УДК 517.988

В.В. Семенов, С.В. Денисов

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, алгоритм, сходимость, адаптивность, 2-равномерно выпуклое банахово пространство, равномерно гладкое банахово пространство.

Введение

Многие актуальные задачи исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств [1–5]. Разработка и исследование алгоритмов для вариационных неравенств — активно развивающееся направление прикладного нелинейного анализа [4, 6–33]. С появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network, GAN) устойчивый интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения [7]. Отметим, что часто негладкие задачи оптимизации могут эффективно решаться, если переформулировать их в виде седловых задач и применить алгоритмы решения вариационных неравенств [8].

Наиболее известный и популярный метод решения вариационных неравенств — экстраградиентный алгоритм Корпелевич [9]. Исследованию этого алгоритма и его модификаций посвящено большое количество публикаций [6, 7, 10–23]. Эффективным современным вариантом экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод Немировского [8]. Данный метод можно интерпретировать как вариант экстраградиентного метода с проектированием, понимаемым в смысле дивергенции Брэгмана [24]. Адаптивные варианты проксимального зеркального метода Немировского изучены в [17–23]. В начале 1980-х годов Л.Д. Попов предложил интересную модификацию классического алгоритма Эрроу–Гурвица для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций [25]. В работе [26] исследована модификация метода Попова для решения вариационных неравенств с монотонными операторами. В [27] предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи равновесного программирования,

* Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер госрегистрации 0119U100337) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв’язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», номер госрегистрации 0119U101608).

являющийся адаптацией метода [26] к общим неравенствам Ки Фаня. В работах [28–30] исследован двухэтапный проксимальный зеркальный метод — модификация двухэтапного проксимального алгоритма [27] с использованием дивергенции Брэгмана вместо евклидового расстояния. В последнее время алгоритм Попова для вариационных неравенств хорошо известен в среде специалистов по машинному обучению под названием «Extrapolation from the Past» [8]. Дальнейшее развитие этих идей привело к появлению так называемого «forward-reflected-backward algorithm» [31] и близких методов [32, 33].

Данная работа посвящена изучению нового алгоритма для решения вариационных неравенств в банаховом пространстве. Вариационные неравенства в банаховых пространствах возникают и интенсивно изучаются в математической физике и теории обратных задач [1, 2, 4]. В последнее время наметился прогресс в изучении алгоритмов для задач в банаховых пространствах [4, 13–16]. Это обусловлено широким привлечением результатов и конструкций геометрии банаховых пространств [34–36]. Предлагаемый алгоритм является адаптивным вариантом «forward-reflected-backward algorithm» [31], где используемое правило обновления величины шага не требует знания липшицевой константы оператора. Кроме того, вместо метрической проекции на допустимое множество используется обобщенная проекция Альбера [36]. Привлекательная черта алгоритма — всего одно вычисление на итерационном шаге проекции на допустимое множество. Для вариационных неравенств с монотонными, липшицевыми операторами, действующими в 2-равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве, доказана теорема о слабой сходимости метода.

1. Предварительные сведения

Для формулировки и доказательства результатов [34–38] напомним несколько понятий и фактов из геометрии банаховых пространств.

Всюду E — действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E^* — сопряженное к E пространство, $\langle x^*, x \rangle$ — значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$. Норму в E^* обозначим $\|\cdot\|_*$.

Пусть $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Банахово пространство E называют строго выпуклым, если для всех $x, y \in S_E$ и $x \neq y$ имеем $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. Модуль выпуклости пространства E определяется следующим образом:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_E, \ \|x-y\| = \varepsilon\right\} \quad \forall \varepsilon \in (0, 2].$$

Банахово пространство E называют равномерно выпуклым, если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in (0, 2]$, или 2-равномерно выпуклым, если существует такое $c > 0$, что $\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ для всех $\varepsilon \in (0, 2]$. Очевидно, что 2-равномерно выпуклое пространство является равномерно выпуклым. Известно, что равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.

