

КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 517.95:419.86:539.3

В.А. Стоян, Д.І. Черній, С.Д. Волощук, А.О. Стоян

ПРО ВИРОДЖЕНИЙ ВИПАДОК ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ

Ключові слова: теорія пружності, просторові задачі, товсті пружні плити, динаміка мембрани, системи з невизначеностями, псевдорозв'язки.

Keywords: elasticity theory, spatial problems, thick elastic plates, membrane dynamics, systems with uncertainties, pseudosolutions.

Вступ

У результаті бурхливого розвитку машино-, корабле- та ракетобудування [1] постала проблема розрахунку елементів конструкцій у вигляді пружних пластин, оболонок та плит. Розв'язання цих проблем мало довгий і складний шлях [2] отримання спрощеного розв'язку та його удосконалення. Пов'язано це з проблемами побудови та дослідження математичних моделей пружно-динамічного стану зовні простих об'єктів.

Найпростішими підходами до розв'язання задач еластодинаміки плит, пластин та оболонок пропонувалося [2], досліджуючи динаміку серединної поверхні об'єкта, отримані результати розповсюджувати за товщиною на основі різних механічних моделей. Узагальненням цих моделей є побудований на класичних рівняннях теорії пружності у формі Ляме [3] та запропонований у [4], а потім розвинений у роботах [5, 6] підхід до побудови двовимірних рівнянь динаміки пружних плит скінченної товщини, які, маючи параметричну залежність від поперечної координати, точно описують тривимірне поле пружно-динамічних зміщень товстої пружної плити. Приклади використання цих рівнянь для розв'язання початково-крайових задач динаміки товстих пружних плит у прямій і оберненій постановках наведені у [7–9]. Більш простий і більш універсальний підхід до розв'язання проблем динаміки товстих пружних плит запропонований та розвинений в [10] і ґрунтується на безпосередньому інтегруванні класичних рівнянь Ляме [3]. На основі цього підходу в [11] сформульовані та успішно розв'язані тривимірні задачі динаміки довільно обмежених пружних плит при довільно заданому зовнішньо-динамічному стані їх граничних поверхонь.

Нижче розглядається окремий випадок отриманих в [11] результатів математичних досліджень динаміки пружних плит стосовно пружної мембрани (пружної плити нульової товщини). Для цього виродженого, але важливого [1] для практики випадку еластодинаміки плит скінченної товщини поставлені та розв'язані аналітично з подальшою комп'ютерною реалізацією двовимірні початково-крайові задачі без обмежень на кількість та якість початково-крайової інформації про стан мембрани. Останнє підтвердило правильність підходу, покладеного в основу математичної теорії динаміки товстих пружних плит, а також актуальність отриманих при цьому математичних результатів.

© В.А. СТОЯН, Д.І. ЧЕРНІЙ, С.Д. ВОЛОЩУК, А.О. СТОЯН, 2022

*Міжнародний науково-технічний журнал
«Проблеми керування та інформатики», 2022, № 1*

Тривимірна динаміка товстих пружних плит

У декартовій системі координат $(x_1, x_2, x_3) = \xi$ розглянемо динаміку (t — часова координата) плити, обмеженої площинами $x_3 = \pm h$ та циліндричною поверхнею $\Gamma(x_1, x_2)$ вирізаної з пружного простору щільності ρ з пружними характеристиками у формі констант Ляме λ і μ .

Будемо виходити з класичних рівнянь Ляме [3]

$$L(\partial_s)u(s) = f(s), \quad (1)$$

які описують залежність пружно-динамічних зміщень $(u_1(s), u_2(s), u_3(s))^T = u(s)$ точки $\xi \in S_0(\xi)$, де $S_0(\xi)$ — внутрішність плити, а $s = (\xi, t)$, від об'ємно розподілених силових факторів $(f_1(s), f_2(s), f_3(s))^T = f(s)$ при

$$L(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \mu(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_y\partial_x & (\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \mu(\partial_z^2 + \partial_x^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_y\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_z\partial_x & (\lambda + \mu)\partial_z\partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тут і далі $\partial_s = (\partial_\xi, \partial_t) = (\partial_{x_i} \ (i = \overline{1, 3}), \partial_t)$ — вектор частинних похідних за просторовими координатами x_i та часом t , а індекс $i = \overline{1, 3}$ в $u_i(s), f_i(s), \partial_{x_i}$ вказує на номер просторової координати, у напрямку якої визначається відповідна компонента векторів $u(s), f(s), \partial_\xi$.

