

УДК 681.518.5

В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук, М.М. Сальніков

МЕТОД ТА АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОКОТОЧНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ ТА ВЗАЄМНОЇ ПРИВ'ЯЗКИ СИСТЕМ КООРДИНАТ КЛАСТЕРА АСТРОДАТЧИКІВ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА НЕТОЧНИМИ ВИМІРЮВАННЯМИ

Ключові слова: кластер астродатчиків, орієнтація по зіркам, високоточна орієнтація, інтервальне оцінювання, обмежена невизначеність.

Keywords: cluster of star trackers, orientation by stars, high-precision orientation, interval estimation, limited uncertainty.

Вступ

У наш час астродатчик (АД) є основним вимірювальним пристроєм для визначення орієнтації космічних, а іноді й літальних апаратів [1, 2]. Визначення орієнтації зводиться до розв'язування задачі Вахби [3], яка, однак, не набула широкого застосування. Замість неї використовувалися інші підходи та методи, що зводяться до знаходження оптимального кватерніона орієнтації. У перших роботах розглядалася задача визначення орієнтації при використанні одного астродатчика. У такому випадку через порівняно невелике поле зору типових АД (близько 10–25 °) параметри орієнтації оцінюються з досить великою похибкою. Пояснюється це тим, що близьке взаємне розташування зірок призводить до поганої обумовленості матриць, які доводиться обертати при обчисленні параметрів орієнтації. Для усунення цього недоліку було запропоновано [4–6] одночасно використовувати не один, а два і більше астродатчиків, що встановлюються на борту космічного апарата (КА). При цьому кут між напрямками на зірки з різних датчиків може бути значно більшим за вищезазначені величини. У такому випадку розрахунок проводиться по всіх зірках, що потрапили в поле зору всіх астродатчиків. Для досягнення більш точного оцінювання з використанням групи АД необхідні відповідні методи і алгоритми. Є низка публікацій, присвячених цьому. Так, у [7] показано, що навіть при використанні двох астродатчиків можна істотно зменшити норму вектора похибки в порівнянні з одним астродатчиком. При цьому в роботі [7] для обчислення кватерніона орієнтації застосовувався рекурентний метод найменших квадратів з регуляризацією. У статті [8] описано комбінаторний метод інтервального оцінювання кватерніона орієнтації КА з довільним числом астродатчиків, тобто з кластером астродатчиків. На відміну від [7], для обчислення кватерніона орієнтації не використовувалася процедура лінеаризації нелінійних рівнянь, до яких зводилася задача знаходження кватерніона орієнтації, а для достатньо великої кількості зірок різних астродатчиків розв'язувалася лінійна задача інтервального оцінювання

© В.Ф. ГУБАРЕВ, С.В. МЕЛЬНИЧУК, М.М. САЛЬНІКОВ, 2022

компонентів ортогональної матриці орієнтації методом, описаним у [9], тобто ця задача споріднена задачі Вахби. На останньому етапі розглянутого підходу обчислювався нормований кватерніон, при якому відповідна йому матриця орієнтації задовольняє отриманим інтервальним оцінкам. При розв'язанні цієї задачі вважалося, що взаємна орієнтація внутрішніх систем координат (ВСК) усіх астродатчиків відома. Однак у реальній ситуації наявна попередня оцінка взаємної прив'язки астродатчиків може мати похибку, яка може перевищувати похибки вимірювання кутових координат зірок. Тому в роботі [10] запропоновано метод розв'язування задачі про уточнення взаємної прив'язки внутрішніх систем координат пари датчиків як самостійної задачі, після розв'язання якої вже можна вирішувати основну задачу підвищення точності орієнтації КА згідно з алгоритмами, описаними в [7, 8]. Хоча чисельним моделюванням підтверджується реалізованість такого підходу, необхідні інші способи обчислення орієнтації КА з урахуванням похибки прив'язки астродатчиків.

У цій роботі запропоновано інший підхід до розв'язання задачі високоточного визначення рівноточної орієнтації КА на основі кластера астродатчиків з урахуванням наявності похибок як при вимірюваннях, так і в параметрах взаємної прив'язки астродатчиків. Як і в роботі [8], в основі запропонованих методу та алгоритмів розв'язання такої комплексної задачі лежать інтервальні оцінки ортогональних матриць орієнтації.

1. Початкові дані і постановка задачі

Нехай кластер містить M астродатчиків із n_m зірками в полі зору m -го датчика ($m = \overline{1, M}$), так що загальна кількість зірок у полі зору значно більша за M . Зв'яжемо зі світлочутливими матрицями астродатчиків праві ортогональні внутрішні системи координат (O_m, x_m, y_m, z_m) , які позначимо як ВСК $_m$, що відповідають m -му астродатчику АД $_m$. Напрямки на зірки в інерціальній системі координат (ІСК), позначеній (O_0, x_0, y_0, z_0) , що потрапили в поле зору m -го датчика, подамо у вигляді одиничних векторів

$$r^{m_i} = (r_x^{m_i}, r_y^{m_i}, r_z^{m_i})^T, \quad i = \overline{1, n_m},$$

де T позначає транспонування. Із цими зірками у ВСК $_m$ ототожнюються відповідні їм напрямки у вигляді одиничних векторів

$$b^{m_i} = (b_x^{m_i}, b_y^{m_i}, b_z^{m_i})^T, \quad i = \overline{1, n_m}.$$

Вважаємо, що вектори r^{m_i} відомі з високою точністю, а вектори b^{m_i} задаються оцінками

$$\tilde{b}^{m_i} = b^{m_i} + \xi^{m_i}, \quad i = \overline{1, n_m}, \quad (1)$$

отриманими при вимірюванні відповідними АД $_m$. Тут оцінку $\tilde{b}^{m_i} = (\tilde{b}_x^{m_i}, \tilde{b}_y^{m_i}, \tilde{b}_z^{m_i})^T$ виміряні одиничні вектори, а $\xi^{m_i} = (\xi_x^{m_i}, \xi_y^{m_i}, \xi_z^{m_i})^T$ — похибки вимірювання, про які априорі відомо, що вони обмежені за величиною

$$\left| \xi_x^{m_i} \right| \leq \varepsilon_x^{m_i}, \quad \left| \xi_y^{m_i} \right| \leq \varepsilon_y^{m_i}, \quad \left| \xi_z^{m_i} \right| \leq \varepsilon_z^{m_i}, \quad m = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n_m}. \quad (2)$$

Якщо всі АД_m ідентичні, то для простоти покладемо

$$\varepsilon_x^{m_i} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_y^{m_i} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_z^{m_i} = \varepsilon_3, \quad m = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n_m}. \quad (3)$$

Із (1)–(3) можна зробити висновок, що

$$b^{m_i} \in [b^{m_i}],$$

де

$$[b^{m_i}] = \{b = (b_1, b_2, b_3)^T \in R^3 : |b_1 - \tilde{b}_x^{m_i}| \leq \varepsilon_1, |b_2 - \tilde{b}_y^{m_i}| \leq \varepsilon_2, |b_3 - \tilde{b}_z^{m_i}| \leq \varepsilon_3\}$$

— інтервальна множина векторів. Аналогічні означення будемо використовувати для інтервальних матриць, а для алгебраїчних операцій над ними будемо користуватися методами інтервальної математики [11–13].

Визначимо матрицю переходу від ІСК до ВСК_m у вигляді ортогональних матриць повороту:

$$S^m = \begin{pmatrix} s_{11}^m & s_{12}^m & s_{13}^m \\ s_{21}^m & s_{22}^m & s_{23}^m \\ s_{31}^m & s_{32}^m & s_{33}^m \end{pmatrix}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (4)$$

Аналогічно визначимо матриці переходу від ВСК_m до ВСК_p:

$$S^{mp} = \begin{pmatrix} s_{11}^{mp} & s_{12}^{mp} & s_{13}^{mp} \\ s_{21}^{mp} & s_{22}^{mp} & s_{23}^{mp} \\ s_{31}^{mp} & s_{32}^{mp} & s_{33}^{mp} \end{pmatrix}, \quad m, p = \overline{1, M}, \quad p \neq m. \quad (5)$$

Вирази (4) і (5) називають ще матрицями напрямних косинусів. Вони є ортогональними, і для них виконується співвідношення $S^{-1} = S^T$.