Банахово пространство E называют гладким, если предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1}$$

существует для всех $x, y \in S_E$, и равномерно гладким, если предел (1) существует равномерно по $x, y \in S_E$. Между выпуклостью и гладкостью банахова пространства E и его сопряженного E^* есть двойственность [34, 35]:

E^* — строго выпуклое пространство $\Rightarrow$ E — гладкое пространство;

E^* — гладкое пространство $\Rightarrow$ E — строго выпуклое пространство;

E — равномерно выпуклое пространство $\Leftrightarrow$ E^* — равномерно гладкое пространство;

E — равномерно гладкое пространство $\Leftrightarrow$ E^* — равномерно выпуклое пространство.

Заметим, что при рефлексивности пространства E две первые импликации можно обратить.

Известно, что гильбертовы пространства и пространства L_p ($1 < p \le 2$) являются 2-равномерно выпуклыми и равномерно гладкими (пространства L_p равномерно гладкие для $p \in (1, \infty)$) [34, 35].

Многозначный оператор $J : E \to 2^{E^*}$, действующий следующим образом:

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \left\langle x^*, x \right\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\},$$

называют нормализованным дуальным отображением. Известно [37], что:

- если пространство E гладкое, то отображение J однозначно;
- если пространство E строго выпукло, то отображение J инъективно и строго монотонно;
- если пространство E рефлексивное, то отображение J сюръективно;
- если пространство E равномерно гладкое, то отображение J равномерно непрерывно на ограниченных подмножествах E.

Пусть E — гладкое банахово пространство. Рассмотрим введенный Я. Альбером [36] функционал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\left\langle Jy, x \right\rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

Из определения ϕ следует полезное тождество:

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) - \phi(z, y) = 2\left\langle Jz - Jy, x - z \right\rangle \quad \forall x, y, z \in E .$$

Если пространство E строго выпукло, то для $x, y \in E$ имеем $\phi(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; x = y$.

Лемма 1 [36]. Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, (x_n), (y_n) — ограниченные последовательности элементов E. Тогда

$$\|x_n - y_n\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|Jx_n - Jy_n\|_* \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x_n, y_n) \to 0 .$$

Лемма 2 [38]. Пусть E — 2-равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство. Тогда для некоторого $\mu \ge 1$ выполняется неравенство

$$\phi(x, y) \ge \frac{1}{\mu}\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in E .$$

Пусть K — непустое замкнутое и выпуклое подмножество рефлексивного, строго выпуклого и гладкого пространства E. Известно [36], что для каждого $x \in E$ существует единственная точка $z \in K$, такая, что

$$\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x) .$$

Эту точку z обозначают $\Pi_K x$, а соответствующий оператор $\Pi_K : E \to K$ называют обобщенной проекцией E на K (обобщенной проекцией Альбера) [36]. Заметим, что если E — гильбертово пространство, то Π_K совпадает с метрической проекцией на множество K.

Лемма 3 [36]. Пусть K — замкнутое и выпуклое подмножество рефлексивного, строго выпуклого и гладкого пространства E, $x \in E$, $z \in K$. Тогда

$$z = \Pi_K x \Leftrightarrow \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \ \forall \ y \in K. \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно следующему [36]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \leq \phi(y, x) \ \forall \ y \in K .$$

Базовые сведения о монотонных операторах и вариационных неравенствах в банаховых пространствах можно найти в [1, 2, 4, 36, 37].

2. Алгоритм

Пусть E — 2-равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C : \ \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C , \qquad (3)$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A : E \to E^*$ монотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;
- множество S не пусто.

Вариационное неравенство (3) можно сформулировать как задачу поиска неподвижной точки [36]:

$$x = \Pi_C J^{-1}(Jx - \lambda Ax) , \qquad (4)$$

где $\lambda > 0$. Формулировка (4) полезна, поскольку содержит очевидную алгоритмическую идею.

Рассмотрим дуальное вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C : \ \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C . \qquad (5)$$

Множество решений (5) обозначим S^d. Заметим, что множество S^d выпуклое и замкнутое [2]. Неравенство (5) иногда называют слабой или дуальной постановкой (3) (или неравенством Минти), а решения (5) — слабыми решениями (3). Для монотонных операторов A всегда имеем $S \subseteq S^d$. В данных условиях $S^d = S$ [2].