Для дослідження динаміки плити, пружно-динамічна модель якої визначена рівнянням (1), доповнимо його інформацією про початково-крайовий стан плити та її гранично-торцевих поверхонь. При цьому розглянемо:

а) неперервні спостереження:

$$L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi \in S_0(\xi)}} = U_r^0(\xi) \quad (r = \overline{1, R_0}), \quad (3)$$

$$L_\rho^\pm(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s \in S_0^\pm} = U_\rho^\pm(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\pm}), \quad (4)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s \in S_0^\Gamma} = U_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}); \quad (5)$$

б) дискретні спостереження:

$$L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi = \xi_l^0 \in S_0}} = U_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}; \ l = \overline{1, L_0}), \quad (6)$$

$$L_\rho^\pm(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s = s_l^\pm \in S_0^\pm} = U_{\rho l}^\pm \quad (\rho = \overline{1, R_\pm}; \ l = \overline{1, L_\pm}), \quad (7)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s = s_l^\Gamma \in S_0^\Gamma} = U_{\rho l}^\Gamma \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}; \ l = \overline{1, L_\Gamma}). \quad (8)$$

Тут $L_r^0(\partial_t)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $L_\rho^\pm(\partial_\xi)$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}$), $L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) — задані матричні диференціальні оператори; $U_r^0(\xi)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $U_\rho^\pm(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}$), $U_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) — задані вектор-функції; U_{rl}^0 ($r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0}$), $U_{\rho l}^\pm$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}; l = \overline{1, L_\pm}$), $U_{\rho l}^\Gamma$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}; l = \overline{1, L_\Gamma}$) — значення цих функцій в точках $s_l^0 \in S_0(\xi) \times [0, T]$, $s_l^\pm \in S_0^\pm$, $s_l^\Gamma \in S_0^\Gamma$, а

$$S_0^\pm = \{s : (x_1, x_2) \in S_0(\xi), x_3 = \pm h\} \times [0, T],$$

$$S_0^\Gamma = \{s : (x_1, x_2) \in \Gamma(x_1, x_2), -h \leq x_3 \leq h\} \times [0, T].$$

Не обмежуючи кількості R_0, R_\pm, R_Γ початково-крайових умов і властивості вектор-функцій $U_r^0(\xi)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $U_\rho^\pm(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}$), $U_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), які їх визначають, розв'язок задач (1), (3)–(5) та (1), (6)–(8), як і в [10, 11], подамо співвідношенням

$$u(s) = u_\infty(s) + u^+(s) + u^-(s) + u^\Gamma(s), \quad (9)$$

складові $u_\infty(s)$, $u_0(s)$, $u^\pm(s)$, $u^\Gamma(s)$ якого визначають вплив об'ємних, початкових та гранично-поверхневих зовнішньо-динамічних збурюючих факторів, спостережуваних згідно з (3)–(5) і (6)–(8).

Вводячи до розгляду передатну функцію $G(s - s')$ співвідношеннями

$$L(\partial_s)G(s - s') = \Delta(s - s'), \quad (10)$$

$$\Delta(s - s') = \text{diag}(\delta(s - s'), i = \overline{1, 3}),$$

$$\delta(s - s') = \prod_{i=1}^3 \delta(x_i - x'_i) \delta(t - t'),$$

де $\delta(x - x')$ — δ -функція Дірака, у випадку, коли спостереження (3)–(8) мають силовий характер, знаходимо функцію

$$u_\infty(s) = \int_{S_0 \times [0, T]} G(s - s') f(s') ds', \quad (11)$$

яка визначає вплив об'ємно розподілених силових факторів $f(s)$ на динаміку плити, а також функції:

$$u_0(s) = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} G(s - s') \Big|_{t'=0} U_r^0(\xi') d\xi',$$

$$u^\pm(s) = \sum_{\rho=1}^{R_\pm} \int_{S_0^\pm} G(s - s') U_\rho^\pm(s') ds',$$

$$u^\Gamma(s) = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{S_0^\Gamma} G(s - s') U_\rho^\Gamma(s') ds',$$

$$u_0(s) = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} G(s-s') \Big|_{t'=0, \xi'=\xi_l^0} U_{rl}^0,$$

$$u^\pm(s) = \sum_{\rho=1}^{R_\pm} \sum_{l=1}^{L_\pm} G(s-s_l^\pm) U_{\rho l}^\pm,$$

$$u^\Gamma(s) = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} G(s-s_l^\Gamma) U_{\rho l}^\Gamma.$$

При цьому

$$G(s-s') = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{E(p, q, s-s')}{L(p, q)} dpdq, \quad (12)$$

де $p = (p_1, p_2, p_3)$, $dp = dp_1 dp_2 dp_3$,

$$E(p, q, s-s') = \text{diag} \left(\exp \left(\sum_{i=1}^3 p_i (x_i - x'_i) + q(t-t') \right), i = \overline{1, 3} \right).$$