Будемо припускати, що матриці взаємної орієнтації S^{mp} відомі з похибкою, тобто замість точних матриць маємо оцінки \tilde{S}^{mp} , що задаються співвідношенням

$$\tilde{S}^{mp} = S^{mp} + \delta S^{mp}, \quad (6)$$

де δS^{mp} — матриці похибок, які мають вигляд

$$\delta S^{mp} = \begin{pmatrix} \eta_{11}^{mp} & \eta_{12}^{mp} & \eta_{13}^{mp} \\ \eta_{21}^{mp} & \eta_{22}^{mp} & \eta_{23}^{mp} \\ \eta_{31}^{mp} & \eta_{32}^{mp} & \eta_{33}^{mp} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Елементи (7) відповідають малим кутам відхилення, що задовольняють обмеження

$$|\eta_{ij}^{mp}| \leq \varepsilon_{ij}^{mp}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

де ε_{ij}^{mp} , $i, j = \overline{1, 3}$ — досить малі величини. Умови (6)–(8) будемо записувати у вигляді

$$S^{mp} \in [S^{mp}]_0 = \tilde{S}^{mp} + [\delta S^{mp}]_0,$$

де $[S^{mp}]_0$, $[\delta S^{mp}]_0$ — інтервальні матриці, а індекс «0» означає, що це апріорні значення, відомі заздалегідь. Інтервальна матриця $[\delta S^{mp}]_0$ містить усі матриці виду (7), елементи яких задовольняють умову (8).

Елементи матриць переходу не є незалежними змінними. Вони є функціями або трьох незалежних кутів Кривої, що задають кути поворотів при переході від однієї системи координат до іншої, або компонент кватерніона орієнтації. Зокрема, вираз матриці S^m через кватерніон $\Lambda_m = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ повороту ВСК $_m$ відносно ІСК має вигляд [14]

$$S^m = S(\Lambda_m) = I_3 - 2\lambda_0 \tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda} \tilde{\lambda}, \quad (9)$$

де I_3 — одинична матриця розмірності 3, косиметрична матриця

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кватерніон Λ_m повинен задовольняти умову нормування $(\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2 = 1$. Тому число незалежних елементів матриці S^m також дорівнює трьом.

Вектор напрямку b^{m_i} на i -у зірку у ВСК m -го астродатчика, можна ототожити з відповідним їй напрямком — вектором r^{m_i} в ІСК співвідношенням

$$S^m r^{m_i} = b^{m_i}. \quad (10)$$

За допомогою матриці взаємної орієнтації астродатчиків з номерами p й m можна записати ще одне співвідношення:

$$S^m = S^{pm} S^p. \quad (11)$$

Завдяки властивості ортогональності маємо

$$S^p = (S^{pm})^T S^m. \quad (12)$$

Співвідношення (10)–(12) дають можливість звести вимірювання всіх АД у систему рівнянь, записану відносно S^m :

$$\begin{aligned} S^m r^{m_i} &= b^{m_i}, & i &= \overline{1, n_m}, \\ S^m r^{p_i} &= S^{pm} b^{p_i}, & i &= \overline{1, n_p}, \quad p \neq m. \end{aligned} \quad (13)$$

Подамо (13) у матричному вигляді

$$S^m R^m = B^m, \quad (14)$$

де матриця R^m складається з векторів $r^{m_i}, i = \overline{1, n_m}$ і $r^{p_i}, p = \overline{1, n}, p \neq m, i = \overline{1, n_p}$, а матриця B^m — з векторів $b^{m_i}, i = \overline{1, n_m}$ і $S^{pm}b^{p_i}, p = \overline{1, n}, p \neq m, i = \overline{1, n_p}$. Використовуючи (14) для кожного з АД, можна знайти всі матриці $S^m, m = \overline{1, M}$, а з них визначити попарно матриці взаємної орієнтації S^{pm} .

Зазначимо, що матриці S^m можуть бути різними при кожному вимірюванні, а матриці S^{pm} є постійними. Оскільки інформація про вектори b^{m_i} і b^{p_i} за припущенням задана у вигляді інтервалів, оцінки для матриць S^m і S^{pm} також будемо отримувати у вигляді інтервалів.

При загальній кількості зірок, рівній трьом, розв'язок знаходиться зі співвідношення

$$S^m = B^m (R^m)^{-1}.$$

Для більшої кількості зірок система (14) є перевизначеною. Збільшення кількості зірок може привести до отримання точніших оцінок, як показано в роботі [8] для випадку із точно заданими S^{pm} . При цьому використання групи АД замість одного еквівалентне розширенню загального поля зору, що дає змогу отримати матрицю R^m з меншим числом обумовленості.

При неточно заданих S^{pm} до похибок вимірювань напрямків на зірки додаються похибки взаємних орієнтацій АД, що призводить до розширення інтервалів невизначеності правих частин другої групи рівнянь системи (13).

Розглянемо кластер з трьох АД, які позначено індексами m, p і q . Запишемо систему (13) для АД _{m} :

$$\begin{aligned} S^m r^{m_i} &= b^{m_i}, & i &= \overline{1, n_m}, \\ S^m r^{p_i} &= S^{pm} b^{p_i}, & i &= \overline{1, n_p}, \\ S^m r^{q_i} &= S^{qm} b^{q_i}, & i &= \overline{1, n_q}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $b^{m_i}, b^{p_i}, b^{q_i}$ — вектори напрямків на зірки, що перебувають у полі зору цих датчиків. У дискретні моменти часу $t_k = t_0 + k\Delta T, k = 1, 2, \dots$ кожен АД розпізнає зірки, що потрапили у його поле зору, і видає координати напрямків на них. У динамічному процесі зміни орієнтації КА матриці S^m в (15) будуть функціями часу t_k . Права частина (15) містить похибки вимірювань напрямків на зірки $b^{m_i}, b^{p_i}, b^{q_i}$ і похибки взаємних орієнтацій астродатчиків S^{pm} та S^{qm} .

Ставиться задача — розробити алгоритм розв'язування систем виду (15) у моменти часу t_k , що дає змогу знаходити оцінки матриці орієнтації \hat{S}^m , відповідного кватерніона $\hat{\Lambda}_m$, а також уточнені оцінки матриць \hat{S}^{pm} і \hat{S}^{qm} .

2. Покращена оцінка параметрів орієнтації астродатчиків

Для розв'язування задачі пропонується використовувати двоступінчасту схему. На першому етапі в момент t_k знаходиться розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
S^m r^{m_i} &= [b^{m_i}], & i &= \overline{1, n_m}, \\
S^m r^{P_i} &= [S^{pm}]_{k-1} [b^{P_i}], & i &= \overline{1, n_p}, \\
S^m r^{Q_i} &= [S^{qm}]_{k-1} [b^{Q_i}], & i &= \overline{1, n_q},
\end{aligned} \tag{16}$$

де $[S^{pm}]_{k-1}$ і $[S^{qm}]_{k-1}$ — інтервальні матриці взаємної орієнтації астродатчиків, отримані на попередній момент часу. Для $k = 1$ беруться апіорні значення цих матриць $[S^{pm}]_0$ і $[S^{qm}]_0$, які припускаються відомими. Система рівнянь (16) являє собою систему лінійних нерівностей відносно невідомих рядків матриці S^m . Можна показати, що її точним розв'язком будуть багатогранні множини (тривимірні багатогранники), яким гарантовано належать рядки матриці S^m . Однак з метою спрощення обчислень для матриць S^m , що задовольняють (16), будуються інтервальні оцінки $[S^m]_k$ відповідно до алгоритму [4]. Такі інтервальні оцінки $[S^p]_k$ і $[S^q]_k$ знаходяться також для астродатчиків з індексами p і q із систем, аналогічних (16).