Далее предположим, что выполнено такое условие: нормализованное дуальное отображение $J : E \to E^*$ секвенциально слабо непрерывно, т.е. из $x_n \to x$ слабо в E следует $Jx_n \to Jx$ слабо* в E^*.

Теперь рассмотрим новый алгоритм для решения вариационного неравенства (3). Используем простое правило обновления параметров λ_n без информации о константе Липшица оператора A. Предлагаемый алгоритм является модификацией «forward-reflected-backward algorithm», недавно предложенного в [31] для решения операторных включений с суммой максимального монотонного и липшицевого монотонного операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Предположим, что известна константа $\mu \geq 1$ из леммы 2.

Алгоритм 1. Выбираем $x_0 \in E$, $x_1 \in E$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{2\mu}\right)$ и числа λ_0, $\lambda_1 > 0$. Полагаем $n = 1$.

1. Вычислить $x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}))$.
2. Если $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, иначе перейти к шагу 3.
3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*}\right\}, & \text{если } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Положить $n := n+1$ и перейти к шагу 1.

Задаваемая правилом пересчета последовательность (λ_n) невозростающая и ограничена снизу числом $\min\{\lambda_1, \tau L^{-1}\}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Для последовательности (x_n), порожденной алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$-2\left\langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1} \right\rangle \leq$$

$$\leq \phi(y, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) - \phi(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \tag{6}$$

Неравенство (6) дает обоснование правила остановки алгоритма. Действительно, при $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$ из (6) вытекает $\left\langle Ax_n, y - x_n \right\rangle \geq 0$ для всех $y \in C$, т.е. $x_n \in S$.

Перейдем к доказательству сходимости алгоритма 1.

3. Доказательство сходимости

Имеет место следующее.

Лемма 4. Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) имеет место неравенство

$$\phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1}, x_n) \leq$$

$$\leq \phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) -$$

$$- \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(x_{n+1}, x_n),$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Имеем

$$\phi(z, x_{n+1}) \leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\left\langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1} \right\rangle. \tag{7}$$

 ISSN 1028-0979

Воспользуемся монотонностью оператора A. Имеем

$$\left\langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1} \right\rangle = \lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \right\rangle +$$

$$+\lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_{n+1} \right\rangle + \underbrace{\lambda_n \left\langle Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \right\rangle}_{\leq 0} \leq \lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \right\rangle +$$

$$+\lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \right\rangle + \lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \right\rangle . \quad (8)$$

Применив (8) в (7), получим

$$\phi(z, x_{n+1}) \leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \right\rangle +$$

$$+2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \right\rangle + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \right\rangle . \quad (9)$$

Используя правило пересчета λ_n, оценим сверху слагаемое $2\lambda_{n-1} \times \times \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \right\rangle$ в (9). Имеем

$$2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \right\rangle \leq 2\lambda_{n-1} \left\| Ax_n - Ax_{n-1} \right\|_* \left\| x_n - x_{n+1} \right\| \leq$$

$$\leq 2\tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_n - x_{n-1} \right\| \left\| x_{n+1} - x_n \right\| \leq \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_n - x_{n-1} \right\|^2 + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_n - x_{n+1} \right\|^2 \leq$$

$$\leq \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_{n+1}, x_n) .$$

Приходим к неравенству

$$\phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \left\langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1}, x_n) \leq$$

$$\leq \phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) -$$

$$- \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1}, x_n) ,$$

что и требовалось доказать. ■

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть C — непустое выпуклое и замкнутое подмножество 2-равномерно выпуклого и равномерно гладкого пространства E, $A : E \to E^*$ — монотонный и липшицевый оператор, $S \neq \varnothing$. Предположим, что нормализованное дуальное отображение J секвенциально слабо непрерывно. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) слабо сходится к некоторой точке $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z' \in S$. Положим

$$a_n = \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) ,$$

$$b_n = \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1}, x_n) .$$

Неравенство леммы 4 принимает вид $a_{n+1} \leq a_n - b_n$. Поскольку существует $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то $1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 2\tau\mu \in (0, 1)$ при $n \to \infty$.

