УДК 519.21

П.С. Кнопов, Т.В. Пепеляева, С.П. Шпига

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ДРОБНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ПРОЦЕССОМ*

Ключевые слова: управление, стохастические уравнения, случайный процесс, винеровский процесс, оптимальность, измеримость, коэффициент диффузии.

Введение

В последние годы в теории стохастических дифференциальных уравнений возникло новое направление исследований, а именно стохастические дифференциальные с дробным винеровским процессом. Такой класс процессов позволяет достаточно адекватно описывать многие реальные явления стохастической природы в финансовой математике, гидрологии, биологии и многих других областях. Эти явления, как правило, описываются не стохастическими системами, удовлетворяющими условиям сильного перемешивания или слабой зависимости, а системами с сильной зависимостью, и эта сильная зависимость регулируется так называемым параметром Харста, который является характеристикой этой зависимости. Достаточно полные и фундаментальные результаты в этой области получены в работах [1–5] и ряде других. В настоящей работе исследуются задачи существования оптимального управления для стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом. Ранее такая задача для уравнений без диффузии рассматривалась в работах [6–10]. Относительно существования оптимального управления возникают те же трудности, что и при исследовании задачи оптимального управления для стохастических уравнений с обычным винеровским процессом. Во многих реальных задачах класс допустимых управлений достаточно широк, и для оптимальных управлений могут не выполняться условия существования сильных решений для рассматриваемых уравнений. Фундаментальные результаты в области теории оптимального управления для стохастических уравнений с винеровским процессом получены Н.В. Крыловым [11], который фактически построил теорию оптимального управления для диффузионных процессов, в основе которой лежат полученные им результаты в области нелинейных параболических уравнений. В данной статье рассматривается задача существования оптимального управления для стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом, в котором присутствует коэффициент диффузии, что дает более точные результаты моделирования. Доказана

*Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда исследований Украины. Грант № 2020.02/0121 «Аналітичні методи та машинне навчання в теорії керування і прийнятті рішень за умов конфлікту та невизначеності».

теорема существования оптимального управления процессом, которому удовлетворяет соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение. Основной результат получен с использованием теоремы Гирсанова для таких процессов и теоремы существования слабого решения для стохастических уравнений с дробным винеровским процессом [3–5].

Описание модели

Пусть (Ω, G, P) — вероятностное пространство, (G_t), $t \in [0,1]$, — семейство σ-подалгебр Φ, причем $G_s \subset G_t$, если $s \le t$.

Обозначим $L^2(\mathbb{R})$ пространство G_t-измеримых процессов $\varphi = \{\varphi_t, t \in [0,1]\}$ со значениями в $\mathbb{R}$, таких, что

$$\int_0^1 E\left|\varphi_t(\omega)\right|^2 dt < \infty.$$

Также пусть $L(\mathbb{R})$ — пространство G_t-измеримых процессов $\varphi = \{\varphi_t, t \in [0,1]\}$ со значениями в $\mathbb{R}$, для которых выполняется

$$P\left\{\int_0^1 \left|\varphi_t(\omega)\right|^2 dt < \infty\right\} = 1.$$

Для функций из классов L^2 и L можно определить стохастический интеграл [2].

$$I(\varphi) = \int_0^1 \varphi_t dW_t.$$

Пусть B_t^H — дробный винеровский процесс с параметром Харста $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, т.е. B_t^H — непрерывный гауссовский процесс, такой, что $B_0^H = 0$, $EB_t^H = 0$, $t \ge 0$, и его ковариационная функция задается следующим образом:

$$E(B_t^H,\ B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),\ s \ge 0, t \ge 0.$$

Заметим, что при $H = \frac{1}{2}$ случайный процесс B_t^H — обычное броуновское движение.

Пусть $(C, \Re_t)$ — измеримое пространство непрерывных на $[0,1]$ функций с потоком σ-алгебр $\Re_t = \sigma\{f(s), s \le t\}$, $t \in [0,1]$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(x, \xi, u)\,dx + \int_0^t b(x)\,dB_x^H,\ \ t \in [0,1], \tag{1}$$

где a — $\Re_t$-измеримый функционал, $u: [0,1] \to \tilde{U}$ — управление, которое не зависит от будущего, b — непрерывная ограниченная неотрицательная функция, $(\tilde{U}, \mathbb{R})$ — метрический компакт, а интеграл по дробному винеровскому процессу B_x^H определен в [1–5].

ISSN 1028-0979

Пусть U — класс всех управлений, для которых существует слабое решение уравнения (1), A — σ-алгебра открытых подмножеств из $[0, 1]$, A_U — σ-алгебра борелевских подмножеств из $\tilde{U}$.