На другому етапі уточнюються значення матриць взаємної орієнтації АД. Це робиться з використанням рівності (11), з якої випливає, що

$$S^{pm} = S^m (S^p)^T. \tag{17}$$

Через те, що інтервальні матриці $[S^{pm}]_{k-1}$, $[S^p]_k$ і $[S^q]_k$ є гарантованими оцінками, процедуру уточнення $[S^{pm}]$ пропонується визначити співвідношенням

$$[S^{pm}]_k = [S^{pm}]_{k-1} \cap ([S^m]_k [S^p]_k^T) \quad \forall k \geq 1. \tag{18}$$

Очевидно, що в силу запропонованої побудови невизначеність значень матриці S^{pm} з часом не збільшується. Аналогічні до (18) рівняння використовуються для отримання інтервальних оцінок $[S^{qm}]_k$ і $[S^{qp}]_k$ для матриць S^{qm} і S^{qp} відповідно.

2.1. Деякі питання реалізації методу розв'язування. Для розв'язування системи з інтервально заданою правою частиною (16) будемо використовувати метод, описаний у [8]. Його суть полягає в формуванні з рівнянь (16) множини квадратних систем, їх розв'язанні та перетині отриманих інтервальних оцінок.

Нехай із системи (16) обрано три рівняння, що відповідають деякій трійці зірок. Для спрощення виразів позначимо їх просто індексами 1, 2 і 3. Сформуємо систему

$$S^m R = \begin{pmatrix} [b_x^1] & [b_x^2] & [b_x^3] \\ [b_y^1] & [b_y^2] & [b_y^3] \\ [b_z^1] & [b_z^2] & [b_z^3] \end{pmatrix}, \tag{19}$$

у правій частині якої стоїть матриця, що складається з інтервально заданих векторів, вимірних кластером астродатчиків напрямків на зірки в ВСК_m, а

$$R = \begin{pmatrix} r_x^1 & r_x^2 & r_x^3 \\ r_y^1 & r_y^2 & r_y^3 \\ r_z^1 & r_z^2 & r_z^3 \end{pmatrix}$$

— матриця, складена з векторів напрямків на ці ж зірки в ІСК, заданих у зоряному каталозі. Всі три зірки різні, так що матриця R невироджена. Тоді маємо розв'язок у вигляді добутку інтервально заданої матриці на звичайну матрицю:

$$S^m = \begin{pmatrix} [b_x^1] & [b_x^2] & [b_x^3] \\ [b_y^1] & [b_y^2] & [b_y^3] \\ [b_z^1] & [b_z^2] & [b_z^3] \end{pmatrix} \cdot R^{-1}. \quad (20)$$

У роботах [15, 16] показано суттєвий вплив числа обумовленості матриці R на ширину інтервалів отримуваної оцінки матриці S^m . Найбільш точна інтервальна оцінка $[S^m]_k$ буде отримуватися для трійки зірок, напрямки на які взаємно ортогональні. При зменшенні кутів між напрямками на зірки обумовленість матриці R зростає, що призводить до погіршення якості оцінки $[S^m]_k$. Тому з усіх можливих комбінацій трійок зірок, що знаходяться в полі зору всіх АД, є сенс використовувати тільки трійки найбільш віддалених. Враховуючи невеликий кут зору типових АД, робимо висновок, що для формування систем (19) раціонально обирати по одній вимірній зірці від кожного АД, а оптимальним розташуванням АД у кластері є взаємно ортогональне.

Подамо базову систему (19) у такому вигляді:

$$S^m \cdot (r^{m_u}, r^{p_v}, r^{q_w}) = ([\tilde{b}^{m_u}], [S^{pm}]_{k-1}[\tilde{b}^{p_v}], [S^{qm}]_{k-1}[\tilde{b}^{q_w}]),$$

де u, v, w — індекси трійки зірок, що виміряні відповідно датчиками АД_{*m*}, АД_{*p*} і АД_{*q*}, а $[\tilde{b}^{m_u}], [\tilde{b}^{p_v}], [\tilde{b}^{q_w}]$ — інтервальні оцінки напрямків на ці зірки у відповідних ВСК. Точкові виміряні значення $\tilde{b}^{m_u}, \tilde{b}^{p_v}, \tilde{b}^{q_w}$ задають центри цих інтервалів, а їх ширина визначається згідно з апіорними обмеженнями невизначеності (1)–(3):

$$[\tilde{b}^{m_u}] = \tilde{b}^{m_u} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \\ [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \\ [-\varepsilon_3, \varepsilon_3] \end{pmatrix}, [\tilde{b}^{p_v}] = \tilde{b}^{p_v} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \\ [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \\ [-\varepsilon_3, \varepsilon_3] \end{pmatrix}, [\tilde{b}^{q_w}] = \tilde{b}^{q_w} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \\ [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \\ [-\varepsilon_3, \varepsilon_3] \end{pmatrix}.$$

Оцінімо добутки $[S^{pm}]_0[\tilde{b}^{p_v}]$ і $[S^{qm}]_0[\tilde{b}^{q_w}]$. Враховуючи обмеження (7) і (8), маємо

$$[S^{pm}]_0[\tilde{b}^{p_v}] = \left(\tilde{S}^{mp} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon_{11}^{mp}, \varepsilon_{11}^{mp}] & [-\varepsilon_{21}^{mp}, \varepsilon_{21}^{mp}] & [-\varepsilon_{31}^{mp}, \varepsilon_{31}^{mp}] \\ [-\varepsilon_{12}^{mp}, \varepsilon_{12}^{mp}] & [-\varepsilon_{22}^{mp}, \varepsilon_{22}^{mp}] & [-\varepsilon_{32}^{mp}, \varepsilon_{32}^{mp}] \\ [-\varepsilon_{13}^{mp}, \varepsilon_{13}^{mp}] & [-\varepsilon_{23}^{mp}, \varepsilon_{23}^{mp}] & [-\varepsilon_{33}^{mp}, \varepsilon_{33}^{mp}] \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\tilde{b}^{p_v} + \begin{pmatrix} [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \\ [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \\ [-\varepsilon_3, \varepsilon_3] \end{pmatrix} \right),$$

де \tilde{S}^{mp} — апріорі задана точкова оцінка матриці переходу між ВСК_m та ВСК_p. Застосовуючи правило множення інтервальних чисел $[-a, a] \cdot [-b, b] = [-ab, ab]$, отримуємо

$$[S^{pm}]_0[\tilde{b}^{pv}] = \tilde{S}^{pm}\tilde{b}^{pv} + \begin{pmatrix} [-\delta_x^p, \delta_x^p] \\ [-\delta_y^p, \delta_y^p] \\ [-\delta_z^p, \delta_z^p] \end{pmatrix},$$

де $\tilde{S}^{pm}\tilde{b}^{pv}$ — точкова оцінка вектора напрямку на зірку, що приведена до СК ВСК_m, а ширина інтервалів визначається виразами

$$\begin{aligned} \delta_x^p &= \left| \tilde{S}_{11}^{mp} \right| \varepsilon_1 + \left| \tilde{S}_{21}^{mp} \right| \varepsilon_2 + \left| \tilde{S}_{31}^{mp} \right| \varepsilon_3 + \left| \tilde{b}_x^{pv} \right| \varepsilon_{11}^{mp} + \left| \tilde{b}_y^{pv} \right| \varepsilon_{21}^{mp} + \\ &\quad + \left| \tilde{b}_z^{pv} \right| \varepsilon_{31}^{mp} + \varepsilon_1 \varepsilon_{11}^{mp} + \varepsilon_2 \varepsilon_{21}^{mp} + \varepsilon_3 \varepsilon_{31}^{mp}, \\ \delta_y^p &= \left| \tilde{S}_{12}^{mp} \right| \varepsilon_1 + \left| \tilde{S}_{22}^{mp} \right| \varepsilon_2 + \left| \tilde{S}_{32}^{mp} \right| \varepsilon_3 + \left| \tilde{b}_x^{pv} \right| \varepsilon_{12}^{mp} + \left| \tilde{b}_y^{pv} \right| \varepsilon_{22}^{mp} + \\ &\quad + \left| \tilde{b}_z^{pv} \right| \varepsilon_{32}^{mp} + \varepsilon_1 \varepsilon_{12}^{mp} + \varepsilon_2 \varepsilon_{22}^{mp} + \varepsilon_3 \varepsilon_{32}^{mp}, \\ \delta_z^p &= \left| \tilde{S}_{13}^{mp} \right| \varepsilon_1 + \left| \tilde{S}_{23}^{mp} \right| \varepsilon_2 + \left| \tilde{S}_{33}^{mp} \right| \varepsilon_3 + \left| \tilde{b}_x^{pv} \right| \varepsilon_{13}^{mp} + \left| \tilde{b}_y^{pv} \right| \varepsilon_{23}^{mp} + \\ &\quad + \left| \tilde{b}_z^{pv} \right| \varepsilon_{33}^{mp} + \varepsilon_1 \varepsilon_{13}^{mp} + \varepsilon_2 \varepsilon_{23}^{mp} + \varepsilon_3 \varepsilon_{33}^{mp}. \end{aligned}$$

Таким чином обчислюються всі елементи інтервальної матриці правої частини (19). З розв'язку системи (20) отримуємо оцінку елементів матриці S^m як лінійну комбінацію інтервальних чисел.

