УДК 519.9

А.М. Воронін, А.С. Савченко

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Ключові слова: розподіл ресурсів, багатокритеріальна оптимізація, обмеження ресурсів, нелінійна схема компромісів.

Keywords: resource distribution, multicriteria optimization, resource constraints, nonlinear trade-off scheme.

У різних предметних областях виникає завдання розподілу ресурсів між окремими об'єктами. Розглянемо це завдання з позицій системного аналізу. У сферах управління та економіки актуальним є завдання такого розподілу ресурсів керованої системи між окремими елементами (об'єктами), при якому забезпечується найбільш ефективне функціонування системи в заданих обставинах. Проблема розподілу обмежених ресурсів — основна проблема економіки. Кажуть, що правильний розподіл і перерозподіл ресурсів — це і є економіка. Аналогічні проблеми є й у інших предметних областях. Мистецтво полягає у тому, щоб у залежності від обставин уміти правильно розподіляти обмежені ресурси.

Часто це завдання вирішується суб'єктивно, на основі досвіду та професійної кваліфікації особи, яка приймає рішення (ОПР). У найпростіших випадках такий підхід може бути виправданим. Однак при великій кількості об'єктів та у відповідальних випадках різко зростає ціна помилки управлінського рішення. Стає необхідною розробка формалізованих методів підтримки прийняття рішень для грамотного розподілу ресурсів між об'єктами з урахуванням усіх заданих обставин.

Однією з таких обставин зазвичай є обмеженість ресурсів. Найбільш поширений випадок обмеженості зверху сумарного (глобального) ресурсу системи, що підлягає розподілу між окремими об'єктами.

У практичних випадках обмеження накладаються не тільки на глобальний ресурс, а й на парціальні ресурси, що виділяються окремим об'єктам. При цьому обмеження можуть накладатися як знизу, так і зверху. Найбільш цікавим є випадок обмеженості парціальних ресурсів знизу. Цей вид обмежень трапляється у багатьох предметних областях. Так, медики та фізіологи знають, що критична маса окремих органів та тканин, достатня для підтримки життєдіяльності організму, становить для печінки 15 % від нормального обсягу, для нирок — 25 %, для еритроцитів — 35 % і для легенів — 45 %; обсяг циркулюючої плазми — 70 %. Зниження обсягів менше зазначених обмежень знизу призводить до незворотних змін в організмі.

Іншим прикладом обмежень знизу є розподіл палива між літаками при виконанні авіарейсів до різних міст. Для кожного рейсу існує нижня межа, менше якої виділяти паливо безглуздо, тому що літак просто не долетить до свого пункту призначення. У цьому полягає суть обмеження знизу для кожного парціального ресурсу. Якщо ж цей рейс одержує паливо понад відому нижню межу, то в нього з'являється можливість вільного маневрування по ешелонах, обходу грозового фронту, заходження на запасний аеродром і т.п. З іншого боку, збільшувати парціальний ресурс необмежено теж не можна, для нього існує обмеження зверху. Це зрозуміло хоча б тому, що кожен літак має певну ємність баків, більше за яку прийняти паливо на борт він фізично не може.

Такі обмеження або заздалегідь відомі, або визначаються техніко-економічними розрахунками чи методами експертних оцінок. Слід розрізняти обмеження умовні (коли порушення меж небажане) та обмеження безумовні (коли їх порушення фізично неможливе). Неважко бачити, що сума обмежень знизу для всіх парціальних ресурсів є обмеженням для глобального ресурсу знизу, а сума обмежень зверху обмежує глобальний ресурс зверху.

Враховуючи заданий комплекс обмежень, потрібно так розподілити глобальний ресурс системи між об'єктами, щоб забезпечувалася найбільш ефективна робота всієї системи в цілому. Проблема полягає у побудові адекватної цільової функції для оптимізації процесу розподілу ресурсів в умовах їхньої обмеженості. Простий рівномірний розподіл у цьому випадку не годиться, оскільки може поставити деякі об'єкти на межу неможливості їх функціонування, тоді як інші об'єкти отримають невиправдано великий ресурс.

У цій роботі на вирішення аналізованої проблеми використовується підхід багатокритеріальної оптимізації із застосуванням нелінійної схеми компромісів [1–3].