В дальнейшем понадобятся следующие условия на функционал $a(t, \xi, u(t, \xi))$ и функцию $b(t)$:

1) $a(t, \xi, u)$ — $A \times \Re \times A_{\tilde{U}}$-измеримая функция;

2) $\forall t \in [0, 1]$ функция $a(t, \xi, u)$ — $\Re \times A_U$-измеримая;

3) $\forall t \in [0, 1]$, $x \in C$ функция $a(t, \xi, u)$ непрерывна на $\tilde{U}$;

4) $\forall t \in [0, 1]$, $x \in C$ множество $a(t, \xi, U) = \{a(t, \xi, u), u \in \tilde{U}\}$ выпукло и замкнуто;

5) $\exists\, L > 0$ такое, что

$$\left| a(t, x, u) \right|^2 \le L(1 + \left| x \right|^2);$$

6) $\exists\, M > 0$ такое, что

$$\left| K^{-1} \left(\int_0^t a(s, x, u)\, ds \right)(t) \right|^2 \le M(1 + \left| x(t) \right|^2);$$

7) коэффициенты α и $g = \dfrac{1}{b}$ удовлетворяют условию

$$E_\lambda = E \exp\left\{ \lambda \int_0^T \left(s^{-\alpha} \left| h_u(s) \right| + \alpha s \int_0^s \frac{\left| s^{-\alpha} h_u(s) - r^{-\alpha} h_u(r) \right|}{(s-r)^{\alpha+1}} dr \right)^2 ds \right\} < \infty$$

для любого λ, где $h_u(s) = g(s) a\left(s,\, X_0 + \int_0^s b(t)\, dB_t^H, u_s \right)$.

Вопросы существования слабого решения уравнения (1) исследованы в работе [3], где был получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 7). Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Определим стоимость управления таким образом:

$$F(u) = E \int_0^1 f(t, \xi^u(t), u(t, \xi^u(t)))\, dt,$$

где $f(t, \xi, u)$ — непрерывная неотрицательная функция, $(t, \xi, u) \in [0, 1] \times C \times \tilde{U}$, $\xi^u(t)$ — слабое решение уравнения (1), которое соответствует управлению $u = u(t, \xi^u(t))$. Задача оптимизации управления решением уравнения (1) состоит в том, чтобы минимизировать стоимость управления F (т.е. найти управление u^* в классе допустимых управлений, которое минимизировало бы стоимость управления F).

Обозначим $Z = \inf\limits_{u \in U} F(u)$ и величину Z назовем оптимальной стоимостью управления в классе U.

Основные результаты

Цель статьи — нахождение условий существования оптимального управления решением уравнения (1).

Применим к дробному винеровскому процессу регуляризацию. Согласно теореме 5.2 [5] B_t^H допускает интегральное представление

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s)\, dW_s,$$

где W_s — стандартный винеровский процесс, а ядро $K_H(t, s)$ имеет вид

$$K_H(t, s) = c_H \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-H} \int_0^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right],$$

где $c_H = \left(\dfrac{2H\Gamma(3/2 - H)}{\Gamma(H + 1/2)\Gamma(2 - 2H)} \right)^{1/2}$, Γ — гамма-функция.

Ядро K_H определяет оператор K_H в $L_2([0, 1])$ следующим образом:

$$(K_H g)(t) = \int_0^t K_H(t, s)\, g(s)\, ds.$$

Обратный оператор K_H^{-1} определяется как

$$(K_H^{-1} g)(t) = t^{H-\frac{1}{2}} D_{0+}^{H-\frac{1}{2}} \left(s^{\frac{1}{2}-H} g'(s) \right)(t), \quad H > \frac{1}{2},$$

где

$$D_{0+}^{H-\frac{1}{2}} h(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)} \left(\frac{h(t)}{H^{H-\frac{1}{2}}} + \left(H - \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{h(t) - h(s)}{(t-s)^{H+\frac{1}{2}}}\, ds \right).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(x, \xi, u)\, dx + B_t^H, \quad t \in [0, 1], \tag{2}$$

где a — $\Re_t$-измеримый функционал, $u : [0, 1] \to \tilde{U}$ — управление, которое не зависит от будущего, $(\tilde{U}, \mathbb{R})$ — метрический компакт.

Пусть U — класс всех тех управлений, для которых существует слабое решение уравнения (1), A — σ-алгебра открытых подмножеств из $[0, 1]$, A_U — σ-алгебра борелевских подмножеств из $\tilde{U}$.

 ISSN 1028-0979

Пусть функционал $a(t, \xi, \ u(t, \xi))$ удовлетворяет условиям 1)–6). Тогда стоимость управления задается следующим образом:

$$F(u) = E\int_0^1 f_1(t, \xi^u(t), u(t, \xi^u(t)))\,dt,$$

где $f_1(t, \xi, u)$ — непрерывная неотрицательная функция $(t, \xi, u) \in [0, 1] \times C \times \tilde{U}$, $\xi^u(t)$ — решение уравнения (2), которое соответствует управлению $u = u(t, \xi^u(t))$.