Перебором комбінацій зірок із підходящим числом обумовленості встановлюються гарантовані інтервали приналежності всіх елементів матриці S^m . Шляхом покомпонентного перетину інтервалів приналежності по різних комбінаціях зірок можна отримати більш точну гарантовану інтервальну оцінку $[S^m]_k$. Чим більше зірок використовується, тим більш ймовірно отримання уточнених оцінок.

Описаним способом одержуються інтервальні оцінки матриць орієнтації всіх трьох астродатчиків — $[S^m]_k$, $[S^p]_k$ та $[S^q]_k$.

Для додаткового звуження інтервалів можна скористатися тим фактом, що матриці орієнтації мають бути ортогональними. Для цього для кожного інтервально заданого елемента матриці проводиться його перетин з інтервалом, який гарантує, що:

- інтервальна оцінка норми вектора, складеного з елементів рядка або стовпця матриці, містить одиницю (умова нормованості рядків та стовпців);
- інтервальна оцінка скалярного добутку будь-якої пари векторів, складених із рядків або стовпців матриці, містить нуль (умова ортогональності рядків та стовпців);
- інтервальна оцінка векторного добутку пари векторів, складених з елементів рядків або стовпців матриці, містить третій вектор (умова ортогональності і правої трійки).

Звуження інтервалів приналежності ортогональної матриці реалізується у вигляді окремої процедури, що виконує наведені вище перевірки. В результаті її роботи часто вдається отримувати більш вузькі інтервали приналежності для окремих елементів матриці.

2.2. Знаходження кватерніона за заданою інтервальною матрицею переходу. На основі властивостей статистики середину отриманих інтервалів $[S^m]_k$ беремо за уточнену оцінку елементів матриці S^m . Такі оцінки робляться для всіх m і при заданому моменті часу t_k . Отримана оцінка матриць S^m , $m = \overline{1, M}$, складених із середніх значень інтервалів приналежності її елементів, не гарантує, що вона ортогональна, і, отже, існує кватерніон Λ_m , який би відповідав цим середнім значенням у силу представлення (9). Тому розглянемо задачу знаходження такого кватерніона $\hat{\Lambda}_m$, який був би найбільш близьким до цих середніх значень, і його матриця орієнтації, утворена згідно з (9), мала б елементи, що не виходять за межі інтервалів приналежності, тобто $S(\hat{\Lambda}_m) \in [S^m]_k$. При цьому припускається, що такий кватерніон існує.

Будемо його знаходити з розв'язку наступної задачі мінімізації:

$$\Lambda_m^* = \arg \min_{\Lambda_m \in \Lambda_{\text{доп}}} \sum_{j=1}^3 \alpha_j [(S_j^m(\Lambda_m))^T - (\hat{S}_j^m)^T], \quad (21)$$

де Λ_m^* — шуканий мінімізуючий елемент, S_j^m ($j = 1, 2, 3$) — вектор-стовпці матриці S^m , представленої у вигляді (9), які записуються як

$$S_j^m(\Lambda_m) = e_1 + 2\Lambda_{1m}, \quad S_2^m(\Lambda_m) = e_2 + 2\Lambda_{2m}, \quad S_3^m(\Lambda_m) = e_3 + 2\Lambda_{3m},$$

де e_1, e_2, e_3 — одиничні орти прямокутної системи координат, а вектори $\Lambda_{1m}, \Lambda_{2m}, \Lambda_{3m}$ мають згідно з (9) вирази

$$\Lambda_{1m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda_{2m}^2 - \lambda_{3m}^2 \\ \lambda_{1m}\lambda_{2m} - \lambda_{0m}\lambda_{3m} \\ \lambda_{1m}\lambda_{3m} + \lambda_{0m}\lambda_{2m} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{2m} = \begin{bmatrix} \lambda_{0m}\lambda_{3m} + \lambda_{1m}\lambda_{2m} \\ \frac{1}{2} - \lambda_{1m}^2 - \lambda_{3m}^2 \\ \lambda_{2m}\lambda_{3m} - \lambda_{0m}\lambda_{1m} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{3m} = \begin{bmatrix} \lambda_{1m}\lambda_{3m} - \lambda_{0m}\lambda_{2m} \\ \lambda_{2m}\lambda_{3m} + \lambda_{0m}\lambda_{1m} \\ \frac{1}{2} - \lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2 \end{bmatrix},$$

де α_j — вагові коефіцієнти (додатні), які можна вибрати нормованими, тобто

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 1, \quad \Lambda_{\text{доп}} — \text{допустима область кватерніона, що визначається умовою нормування.}$$

Якщо взяти до уваги ортонормованість матриці $S^m(\Lambda_m)$ при будь-якому припустимому Λ_m , задача (21) зводиться до вигляду

$$\Lambda_m^* = \arg \min_{\Lambda_m \in \Lambda_{\text{доп}}} 2 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[\frac{1 + |\hat{S}_j^m|^2}{2} - (\hat{S}_j^m)^T S_j^m(\Lambda_m) \right]. \quad (22)$$

Задача мінімізації (22) еквівалентна знаходженню кватерніона Λ_m , який максимізує на $\Lambda_{\text{доп}}$ квадратичну функцію

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j (\hat{S}_j^m)^T S_j^m (\Lambda_m), \quad (23)$$

яку з урахуванням наведених вище позначень можна записати як

$$\Lambda_m^T K \Lambda_m. \quad (24)$$

Оскільки допустима область представлена обмеженням у вигляді рівності, метод множників Лагранжа дає змогу звести задачу максимізації функції (23) на $\Lambda_{\text{доп}}$ до безумовної оптимізації функції

$$\Lambda_m^T K \Lambda_m - \mu (\Lambda_m^T \Lambda_m - 1), \quad (25)$$

а параметр μ знаходити таким, щоб для кватерніона виконувалася умова нормування. Необхідна умова оптимальності функції (25) приводить до рівняння

$$K \Lambda_m = \mu \Lambda_m. \quad (26)$$

Звідси випливає, що оптимальний кватерніон повинен бути власним вектором матриці K , а множник μ — власним значенням матриці K , що відповідає цьому вектору. Для кожного із чотирьох власних значень і відповідних їм власних функцій буде виконуватися співвідношення

$$\Lambda_m^T K \Lambda_m = \mu \Lambda_m^T \Lambda_m = \mu,$$

що випливає безпосередньо з (26).

Значить, квадратична функція (24) досягає максимуму, якщо в якості Λ_m^* обрати власний вектор, що відповідає максимальному власному вектору, тобто

$$K \Lambda_m^* = \mu_{\max} \Lambda_m^*.$$

Цей результат стосовно до задачі орієнтації на основі астродатчиків уперше був отриманий Дейвенпортом [17]. Існують надійні чисельні методи, що дають змогу розв'язувати таку задачу на власні значення. За допомогою вагових коефіцієнтів можна домагатися приналежності одержуваного розв'язку гарантованим інтервалам приналежності точної матриці орієнтації. Підвищуючи вагу векторів S_j^m , які більше відхилилися від середини гарантованих інтервалів, можна досягти більш оптимального розташування матриці $S^m(\Lambda_m)$ на гарантованих інтервалах. Перший метод розв'язування задачі знаходження оптимального кватерніона на основі обчислення найбільшого власного значення й відповідного йому власного вектора розробив сам Дейвенпорт, який одержав назву « q -метод» [17]. На його основі було розроблено інші методи і відповідні їм алгоритми та їх програмна реалізація, які дають можливість економніше розв'язувати представлену задачу. При цьому досягалася цілком прийнятна точність. Порівняльний аналіз різних розроблених методів і алгоритмів можна знайти в [18, 19].