Постановка задачі

Ця проблема актуальна для різних предметних областей, тому викладемо постановку завдання у загальному вигляді. Задані глобальний ресурс R, що підлягає розподілу, а також $n \geq 2$ елементів системи (об'єктів), кожному з яких виділяється парціальний ресурс r_i, Їх сукупність становить вектор $r = \{r_i\}_{i=1}^{n}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = R. \tag{1}$$

Для кожного об'єкта відома (або визначається методом експертних оцінок) гранично допустима величина виділеного ресурсу $r_{i\min}$, менше якого даний об'єкт функціонувати не може. Таким чином, задається система обмежень знизу

$$r_i \geq r_{i\min}, \quad \sum_{i=1}^{n} r_{i\min} \leq R, \quad i \in [1, n]. \tag{2}$$

З іншого боку, для кожного з об'єктів відома величина $r_{i\max}$, перевищувати яку ресурс об'єкта неспроможний чи не повинен. Система обмежень зверху має вигляд

$$r_i \leq r_{i\max}, \quad \sum_{i=1}^{n} r_{i\max} \geq R, \quad i \in [1, n]. \tag{3}$$

З (2) та (3) випливає, що

$$r_{i\max} \geq r_i \geq r_{i\min}, \quad i \in [1, n],$$

ISSN 1028-0979

$$\sum_{i=1}^{n} r_{i\max} \geq R \geq \sum_{i=1}^{n} r_{i\min}. \tag{4}$$

Формула для області визначення вектора *r* має вигляд

$$r \in X_r = \{r \mid r_{i\max} \geq r_i \geq r_{i\min},\ i \in [1, n]\}.$$

Розглянемо полярні (вироджені) випадки нерівності (4). Якщо $R = \sum_{i=1}^{n} r_{i\min}$, то завдання, що розглядається, зводиться до такого розподілу глобального ресурсу, при якому кожен об'єкт отримує свій мінімально допустимий парціальний ресурс: $r_i{}^* = r_{i\min}$, $i \in [1, n]$.

Якщо ж глобальний ресурс дозволяє повністю задовольняти потреби об'єктів, тобто $R = \sum_{i=1}^{n} r_{i\max}$, то завдання вирішується як $r_i{}^* = r_{i\max}$, $i \in [1, n]$.

Таким чином, у полярних випадках нерівності (4) аналізована проблема має тривіальні рішення. І тільки якщо вираз (4) стає суворою нерівністю

$$\sum_{i=1}^{n} r_{i\max} > R > \sum_{i=1}^{n} r_{i\min}, \tag{5}$$

завдання оптимізації розподілу обмежених ресурсів набуває сенсу.

Завдання оптимізації передбачає наявність цільової функції $f(r)$, екстремізація якої дає вирішення задачі, що розглядається:

$$r^* = \arg \underset{r \in X_r}{\text{extr}}\ f(r).$$

Ставиться завдання: в умовах (5) визначити такі парціальні ресурси $r^* \in X_r$, при яких виконується вимога (1) і набуває екстремального значення деяка цільова функція $f(r)$, вид якої слід вибрати та обґрунтувати.

Метод вирішення

Аналіз показує, що завдання оптимізації розподілу обмежених ресурсів обмеження зверху $r_i \leq r_{i\max}$, $i \in [1, n]$, сприймається як просте оптимізаційне обмеження, наближення до якого зазвичай нічим особливим для системи не загрожує. Зовсім інший сенс має обмеження знизу $r_i \geq r_{i\min}$, $i \in [1, n]$. Наближення ресурсу до цього свого обмеження загрожує можливості функціонування відповідного об'єкта. Можна сказати, що обмеження знизу має змушувати шукану цільову функцію збільшувати різницю між парціальними ресурсами та їх обмеженнями знизу.

Тому вираз шуканої цільової функції має: 1) включати обмеження знизу в явному вигляді, 2) штрафувати систему за наближення парціальних ресурсів до цих обмежень і 3) бути диференційованим за своїми аргументами. Найпростішою цільовою функцією, що задовольняє зазначеним вимогам, є

$$f(r) = \sum_{i=1}^{n} r_{i\min}(r_i - r_{i\min})^{-1}. \tag{6}$$

Аналіз формули (6) показує, що це не що інше, як вираз скалярної згортки максимізованих часткових критеріїв $r_i,\ i\in[1,\ n],$ за нелінійною схемою компромісів (НСК) у задачі багатокритеріальної оптимізації [2].