Далее понадобится теорема Гирсанова преобразования мер для дробного винеровского процесса [5], которая формулируется следующим образом.

Теорема 2 [5]**.** Пусть $\{\eta_t, t \in [0, 1]\}$ — измеримый (адаптированный) процесс на $(C, \Re, \mu)$ и

1) $\int_0^t \eta_s ds \in I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2([0, 1]))$ почти наверно, где $I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2([0,1]))$ является образом пространства $L^2([0, 1])$, порожденного оператором $I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}$, и определяется следующим образом:

$$I_{0+}^{H+\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(0+)}\int_0^t (t-s)^{H+\frac{1}{2}} f(s)\,ds;$$

2) $E\zeta = 1$, где

$$\zeta = \exp\left\{\int_0^1 \left(K_H^{-1}\int_0^s \eta_r dr\right)(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(K_H^{-1}\int_0^s \eta_r dr\right)^2 (s)\,ds\right\}.$$

Тогда случайный процесс $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \eta_s ds$ является дробным винеровским процессом в пространстве $(C, \Re, \mu)$.

Положим $a_u(t, x) = a(t, x, u(t, x))$, $t \in [0, 1]$, $x \in C$, $u \in \tilde{U}$. Зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P_0)$ с винеровским процессом $W = (W_t, \Im, P_0)$.

Пусть множество D определяется следующим образом:

$$D = \exp\{\zeta(a_u), u \in \tilde{U}\},$$

где

$$\zeta(a_u) = \int_0^1 \left(K_H^{-1}\int_0^1 a_u(s, W)\,ds\right)(t)\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(K_H^{-1}\int_0^1 a_u(s, W)\,ds\right)^2 (t)\,dt.$$

С помощью теоремы 2 [5] в работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются приведенные выше условия 1)–6) на функционал $a(t, x, u)$. Тогда для процесса (2) существует управление $u^* \in U$, такое, что

$$F(u^*) = \inf_{u \in U} F(u).$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \tilde{a}_u(x, \xi)\, ds + B_t^H, \quad t \in [0, 1], \tag{3}$$

где $\tilde{a}_u(x, \xi) = \dfrac{a(x, \xi, u)}{b(s)}$, и множество D_1, которое определяется следующим образом:

$$D_1 = \exp\{\zeta(\tilde{a}_u),\, u \in \tilde{U}\},$$

где

$$\zeta(\tilde{a}_u) = \int_0^1 \left(K_H^{-1} \int_0^1 \tilde{a}_u(s, W)\, ds \right)(t)\, dW_t - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(K_H^{-1} \int_0^1 \tilde{a}_u(s, W)\, ds \right)^2 (t)\, dt.$$

Так же, как и в теореме 3, используя теорему 2, можно доказать, что множество плотностей D_1 является слабым компактом в пространстве L_1, поскольку D_1 равномерно интегрированное и слабо замкнутое множество в L_1.

Лемма 1. Пусть выполнены приведенные выше условия 1)–6) на функционал $\tilde{a}_u(t, x)$. Тогда существует константа $\gamma^* > 1$, такая, что

$$\sup_{u \in U} E_0 \exp\{\gamma * \zeta(D_1)\} < \infty.$$

Лемма 2. Пусть выполнены приведенные выше условия 1)–6) на функционал $\tilde{a}_u(t, x)$. Тогда множество D_1 замкнуто в L_1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполняются приведенные выше условия 1)–7) на функционалы $a(t, x, u)$ и $b(t)$. Тогда существует управление $u^* \in U$, такое, что

$$F(u^*) = \inf_{u \in U} F(u).$$

Доказательство. При выполненных условиях 1)–7) на функционалы $a(t, x, u)$ и $b(t)$ выполняются условия 1)–6) на функционал $\tilde{a}_u(t, x)$. Из лемм 1 и 2 имеем, что множество D слабо компактно в пространстве L_1. Функционал $F(u)$ является непрерывным. Тогда существует управление $u^* \in U$, такое, что $F(u^*) = \inf_{u \in U} F(u)$, так как непрерывная функция достигает своего минимума на компакте.

Заключение

Приведенные теоремы дают возможность моделирования стохастических дифференциальных уравнений с дробным винеровским процессом и построения оптимальных торговых стратегий на финансовых рынках. Результаты, полученные в настоящей статье, могут также использоваться в тех областях человеческой деятельности, где возникает проблема управления стохастическими системами, например в экономике, гидрологии, телекоммуникационных сетях и др.