2.3. Спрощений метод знаходження кватерніона орієнтації КА та взаємної орієнтації АД. Можна показати, що наявність інтервальних матриць $[S^{pm}]_{k-1}$ у рівнянні (16) приводить до більш грубих оцінок для $[S^m]_k$, ніж при точно відомій матриці S^{pm} . Може виявитися, що такі оцінки будуть настільки грубими, що матриці $[S^{pm}]_k$, які обчислюються виходячи з рівняння (18), перестануть уточнюватися. У цьому випадку, який легко виявляється в процесі обчислень, пропонується спрощений алгоритм обчислення $[S^m]_k$ за допомогою такого евристичного способу. Замість інтервальних матриць $[S^{pm}]_{k-1}$ і $[S^{qm}]_{k-1}$ у рівнянні (16) пропонується використовувати їхні точкові оцінки \hat{S}_{k-1}^{pm} і \hat{S}_{k-1}^{qm} , які обчислюються з використанням інтервальних матриць $[S^m]_k$, $[S^p]_k$ і $[S^q]_k$. Позначимо оцінки кватерніонів для цих матриць $\hat{\Lambda}_{m,k}$, $\hat{\Lambda}_{p,k}$ і $\hat{\Lambda}_{q,k}$. Ці оцінки одержуємо за допомогою методу, описаного в попередньому підрозділі.

Рівнянню (17), яке справедливе для точних значень матриць переходу, відповідає наступне співвідношення для кватерніонів:

$$\Lambda_{pm} = \Lambda_m \circ \bar{\Lambda}_p, \quad (27)$$

де кватерніони такі, що $S^{pm} = S(\Lambda_{pm})$, $S^m = S(\Lambda_m)$ і $S^p = S(\Lambda_p)$, $\bar{\Lambda}_p$ — кватерніон, спряжений до Λ_p , (\circ) — операція множення кватерніонів. Кватерніон Λ_{pm} визначає взаємну орієнтацію p -го та m -го астродатчиків; Λ_m — кватерніон орієнтації m -го астродатчика по відношенню до ІСК, Λ_p визначає орієнтацію ВСК p -го астродатчика по відношенню до ІСК.

Оскільки замість точних відомі тільки наближені значення кватерніонів, будемо використовувати рівняння (27) для одержання оцінки кватерніона $\hat{\Lambda}_{pm,k}$ у такому вигляді:

$$\hat{\Lambda}_{pm,k} = \hat{\Lambda}_{m,k} \circ \bar{\hat{\Lambda}}_{p,k}.$$

Аналогічні рівняння пропонується використовувати для одержання оцінок кватерніонів $\hat{\Lambda}_{qm,k}$ і $\hat{\Lambda}_{qp,k}$. Рівняння (16) при такому підході приймають вигляд

$$\begin{aligned} S^m r^{m_i} &= [b^{m_i}], & i &= \overline{1, n_m}, \\ S^m r^{p_i} &= S(\hat{\Lambda}_{pm,k-1})[b^{p_i}], & i &= \overline{1, n_p}, \\ S^m r^{q_i} &= S(\hat{\Lambda}_{qm,k-1})[b^{q_i}], & i &= \overline{1, n_q}. \end{aligned} \quad (28)$$

У цьому рівнянні замість кватерніонів $\hat{\Lambda}_{pm,k-1}$ і $\hat{\Lambda}_{qm,k-1}$ використовують їхні усереднені оцінки, одержувані, наприклад, за допомогою принципу максимальної правдоподібності (ПМП). Ефективність ПМП можна встановити за розподілом оцінок, близьким до нормального. У цьому випадку отримане за ПМП уточ-

нення кватерніона $\Lambda_{pm,k-1}$ буде ближчим до точного й стає допустимою ітеративна процедура подальшого уточнення оцінок $\hat{\Lambda}_{p,k}$ і $\hat{\Lambda}_{q,k}$ з використанням рівняння (28). Покращені оцінки цих кватерніонів дають змогу знову покращити оцінку кватерніонів взаємної орієнтації.

3. Результати чисельного моделювання

У всіх чисельних експериментах припускаються наступні умови. Є кластер з трьох однотипних астродатчиків, з кожним із яких зв'язана своя внутрішня прямокутна система координат (O_m, x_m, y_m, z_m) . Осі внутрішніх систем координат обрані таким чином, щоб візирна вісь астродатчика співпадала за напрямком з вектором z_m . Астродатчики були встановлені на КА так, щоб їх візирні осі були взаємно перпендикулярними, а перехід між ВСК задавався матрицями

$$\tilde{S}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Після виведення КА в космос взаємна орієнтація астродатчиків випадковим чином змінилася і прийняла вид

$$S^{21} = R^{rand}(\varphi_{21}) \cdot \tilde{S}^{21}, \quad S^{31} = R^{rand}(\varphi_{31}) \cdot \tilde{S}^{31},$$

де $R^{rand}(\varphi)$ — матриця повороту навколо випадкової осі на кут φ . При цьому апіорі відомо, що кути φ_{21} і φ_{31} не можуть перевищувати задану константу Φ_{MOUNT} — максимальну похибку орієнтації астродатчиків.

Поле зору кожного АД задається кутом α_{FOV} — максимальним кутом між напрямком на спостережувану зірку та візирною віссю АД. Кожна зірка, що потрапила в поле зору АД, розпізнається і вимірюється, так що для неї визначаються такі величини:

— точний напрямок на зірку в ІСК — нормований вектор r , відповідно до каталогу;

— вимірний напрямок на зірку в ВСК датчика — нормований вектор \tilde{b} .

При цьому апіорі відомо, що вимірний напрямок \tilde{b} не може відхилитися від істинного напрямку на зірку b на кут, більший заданої константи Φ_{MEAS} — максимальної похибки вимірювання.

Інтервальні оцінки вимірних напрямків на зірки формується підпрограмою, яка обчислює координати паралелепіпеда зі сторонами, паралельними осям необхідної СК, описаного навколо множини нормованих векторів, що відхиляються від заданого напрямку не більше ніж на заданий кут.

Для отримання інтервальної оцінки напрямку на зірку, вираженої в ВСК того датчика, який провів її вимірювання, максимальний кут відхилення від вимірюваного точкового значення \tilde{b} беремо рівним Φ_{MEAS} .

Для отримання інтервальної оцінки напрямку на зірку, вираженої в ВСК іншого датчика, максимальний кут відхилення від вимірюваного точкового значення

$\tilde{S}^{ij} \tilde{b}$ (\tilde{S}^{ij} (априорна точкова оцінка матриці переходу між відповідними ВСК) береться рівним сумі $\Phi_{MEAS} + \Phi_{MOUNT}$. Після отримання апостеріорних оцінок взаємної орієнтації АД в якості інтервальної оцінки напрямку на зірку береться перетин множин:

— інтервальної оцінки, отриманої за відхиленням від $\tilde{S}^{ij} \tilde{b}$ на кут $\Phi_{MEAS} + \Phi_{MOUNT}$;

— добутку $[\Delta(\Phi_{MOUNT})] \cdot [S^{ij}]_1 \cdot \tilde{b}$, де $[\Delta(\Phi_{MOUNT})]$ — інтервальна матриця, яка задає поворот навколо довільної осі на кут, що не перевищує Φ_{MOUNT} , а $[S^{ij}]_1$ — апостеріорна інтервальна оцінка матриці переходу між відповідними ВСК.

Всі чисельні експерименти проводяться на випадково згенерованих наборах зірок, що розміщуються в полі зору астродатчиків. Кількість зірок у полі зору всіх астродатчиків береться однаковою і позначається величиною n .

3.1. Знаходження точкової оцінки взаємної орієнтації пари АД. Перевіримо можливість отримання точкової оцінки взаємної орієнтації двох АД, застосовуючи принцип ПМП до точок, що є центрами гарантованих інтервалів матриці орієнтації.