Покажем, что $a_n \geq 0$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$a_n = \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mu} \left\| x_n - z' \right\|^2 - 2\lambda_{n-1} \left\| Ax_{n-1} - Ax_n \right\|_* \left\| x_n - z' \right\| + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_{n-1} - x_n \right\|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mu} \left\| x_n - z' \right\|^2 - 2\tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_n - x_{n-1} \right\| \left\| x_n - z' \right\| + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\| x_{n-1} - x_n \right\|^2 \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{\mu} - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right) \left\| x_n - z' \right\|^2 .$$

Поскольку существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{\mu} - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} > 0$ для всех $n \geq n_0$, то $a_n \geq 0$ начиная с n_0.

Теперь можем сделать вывод, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \left(\phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \right)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1}, x_n) < +\infty .$$

Отсюда получаем ограниченность последовательности (x_n) и $\lim_{n \to \infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n \to \infty} \left\| x_{n+1} - x_n \right\| = 0$. Поскольку

$$\lim_{n \to \infty} \left(2\lambda_{n-1} \left\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \right\rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \right) = 0 ,$$

то сходятся последовательности $\phi(z', x_n))$ для всех $z' \in S$.

Покажем, что все слабые частичные пределы последовательности (x_n) принадлежат множеству S. Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in E$. Ясно, что $z \in C$. Покажем, что $z \in S$. Имеем

$$\left\langle Jx_{n+1} - Jx_n + \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1} \right\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C .$$

Отсюда, используя монотонность оператора A, выводим оценку

$$\left\langle Ay, y - x_n \right\rangle + \left\langle Ax_n, x_n - x_{n+1} \right\rangle \geq \left\langle Ax_n, y - x_{n+1} \right\rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n} \left\langle Jx_n - Jx_{n+1}, y - x_{n+1} \right\rangle - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left\langle Ax_n - Ax_{n-1}, y - x_{n+1} \right\rangle \quad \forall y \in C .$$

Из $\lim_{n \to \infty} \left\| x_n - x_{n-1} \right\| = 0$ и липшицевости оператора A следует

$$\lim_{n \to \infty} \left\| Ax_n - Ax_{n-1} \right\|_* = 0.$$

Благодаря равномерной непрерывности на ограниченных множествах нормализованного дуального отображения J получаем $\lim_{n \to \infty} \left\| Jx_n - Jx_{n+1} \right\|_* = 0$. Таким образом:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \left\langle Ay, y - x_n \right\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C .$$

 ISSN 1028-0979

С другой стороны, $\langle Ay,\ y-z\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Ay,\ y-x_{n_k}\rangle \geq \underline{\lim}_{n\to\infty}\langle Ay,\ y-x_n\rangle \geq 0$ $\forall y \in C$. Следовательно, $z \in S$.

Покажем, что последовательность (x_n) слабо сходится к z. Рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность (x_{m_k}), такая, что $x_{m_k} \to z'$ слабо и $z \neq z'$. Ясно, что $z' \in S$. Имеем

$$2\langle Jx_n, z-z'\rangle = \phi(z', x_n) - \phi(z, x_n) + \|z\|^2 - \|z'\|^2 .$$

Отсюда выводим существование предела $\lim_{n\to\infty}\langle Jx_n, z-z'\rangle$. Благодаря секвенциальной слабой непрерывности нормализованного дуального отображения J получаем

$$\langle Jz, z-z'\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Jx_{n_k}, z-z'\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Jx_{m_k}, z-z'\rangle = \langle Jz', z-z'\rangle ,$$

т.е. $\langle Jz - Jz', z-z'\rangle = 0$. Отсюда следует $z = z'$. ■

Аналогично обосновывается слабая сходимость варианта алгоритма с постоянным параметром $\lambda > 0$.

Алгоритм 2. Выбираем $x_0 \in E$, $x_1 \in E$, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2\mu L}\right)$. Полагаем $n = 1$.

1. Вычислить $x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - 2\lambda Ax_n + \lambda Ax_{n-1})$.
2. Если $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, иначе положить $n := n+1$ и перейти к шагу 1.