Дійсно, у розглянутому завданні ресурси $r_i,\ i\in[1,\ n],$ мають двояку природу. З одного боку, їх можна розглядати як незалежні змінні аргументи оптимізації цільової функції $f(r)$. З іншого боку, для кожного з об’єктів логічне прагнення максимізувати свій парціальний ресурс, піти якнайдалі від небезпечного обмеження $r_{i\min}$ для підвищення ефективності свого функціонування.

З цієї точки зору ресурси $r_i \ge r_{i\min},\ i\in[1,\ n],$ можуть розглядатися як часткові критерії якості функціонування відповідних об’єктів. Ці критерії підлягають максимізації, вони обмежені знизу, невід’ємні та суперечливі (збільшення одного ресурсу можливе лише за рахунок зменшення інших).

Концепція НСК заснована на принципі «подалі від обмежень». Передбачається, що функція корисності ОПР оцінює як кращі рішення, які дають більше віддалення критеріїв від небезпечних обмежень. Скалярна згортка $f(r)$ являє собою модель функції корисності і включає в себе в явному вигляді різницю $r_i - r_{i\min}$ як характеристику напруженості ситуації прийняття рішення. Це дозволяє штрафувати критерії за наближення до своїх обмежень.

На підставі викладеного завдання векторної оптимізації розподілу обмежених ресурсів з урахуванням ізопериметричного обмеження для аргументів (1) набуває вигляду

$$r^* = \arg\min_{r\in X_r} f(r) = \arg\min_{r\in X_r} \sum_{i=1}^{n} r_{i\min}(r_i - r_{i\min})^{-1},\quad \sum_{i=1}^{n} r_i = R. \tag{7}$$

Завдання (7) можна вирішувати як аналітично, використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, так і чисельними методами, якщо аналітичне рішення виявляється скрутним. Аналітичне рішення передбачає побудову функції Лагранжа як

$$L(r,\ \lambda) = f(r) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} r_i - R\right),$$

де λ — невизначений множник Лагранжа, та вирішення системи рівнянь

$$\frac{\partial L(r,\ \lambda)}{\partial r_i} = 0,\ \ i\in[1,\ n],$$

$$\frac{\partial L(r,\ \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} r_i - R = 0.$$

Для вирішення багатокритеріальних завдань чисельними методами із застосуванням концепції НСК та з обмеженнями на аргументи та критерії розроблено алгоритми та складено комп’ютерну програму [2].

Ілюстраційний приклад

Для виконання двох далеких автобусних рейсів ($n=2$) автостанція має в своєму розпорядженні паливо загальним обсягом $R=12$ тонн (цифри умовні). Мінімальна потреба першого рейсу складає $r_1 \ge r_{1\min} = 2$ тонни, другого рейсу —

$r_2 \geq r_{2\min} = 5$ тонн. Це обмеження знизу для парціальних ресурсів. Місткість баків першого автобуса — $r_{1\max} = 7$ тонн, другого автобуса — $r_{2\max} = 10$ тонн. Це обмеження зверху.

Умова (5) як суворої нерівності (розмірності опущені)

$$r_{1\min} + r_{2\min} = 7 < R = 12 < r_{1\max} + r_{2\max} = 17$$

дотримується. Отже, завдання оптимізації розподілу обмежених ресурсів може бути поставлене і рішення буде нетривіальним.

Ставиться завдання отримати аналітичне рішення компромісно-оптимального розподілу палива між рейсами.

Будуємо функцію Лагранжа

$$L(r, \lambda) = r_{1\min}(r_1 - r_{1\min})^{-1} + r_{2\min}(r_2 - r_{2\min})^{-1} + \lambda(r_1 + r_2 - R).$$