Маємо $K = 5000$ незалежних вимірювань кластера астродатчиків. У кожному вимірюванні орієнтація першого АД S^1 є випадковою, а число зірок у полі зору кожного АД завжди дорівнює $n = 3$. Кут зору АД дорівнює $\alpha_{FOV} = 10^\circ$, максимальна похибка вимірювання напрямку на зірку становить $\Phi_{MEAS} = 0,01^\circ$, а максимальна похибка орієнтації датчиків становить $\Phi_{MOUNT} = 0,1^\circ$. Зірки у полі зору АД, а також величини похибок вимірювань напрямків на зірки розподілені рівномірно.

Для кожного вимірювання знаходяться інтервальні оцінки $[S^1], [S^2]$ та обчислюється апостеріорна інтервальна оцінка взаємної орієнтації датчиків $[S^{21}]_1$. Для кожного елемента цієї матриці обчислюється центр гарантованого інтервалу приналежності. Статистика, зібрана по всіх вимірюваннях, представлена у вигляді гістограми, що показує значення центрів інтервалів, які отримані найчастіше.

На рис. 1 показано описані гістограми для всіх дев'яти елементів матриці $[S^{21}]_1$. Точні значення показано суцільною вертикальною лінією.

З рис. 1 видно, що центр інтервальної оцінки не може використовуватись для отримання точкової оцінки матриці орієнтації. Несхожість гістограм на нормальний розподіл пояснюється тим, що при обчисленні інтервальних оцінок вимірювань і матриць поворотів використовувались вищенаведені процедури звуження гарантованих інтервалів. При звуженні інтервалів їхні центри можуть зміщуватись, що призводить до зміщення центрів інтервалів у остаточного результату.

Наприклад, якщо для тих самих початкових даних відмовитись від процедур звуження гарантованих інтервалів ортогональних матриць, то вигляд гістограм буде більш нагадувати нормальний розподіл. Результат наведено на рис. 2.

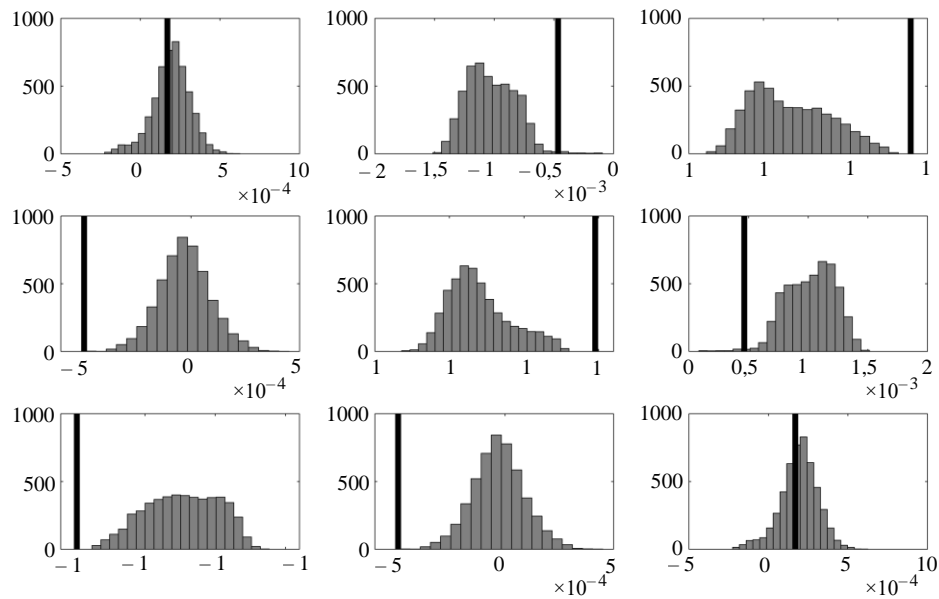


Рис. 1

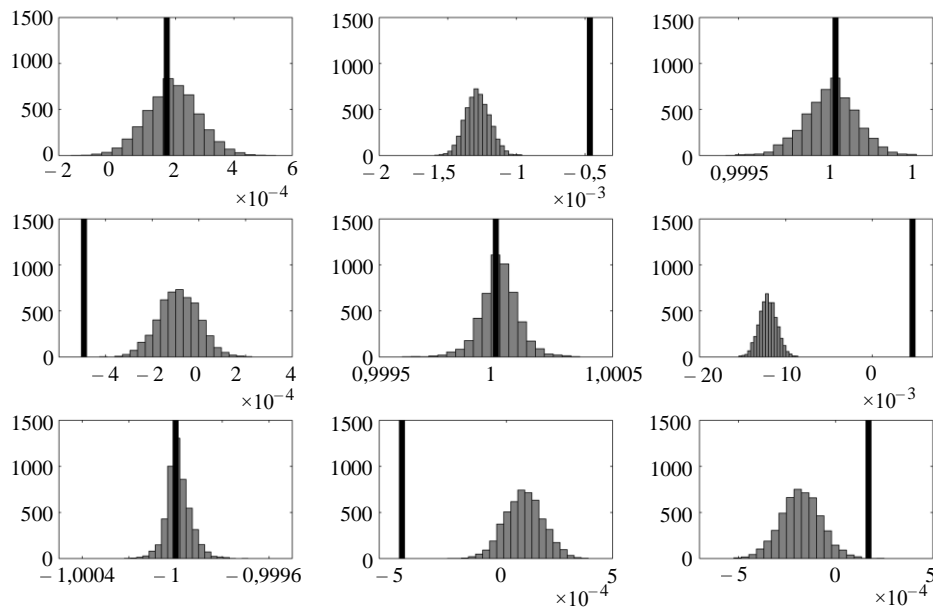


Рис. 2

З рис. 2 видно, що гістограми стали схожими на нормальний розподіл. Зміщеність оцінок, що обираються з ПМП, зберігається через початкове несиметричне задання інтервальних оцінок вимірних векторів напрямків на зірки. Також з рис. 2 видно, що отримувані в цьому випадку інтервальні оцінки елементів ортогональної матриці включають завідомо неприпустимі області. Наприклад, в матриці повороту не може бути елементів, більших за 1 чи менших за -1 .

Для отримання незміщених оцінок необхідно задавати початкові інтервальні оцінки таким чином, щоб вимірні точкові значення завжди знаходилися в центрі інтервалу, а також відмовитись від спроб звуження інтервально заданих ортогональних матриць. Однак при цьому результуючі інтервальні оцінки інтервальних матриць розширюються.

3.2. Точність інтервального оцінювання матриці орієнтації.

Порівняємо точність інтервального оцінювання матриці орієнтації $[S^1]$ після обчислення уточнених інтервальних оцінок матриць взаємної орієнтації АД кластера. Точність оцінюватимемо як середню сумарну ширину всіх елементів матриці по $K = 500$ незалежних вимірюваннях кластера АД.

Кількість зірок в кожному АД дорівнює $n = 3$, кут зору АД дорівнює $\alpha_{FOV} = 10^\circ$, максимальна похибка вимірювання напрямку на зірку дорівнює $\Phi_{MEAS} = 0,01^\circ$, максимальна похибка орієнтації датчиків Φ_{MOUNT} варіюється від 0 (випадок детермінованого розташування датчиків) до $50 \cdot \Phi_{MEAS}$. Зірки в полі зору АД, а також величини похибок вимірювань напрямків на зірки розподілені рівномірно.

На рис. 3 суцільною лінією показано залежність середньої сумарної ширини елементів матриці $[S^1]$, що отримується при використанні кластера з трьох ортогональних АД, від максимальної похибки взаємної орієнтації АД Φ_{MOUNT} . Штриховою лінією показано середню сумарну ширину елементів матриці $[S^1]$ при використанні тільки одного АД₁. Штриховими лініями з маркерами показано ці ж величини для апостеріорних оцінок матриць взаємної орієнтації АД: $[S^{21}]$, $[S^{31}]$, $[S^{32}]$.