Частным случаем алгоритма 2 является популярный среди специалистов в области машинного обучения алгоритм оптимистического градиентного спуска (optimistic gradient descent ascent, OGDA) [8].

Теорема 2. Пусть C — непустое выпуклое и замкнутое подмножество 2-равномерно выпуклого и равномерно гладкого пространства E, оператор $A : E \to E^*$ — монотонный и липшицевый с константой $L > 0$. Пусть $S \neq \varnothing$ и нормализованное дуальное отображение J секвенциально слабо непрерывно. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) слабо сходится к точке $z \in S$.

Заключение

В данной работе предложен и изучен новый алгоритм решения вариационных неравенств в банаховом пространстве. Предлагаемый алгоритм является адаптивным вариантом «forward-reflected-backward algorithm» [31], где используемое правило обновления величины шага не требует знания липшицевой константы оператора. Кроме того, вместо метрической проекции на допустимое множество используется обобщенная проекция Альбера [36]. Преимуществом использования алгоритма является всего одно вычисление на итерационном шаге проекции на допустимое множество. Для вариационных неравенств с монотонными, липшицевыми операторами, действующими в 2-равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве, доказана теорема о слабой сходимости метода.

Опираясь на [39], аналогичные результаты, скорее всего, можно получить и для задач с псевдомонотонными, липшицевыми и секвенциально слабо непрерывными операторами, действующими в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве.

В.В. Семенов, С.В. Денисов

АДАПТИВНИЙ МЕТОД ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Багато актуальних задач дослідження операцій та математичної фізики може бути записано у формі варіаційних нерівностей. Розробка та дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей є напрямком прикладного нелінійного аналізу, що активно розвивається. Відзначимо, що часто негладкі задачі оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо переформулювати їх у вигляді сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей. Останнім часом намітився прогрес у вивченні алгоритмів для задач в банахових просторах. Це обумовлено широким залученням результатів та конструкцій геометрії банахових просторів. В роботі запропоновано та досліджено новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в банаховому просторі. Пропонований алгоритм є адаптивним варіантом «forward-reflected-backward algorithm», де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевої константи оператора. Крім того, замість метричної проекції на допустиму множину використовується узагальнена проекція Альбера. Перевагою використання алгоритму є лише одне обчислення на ітераційному кроці проекції на допустиму множину. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведено теорему про слабку збіжність методу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, монотонний оператор, алгоритм, збіжність, адаптивність, 2-рівномірно опуклий банаховий простір, рівномірно гладкий банаховий простір.

V.V. Semenov, S.V. Denisov

ADAPTIVE OPERATOR EXTRAPOLATION METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN BANACH SPACES

Many problems of operations research and mathematical physics can be formulated in the form of variational inequalities. The development and research of algorithms for solving variational inequalities is an actively developing area of applied nonlinear analysis. Note that often nonsmooth optimization problems can be effectively solved if they are reformulated in the form of saddle point problems and algorithms for solving variational inequalities are applied. Recently, there has been progress in the study of algorithms for problems in Banach spaces. This is due to the wide involvement of the results and constructions of the geometry of Banach spaces. A new algorithm for solving variational inequalities in a Banach space is proposed and studied. In addition, the Alber generalized projection is used instead of the metric projection onto the feasible set. An attractive feature of the algorithm is only one computation at the iterative step of the projection onto the feasible set. For variational inequalities with monotone Lipschitz operators acting in a 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach space, a theorem on the weak convergence of the method is proved.

Keywords: variational inequality, monotone operator, algorithm, convergence, adaptability, 2-uniformly convex Banach space, uniformly smooth Banach space.