П.С. Кнопов, Т.В. Пепеляєва, С.П. Шпига

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНИМ РІВНЯННЯМ З ДРОБОВИМ ВІНЕРОВСЬКИМ ПРОЦЕСОМ

В теорії стохастичних диференціальних рівнянь в останні роки виник новий напрям досліджень, а саме стохастичні диференціальні з дробовим вінеровським процесом. Такий клас процесів дозволяє досить адекватно описувати багато реальних явищ стохастичної природи в фінансовій математиці, гідрології, біології та багатьох інших областях. Ці явища загалом описуються не стохастичними системами, що задовольняють умовам сильного перемішування або слабкої залежності, а системами із сильною залежністю, і ця сильна залежність регулюється так званим параметром Харста, який є характеристикою цієї залежності. У даній роботі досліджуються задачі існування оптимального керування для стохастичного диференціального рівняння з дробовим вінеровським процесом. Щодо існування оптимального керування виникають ті ж труднощі, що і при дослідженні задачі існування оптимального керування для стохастичних рівнянь зі звичайним вінеровським процесом. У багатьох реальних задачах клас допустимих керувань досить широкий, і для оптимальних керувань можуть не виконуватися умови існування сильних розв'язків для розглянутих рівнянь. У статті розглядається задача існування оптимального керування для стохастичного диференціального рівняння з дробовим вінеровським процесом, в якому присутній коефіцієнт дифузії, що дає більш точні результати моделювання. Доведено теорему існування оптимального керування процесом, якому задовольняє відповідне стохастичне диференціальне рівняння. Основний результат отримано з використанням теореми Гірсанова для таких процесів і теореми існування слабкого рішення для стохастичних рівнянь з дробовим вінеровським процесом.

Ключові слова: керування, стохастичні рівняння, випадковий процес, вінеровський процес, оптимальність, вимірність, коефіцієнт дифузії.

P.S. Knopov, T.V. Pepelyaeva, S.P. Shpiga

ON OPTIMAL CONTROL OF A STOCHASTIC EQUATION WITH A FRACTIONAL WIENER PROCESS

In recent years, a new direction of research has emerged in the theory of stochastic differential equations, namely, stochastic differential equations with a fractional Wiener process. This class of processes makes it possible to describe adequately many real phenomena of a stochastic nature in financial mathematics, hydrology, biology, and many other areas. These phenomena are not always described by stochastic systems satisfying the conditions of strong mixing, or weak dependence, but are described by systems with a strong dependence, and this strong dependence is regulated by the so-called Hurst parameter, which is a characteristic of this dependence. In this article, we consider the problem of the existence of an optimal control for a stochastic differential equation with a fractional Wiener process, in which the diffusion coefficient is present, which gives more accurate simulation results. An existence theorem is proved for an optimal control of a process that satisfies the corresponding stochastic differential equation. The main result was obtained using the Girsanov theorem for such processes and the existence theorem for a weak solution for stochastic equations with a fractional Wiener process.

Keywords: control, stochastic equations, random process, Wiener process, optimality, measurability, diffusion coefficient.

1. Mishura Y., Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of mild solution to stochastic heat equation with white and fractional noises. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. 2018. **98**. С. 142–162.
2. Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of mild solution to fractional stochastic heat equation. *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 2018. P. 1–23. DOI: 10.15559/18-VMSTA122.
3. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Berlin : Springer. 2008. 393 p.
4. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions Bernoulli. 1999. **5**(4). P. 571–587.
5. Nualart D., Ouknine Y. Stochastic differential equations with additive fractional noise and locally unbounded drift. In Giné E., Houdré C., Nualart D. (eds.) Stochastic Inequalities and Applications. Progress in Probability. Basel : Birkhäuser, 2003. **56**. P. 353–365. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8069-5_20
6. Пепеляева Т.В. Об одной задаче управления стохастической системой на финансовом рынке. *Теория оптимальных решений.* 2004. № 3. С. 133–141.
7. Дериева Е.Н., Пепеляева Т.В. Об одной задаче управления случайными процессами. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 1. С. 116–121.
8. Кнопов П.С., Дериева Е.Н. О задаче управления решением стохастического дифференциального уравнения с аддитивным дробным винеровским процессом. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2010. № 3. С. 78–85.
9. Дериева Е.Н., Герасименко С.О. О задаче управления решением стохастического дифференциального уравнения на плоскости с аддитивным дробным броуновским полем. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. № 6. С. 76–84.
10. Кнопов П.С., Штатланд Е.С. Про керування розв'язком стохастичного диференціального рівняння в гільбертовому просторі. *Теорія ймовірностей та математична статистика.* 2001. Вип. 65. С. 53–59.
11. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М. : Наука, 1977. 400 с.

Получено 20.09.2021