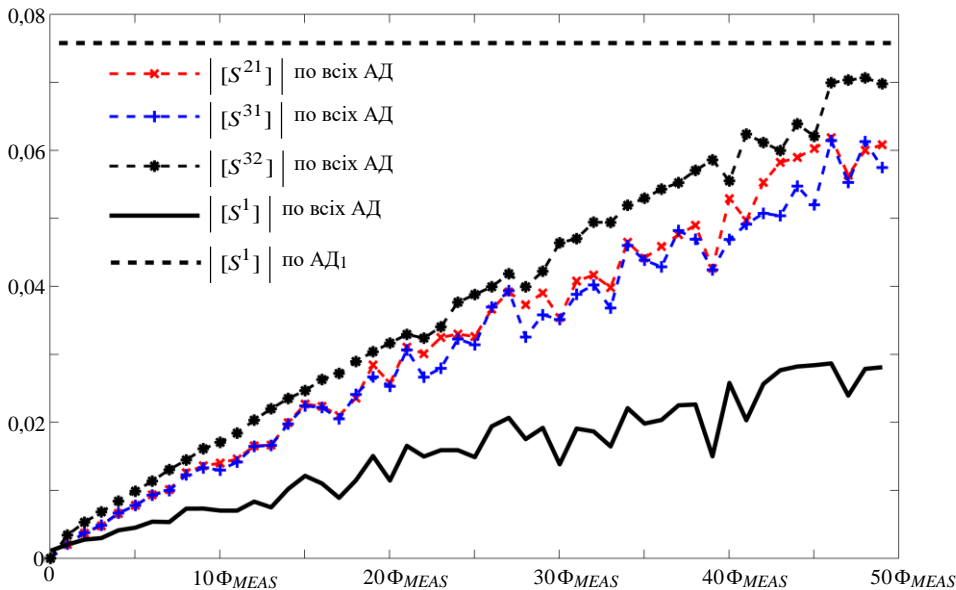


Рис. 3

З рис. 3 видно, що зі збільшенням максимально можливої похибки взаємної орієнтації датчиків Φ_{MOUNT} точність отримуваних інтервальних оцінок погіршується. Однак за рахунок кращої обумовленості використання кластера з трьох ортогональних АД все одно дає кращий результат, ніж використання одного астродатчика, навіть за умови, що орієнтація додаткових АД задана неточно.

3.3. Випадок необмеженої похибки взаємної орієнтації астродатчиків.

У попередньому експерименті було показано, що зі збільшенням максимально

припустимої похибки взаємної орієнтації АД, що задається кутом Φ_{MOUNT} , точність апостеріорних інтервальних оцінок матриць переходу між ВСК, а також інтервальних оцінок матриць переходу між ВСК і ІСК погіршується.

Однак очевидно, що це погіршення не може бути необмеженим: у випадку, якщо апріорні оцінки взаємної орієнтації астродатчиків взагалі не задані, орієнтацію ВСК відносно ІСК можна визначити, використовуючи кожний АД незалежно. З цих оцінок у свою чергу можна отримати оцінки взаємної орієнтації астродатчиків, а потім використовувати їх при спільній роботі АД.

Для перевірки можливості уточнення розв'язку з використанням такої схеми було проведено наступний експеримент. Знову розглядається кластер із трьох однотипних АД з кутом зору $\alpha_{FOV} = 10^\circ$ та максимальною похибкою вимірювань напрямків на зірки $\Phi_{MEAS} = 0,01^\circ$. Є $K = 500$ незалежних вимірювань, і в кожному вимірюванні кількість зірок у полі зору кожного АД дорівнює $n = 3$. Про взаємну орієнтацію АД інформація відсутня. Зірки у полі зору АД, а також величини похибок вимірювань напрямків на зірки розподілені рівномірно. Задача полягає у визначенні інтервальної оцінки матриці, що задає орієнтацію одного АД (першого) відносно ІСК.

Розв'язання виконувалося крок за кроком. На кроці 0 оцінок матриць взаємної орієнтації ВСК астродатчиків немає. Тому для кожного моменту вимірювань інтервальні оцінки $[S^1]$, $[S^2]$, $[S^3]$ визначалися із трьох незалежних систем, сформованих із зірок, що потрапили в поле зору АД₁, АД₂ і АД₃ відповідно. З них знаходилися оцінки матриць взаємної орієнтації АД, перетин яких по всіх вимірюваннях дав оцінки $[S^{21}]_1$, $[S^{31}]_1$, $[S^{32}]_1$.

На кожному кроці k ($k \geq 1$) виконувалося ітеративне уточнення: інтервальні оцінки $[S^1]$, $[S^2]$, $[S^3]$ для кожного вимірювання визначалися з єдиної системи, сформованої із зірок, що потрапили в поле зору всіх АД. У праву частину системи підставлялися поточні значення оцінок взаємної орієнтації $[S^{21}]_k$, $[S^{31}]_k$, $[S^{32}]_k$. Знову знаходилися оцінки матриць взаємної орієнтації АД, і з їхнього перетину по всіх вимірюваннях одержували нові оцінки $[S^{21}]_{k+1}$, $[S^{31}]_{k+1}$, $[S^{32}]_{k+1}$.

На рис. 4 наведено результати цього експерименту для випадку розташування трійки АД, близького до взаємно ортогонального. Суцільною лінією показано середню за всіма вимірюваннями сумарну ширину елементів інтервальної матриці $[S^1]$. Штриховими лініями з маркерами показано сумарну ширину елементів інтервальних матриць оцінок взаємної орієнтації астродатчиків кластера. По осі абсцис відкладено номер кроку описаного алгоритму.

З рис. 4 видно, що перехід від незалежного використання астродатчиків до спільного (крок 0 — крок 1) у випадку розташування АД у кластері, близького до ортогонального, дає істотне поліпшення інтервальних оцінок матриць орієнтації.

Також видно, що спроба ітеративного уточнення інтервальних оцінок орієнтації за рахунок уточнення взаємної орієнтації АД у кластері (кроки 1 і далі) не дає суттєвого результату. Поліпшення точності взаємної орієнтації АД спостерігається тільки на першій ітерації (крок 1 — крок 2), і воно практично не впливає на якість інтервальної оцінки орієнтації АД відносно ІСК.

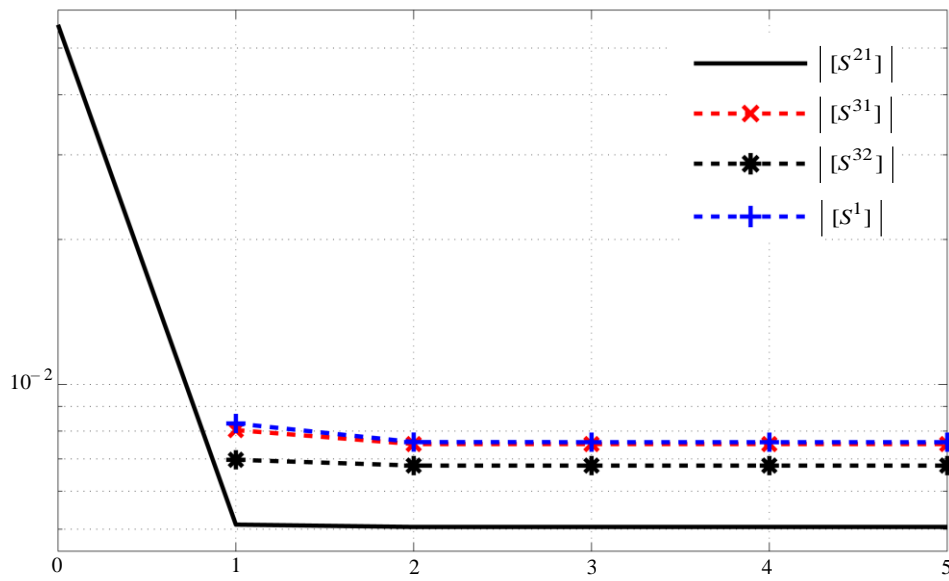


Рис. 4

Висновок

Інтервальний метод оцінювання орієнтації може використовуватися як для одного АД при заданих обмеженнях на величину похибки вимірювання астродатчиком напрямку на зірку, так і для кластера АД при додатково заданих обмеженнях на величину похибки взаємної орієнтації астродатчиків у кластері.