Отримуємо систему рівнянь

$$\frac{\partial L(r, \lambda)}{\partial r_1} = -r_{1\min}(r_1 - r_{1\min})^{-2} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(r, \lambda)}{\partial r_2} = -r_{2\min}(r_2 - r_{2\min})^{-2} + \lambda = 0$$

$$r_1 + r_2 - R = 0.$$

Підставляючи числові дані

$$-2(r_1 - 2)^{-2} + \lambda = 0$$

$$-5(r_2 - 5)^{-2} + \lambda = 0$$

$$r_1 + r_2 - 12 = 0$$

і вирішуючи цю систему методом Гауса (послідовного виключення змінних), отримуємо

$$r_1{}^* = 3{,}94 \text{ тонни, } r_2{}^* = 8{,}06 \text{ тонни.}$$

Поставлене завдання вирішено у припущенні, що відносна важливість обох рейсів для ОПР однакова. Якщо ж ні, то в цільову функцію вводяться вагові коефіцієнти α_1 і α_2, що відображають індивідуальні переваги ОПР. Ці коефіцієнти повинні бути нормовані та визначені на симплексі:

$$\alpha_1, \alpha_2 \in X_\alpha = \left\{ \alpha_i \,\middle|\, \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n=2} \alpha_i = 1, \ i \in [1; 2] \right\}.$$

У тому випадку, коли глобальний ресурс розподіляється між об’єктами не безпосередньо, а через проміжні ланки, система стає ієрархічною [4]. Викладений підхід може бути використаний і в цьому випадку.

А.М. Воронін, А.С. Савченко

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

У різних предметних галузях актуальною є задача такого розподілу ресурсів керованої системи між окремими елементами (об’єктами), у якому забезпечується найефективніше функціонування системи в заданих обставинах. Розглянуто проблему розподілу заданого глобального ресурсу при обмеженнях знизу, що накладаються на парціальні ресурси. Показано, що проблема полягає в побудові адекватної цільової функції для оптимізації процесу розподілу ресурсів в умовах їхньої обмеженості. Цільова функція є скалярною згорткою вектора парціальних ресурсів. Вимоги до цільової функції: вона має штрафувати парціальні ресурси за небезпечне наближення до своїх обмежень та бути диференційованою за своїми аргументами. У даній задачі парціальні ресурси мають двояку природу. З одного боку, їх можна розглядати як незалежні змінні, аргументи оптимізації цільової функції. З іншого боку, для кожного з об'єктів логічним є прагнення максимізувати свій парціальний ресурс, піти якнайдалі від небезпечного обмеження для підвищення ефективності свого функціонування. З цієї точки зору, ресурси можуть розглядатися як часткові критерії якості функціонування відповідних об'єктів. Ці критерії підлягають максимізації, вони обмежені знизу, невід'ємні та суперечливі (збільшення одного ресурсу можливе лише за рахунок зменшення інших). Для рішення розглянутої проблеми використовується підхід багатокритеріальної оптимізації із застосуванням нелінійної схеми компромісів. Запропонований підхід рекомендується для компромісно-оптимального розподілу ресурсів у практичних задачах широкого спектру. Приведено модельний приклад.

A.N. Voronin, A.S. Savchenko

RESOURCE DISTRIBUTION PROBLEM

In various subject areas, the problem of such a distribution of the resources of a controlled system between individual elements (objects) is relevant, which ensures the most efficient functioning of the system in given circumstances. The problem of distribution of the given global resource is considered at restrictions from below, applied on partial resources. It is shown, that the problem consists in construction of adequate criterion function for optimization of process of distribution of resources in conditions of their limitation. The objective function is a scalar convolution of the partial resource vector. Requirements for the objective function: it must penalize partial resources for dangerously approaching its limits and be differentiable in its arguments. In the problem under consideration, partial resources have a dual nature. On the one hand, they can be considered as independent variables, arguments for the optimization of the objective function. On the other hand, it is logical for each of the objects to strive to maximize its partial resource, to go as far as possible from a dangerous limitation in order to increase the efficiency of its functioning. From this point of view, resources can be considered as particular criteria for the quality of the functioning of the corresponding objects. These criteria are subject to maximization, they are limited from below, non-negative and contradictory (an increase in one resource is possible only at the expense of a decrease in others). For the decision of a considered problem the approach of multicriteria optimization with use of the nonlinear trade-off scheme is undertaken. The proposed approach is recommended for a compromise-optimal allocation of resources in a wide range of practical problems. The illustrating example is given.

1. Воронин А.Н. Векторная оптимизация иерархических структур. *Проблемы управления и информатики.* 2004. № 6. С. 26–34.
2. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. Киев : Техніка, 1999. 284 с.
3. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 4. С. 106–114.
4. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах. *Автоматика и телемеханика.* 1996. № 2. С. 24–29.

Отримано 29.12.2021