1615/JAutomatInfScien.v50.i2.20
14. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями. Кибернетика и системный анализ. 2018. **54**, № 5. С. 109–127. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0080-6.
15. Раппопорт И.С. Стратегии группового сближения в методе разрешающих функций для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов. Кибернетика и системный анализ. 2019. 55, № 1. С. 149–163. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00118-7.
16. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
17. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. 2. 576 с.
18. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд–во МГУ, 1984. 65 с.
19. Субботин А.И., Ченцов А.Г.Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
20. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
21. Пшеничный Б.Н, Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев.: Наук. думка, 1992. 260 с.
22. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
23. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.

Получено 05.07.2021