При використанні цього методу результатом є інтервально задані множини приналежності, які гарантовано містять істинні значення параметрів орієнтації. Всі точкові значення із цих інтервалів рівноцінні між собою, а спроба вибору з них однієї найкращої точки призводить до отримання зміщених оцінок.

Точність інтервальної оцінки орієнтації визначається сумарною шириною інтервалів приналежності елементів відповідної матриці повороту. Показано, що порівняно з одним АД кластер АД може дати точніші інтервальні оцінки, навіть якщо незмінна взаємна орієнтація АД між собою задається неточно або взагалі невідома. При цьому якість інтервальних оцінок залежить від кута загального поля зору всіх АД, що одночасно використовуються.

Зібрані в різні моменти часу дані вимірювань всіх АД дають змогу знайти уточнені інтервальні оцінки матриць взаємної орієнтації АД між собою та використовувати їх при знаходженні орієнтації кластера АД відносно ІСК. Проте уточнення інтервальних оцінок взаємної орієнтації АД незначне і слабо впливає на точність розв'язання задачі. Основним фактором, що визначає точність, залишається число обумовленості матриць, складених із напрямків на виміряні зірки, що забезпечується вибором взаємного розташування АД у кластері близьким до взаємно ортогонального.

В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук, М.М. Сальніков

МЕТОД ТА АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОКОТОЧНОЇ ОРІЄНТАЦІЇ ТА ВЗАЄМНОЇ ПРИВ'ЯЗКИ СИСТЕМ КООРДИНАТ КЛАСТЕРА АСТРОДАТЧИКІВ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА НЕТОЧНИМИ ВИМІРЮВАННЯМИ

Розглядається задача підвищення точності визначення орієнтації космічного апарата (КА) за допомогою системи астродатчиків (АД). Запропоновано методи, що дозволяють використовувати спільне поле зору та уточнення взаємного становища астродатчиків для підвищення точності визначення орієнтації. Використання кількох астродатчиків призводить до збільшення кута між напрямками на зірки, що потрапили в поле зору цих астродатчиків, що дозволяє зменшити число обумовленості матриць, які використовуються при обчисленні параметрів орієнтації. У роботі розвивається комбінаторний метод інтервального оцінювання орієнтації КА із довільним числом астродатчиків. Для обчислення орієнтації астродатчика вирішується лінійна задача інтервального оцінювання компонентів ортогональної матриці орієнтації для досить великої кількості зірок. Кватерніон орієнтації визначається за умови приналежності відповідної йому матриці орієнтації отриманим інтервальним оцінкам. Розглядається випадок, коли апріорна оцінка взаємної прив'язки астродатчиків може мати похибку, що порівняна з похибками вимірювання кутових координат зірок або перевищує їх. При неточно заданих матрицях взаємної орієнтації астродатчиків до похибок вимірювань напрямів на зірки додаються похибки взаємних орієнтацій астродатчиків, що призводить до розширення інтервалів невизначеності правих частин системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які використовуються для визначення параметрів орієнтації. Запропоновано метод розв'язання задачі щодо уточнення взаємної прив'язки внутрішніх систем координат пари датчиків як самостійної задачі, після якої розв'язується основна задача підвищення точності орієнтації КА. В основі методу та алгоритмів розв'язання такої комплексної задачі лежать інтервальні оцінки ортогональних матриць орієнтації. Для додаткового звуження інтервалів використовують властивість ортогональності матриць орієнтації. Проведене чисельне моделювання дозволило оцінити переваги та недоліки кожного із запропонованих методів.

V.F. Gubarev, S.V. Melnychuk, N.N. Salnikov

METHOD AND ALGORITHMS FOR CALCULATING HIGH-PRECISION ORIENTATION AND MUTUAL BINDING OF COORDINATE SYSTEMS OF SPACECRAFT STAR TRACKERS CLUSTER BASED ON INACCURATE MEASUREMENTS

The problem of increasing the accuracy of determining the orientation of a spacecraft (SC) using a system of star trackers (ST) is considered. Methods are proposed that make it possible to use a joint field of view and refine the relative position of ST to improve the accuracy of orientation determination. The use of several star trackers leads to an increase in the angle between the directions to the stars into the joint field of view, which makes it possible to reduce the condition number of the matrices used in calculating the orientation parameters. The paper develops a combinatorial method for interval estimation of the SC orientation with an arbitrary number of star trackers. To calculate the ST orientation, a linear problem of interval estimation of the orthogonal orientation matrix for a sufficiently large number of stars is solved. The orientation quaternion is determined under the condition that the corresponding orientation matrix belongs to the obtained interval estimates. The case is considered when the a priori estimate of the mutual binding of star trackers can have an error comparable to or greater than the error in measuring the angular coordinates of stars. With inaccurately specified matrices of the mutual orientation of the star trackers, the errors in the mutual orientations of the STs are added to the errors of measuring the directions

to the stars, which leads to an expansion of the uncertainty intervals of the right-hand sides of the system of linear algebraic equations used to determine the orientation parameters. A method is proposed for solving the problem of refining the mutual reference of the internal coordinate systems of a pair of ST as an independent task, after which the main problem of increasing the accuracy of spacecraft orientation is solved. The developed method and algorithms for solving such a complex problem are based on interval estimates of orthogonal orientation matrices. For additional narrowing of the intervals, the property of orthogonality of orientation matrices is used. The numerical simulation carried out made it possible to evaluate the advantages and disadvantages of each of the proposed methods.

1. Woerkom V., Sonnenschein F. Spacecraft attitude measurement using the ESA starmapper. *ESA J.* 1980. **4**, N 3. P. 287–294.
2. Захаров А.И., Прохоров М.Г., Тучин М.С., Жуков А.О. Минимальные технические характеристики звездного датчика ориентации, необходимые для достижения заданной погрешности. *Астрофизический бюллетень*. 2013. **68**, № 4. С. 507–520.
3. Wahba G.A. Least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Review*. 1965. **7**, N 3. P. 409–411.
4. Liebe C.C. Accuracy performance of star trackers: a tutorial. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2002. **38**. P. 587–599.
5. Zakharov A.I., Prokhorov M.E., Tuchin M.S., Zhukov A.O. Minimum star tracker specifications required to achieve a given attitude accuracy. *Astrophys. Bull.* 2013. **68**. P. 481–493.
6. Fialho M.A.A., Mortari D. Theoretical limits of star sensor accuracy. *Sensors*. 2019. **19**. P. 53–55. <https://doi.org/10.3390/s19245355>.
7. Ефименко Н.В. Повышение точности определения ориентации космического аппарата по звездам путем совместной обработки выходной информации двух астродатчиков. *Космічна наука і технологія*. 2014. **20**, № 3. С. 22–27.
8. Губарев В.Ф., Мельничук С.В. Комбинаторный метод интервального оценивания ориентации космического аппарата по измерениям астродатчиков. *Космічна наука і технологія*. 2016. № 6 (103). С. 8–17.
9. Губарев В.Ф., Мельничук С.В. Алгоритмы гарантированного оценивания состояния линейных систем при наличии ограниченных помех. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми управління і інформатики»*. 2015. № 2. С. 26–34.
10. Ефименко Н.В. Взаимная привязка внутренних систем координат астродатчиков в задаче высокоточного определения ориентации космического аппарата. *Космічна наука і технологія*. 2013. **19**, № 6. С. 12–17.
11. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск : XYZ, 2018. 628 с. (<http://www.nsc.ru/interval>).
12. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск : Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1981.
13. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to interval analysis. Philadelphia : SIAM, 2009.
14. Farrell J.A. Aided navigation. GPS with High Rate Sensors. New York : The McGraw-Hill Companies, 2008. 553 p.
15. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Москва : Мир, 1999. 548 с.
16. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 285 с.
17. Davenport P. A vector approach to the algebra of rotations with applications. *NASA Technical Note*. D-4696. 1968.
18. Соловьев И.В. Алгоритм «ORIENT» оценки ориентации космического аппарата по астроизмерениям. *Авиакосмическое приборостроение*. 2012. № 12. С. 11–19.
19. Соловьев И.В. Алгоритмы оценки ориентации и угловой скорости космического аппарата с помощью звездного датчика. *Авиакосмическое приборостроение*. 2013. № 7. С. 10–26.

Отримано 11.01.2022