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. : Мир, 1971. 371 с.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М. : Мир, 1983. 256 с.
3. Nagurney A. Network economics: a variational inequality approach. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
4. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear Ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
5. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age-structured contamination sources in ground water. In: R. Boucekkline, N. Hritonenko, and Y. Yatsenko (eds.). *Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography, and the Environment.* 2013. P. 277–292.
6. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. V. II. New York : Springer, 2003. 666 p.
7. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. G. Gidel, H. Berard, G. Vignoud, P. Vincent, S. Lacoste-Julien. Published as a conference paper at ICLR 2019. *arXiv preprint arXiv:1802.10551*. 2018. P. 1–38.
8. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization.* 2004. **15**. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629.
9. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. **12**, N 4. P. 747–756.
10. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. **148**. P. 318–335. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.
11. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
12. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2000. **38.** P. 431–446. https://doi.org/10.1137/S0363012998338806.
13. Shehu Y. Convergence results of forward-backward algorithms for sum of monotone operators in Banach spaces. *Results in Math*. 2019. **74**. https://doi.org/10.1007/s00025-019-1061-4.
14. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math. Sci*. 2020. **40.** P. 1045–1063. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0412-2.
15. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics*. 2021. **6**, N 5. P. 4873–4900. https://doi.org/10.3934/math.2021286.
16. Cholamjiak P., Shehu Y. Inertial forward-backward splitting method in Banach spaces with application to compressed sensing. *Appl. Math*. 2019. **64.** P. 409–435. https://doi.org/10.21136/AM.2019.0323-18.
17. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47**, N 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
18. Bach F., Levy K.Y. A universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise. *arXiv preprint arXiv*:1902.01637. 2019. P. 1–33.
19. Antonakopoulos K., Belmega V., Mertikopoulos P. An adaptive mirror-prox method for variational inequalities with singular operators. *In Advances in Neural Information Processing Systems 32 (NeurIPS)*. 2019. P. 8455–8465.
20. Stonyakin F.S., Vorontsova E.A., Alkousa M.S. New version of mirror prox for variational inequalities with adaptation to inexactness. In M. Jacimovic, M. Khachay, V. Malkova, M. Posypkin (eds.). *Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science*. Cham : Springer, 2020. **1145.** P. 427–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38603-031.
21. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55,** N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.

22. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51,** N 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
23. Vedel Y.I., Golubeva E.N., Semenov V.V., Chabak L.M. Adaptive extraproximal algorithm for the equilibrium problem in the hadamard spaces. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. **52**, N 8. P. 46–58. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i8.40.
24. Bregman L.M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1967. **7**, N 3. P. 200–217. https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90040-7.
25. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. **28**, N 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.
26. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**, N 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.
27. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In B. Goldengorin (ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications*. Cham :Springer. 2016. **115**. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
28. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-euclidean proximal method for equilibrium problems. In O. Chertov, T. Mylovanov, Y. Kondratenko, J. Kacprzyk, V. Kreinovich, V. Stefanuk (eds.). Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. *ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham : Springer, 2019. **836.** P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.
29. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with Bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**, N 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.
30. Gibali A., Thong D.V. A new low-cost double projection method for solving variational inequalities. *Optim. Eng*. 2020. **21.** P. 1613–1634. https://doi.org/10.1007/s11081-020-09490-2.
31. Malitsky Y., Tam M.K. A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization*. 2020. **30,** N 2. P. 1451–1472. https: //doi.org/10.1137/18M1207260.
32. Csetnek E.R., Malitsky Y., Tam M.K. Shadow Douglas-Rachford splitting for monotone inclusions. *Appl Math Optim*. 2019. **80.** P. 665–678. https://doi.org/10.1007/s00245-019-09597-8.
33. Cevher V., Vu B.C. A reflected forward-backward splitting method for monotone inclusions involving lipschitzian operators. *Set-Valued and Variational Analysis*. 2021. **29**. P 163–174. https://doi.org/10.1007/s11228-020-00542-4.
34. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев : Вища школа, 1980. 215 с.
35. Beauzamy B. Introduction to Banach spaces and their geometry. Amsterdam : North-Holland, 1985. 307 p.
36. Alber Y.I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. *In Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type.* New York : Dekker, 1996. **178**. P. 15–50.
37. Vainberg M.M. Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations. New York : Wiley, 1974. 356 p.
38. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. *Fixed Point Theory and Appl.* 2014. **95**. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95.
39. Bot R.I., Csetnek E.R., Vuong P.T. The forward-backward-forward method from continuous and discrete perspective for pseudo-monotone variational inequalities in Hilbert spaces. European Journal of Operational Research. 2020. **287,** N 1. P. 49–60. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.04.035.

Получено 25.08.2021