У випадку, коли інформація (3)–(8) про зовнішньо-динамічні спостереження за станом плити має несиловий характер, додатково введемо вектор-функції $f_0(s)$, $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$ і вектори

$$\bar{f}_0 = \text{col}(f_{0m} = f_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{f}^\pm = \text{col}(f_m^\pm = f^\pm(s_m^\pm), m = \overline{1, M_\pm}),$$

$$\bar{f}^\Gamma = \text{col}(f_m^\Gamma = f^\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma})$$

їх значень, визначених у точках

$$(s, s_m^0) \in \bar{S}_0 = S_0 \times (-\infty, 0], \quad (s, s_m^+) \in \bar{S}_0^+ = (R^3 \setminus S_0) \times (x_3 \geq h) \times [0, T],$$

$$(s, s_m^-) \in \bar{S}_0^- = (R^3 \setminus S_0) \times (x_3 < -h) \times [0, T],$$

$$(s \in s_m^\Gamma) \in \bar{S}_0^\Gamma = (R^3 \setminus S_0) \times (-h < x_3 < h) \times [0, T]$$

так, щоб при

$$u_0(s) = \int_{S_0} G(s-s') f_0(s') ds',$$

$$u^\pm(s) = \int_{\bar{S}_0^\pm} G(s-s') f^\pm(s') ds', \quad (13)$$

$$u^\Gamma(s) = \int_{\bar{S}_0^\Gamma} G(s-s') f^\Gamma(s') ds',$$

$$u_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0) f_{0m},$$

$$u^\pm(s) = \sum_{m=1}^{M_\pm} G(s - s_m^\pm) f_m^\pm, \quad (14)$$

$$u^\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) f_m^\Gamma$$

значення функції (9) просторово розподілених динамічних зміщень точок $s \in S_0$ плити узгоджувались з наявними спостереженнями (3)–(8) за нею згідно з критеріями

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left\| L_r^0(\partial_t) u(s) \Big|_{t=0} - U_r^0(\xi) \right\|^2 d\xi + \sum_{\rho=1}^{R_+} \int_{S_0^+} \left\| L_\rho^+(\partial_\xi) u(s) \Big| - U_\rho^+(s) \right\|^2 ds + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_-} \int_{S_0^-} \left\| L_\rho^-(\partial_\xi) u(s) \Big| - U_\rho^-(s) \right\|^2 ds + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{S_0^\Gamma} \left\| L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u(s) \Big| - U_\rho^\Gamma(s) \right\|^2 ds \rightarrow \min_f, \quad (15)$$

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left\| L_r^0(\partial_t) u(\xi) \Big|_{\xi=\xi_l^0} - U_{rl}^0 \right\|^2 + \sum_{\rho=1}^{R_+} \sum_{l=1}^{L_+} \left\| L_\rho^+(\partial_\xi) u(s) \Big|_{s=s_l^+} - U_{\rho l}^+ \right\|^2 + \\ + \sum_{\rho=1}^{R_-} \sum_{l=1}^{L_-} \left\| L_\rho^-(\partial_\xi) u(s) \Big|_{s=s_l^-} - U_{\rho l}^- \right\|^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left\| L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma \right\|^2 \rightarrow \min_f, \quad (16)$$

$$\Phi_2 \rightarrow \min_{f(s)}, \quad (17)$$

в яких

$$\bar{f} = \text{col}((f_{0m}, m = \overline{1, M_0}), (f_m^+, m = \overline{1, M_+}), (f_m^-, m = \overline{1, M_-}), (f_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma}));$$

$$\bar{f}(s) = \text{col}(f_0(s), f^+(s), f^-(s), f^\Gamma(s)).$$

Останнє випливає з того, що визначена згідно з (9) з урахуванням (12)–(14) вектор-функція $u(s)$ рівняння (1) буде задовольняти при довільних \bar{f} та $\bar{f}(s)$. А це означає, що пошук розв'язку задач (1)–(8) зведеться до середньоквадратичного обернення рівнянь

$$A\bar{f} = \bar{U}, \quad (18)$$

$$\int_{(\cdot)} A(s) \bar{f}(s) ds = \bar{U}, \quad (19)$$

$$B(s) \bar{f} = \bar{U}(s), \quad (20)$$

отримуваних [12] з урахуванням спостережень (3)–(8) та визначень вектора \bar{f} і вектор-функції $\bar{f}(s)$, які їх моделюють згідно з (15)–(17).

Тривимірна модель динаміки товстої пружної плити в задачах динаміки мембрани

Не зупиняючись на розв'язках задач (18)–(20), а отже, і початково-крайових задач (1), (3)–(4) та (1), (6)–(8), які наведені в [6, 12], розглянемо за-

стосування отриманих математичних результатів для дослідження динаміки пружної мембрани, якою може бути серединна площина розглянутої вище пружної плити.

Будемо вважати, що в цьому випадку координата x_3 відсутня, $\xi = (x_1, x_2)$, $h = 0$, а рівняння (1) розглядатимемо при

$$L(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_{x_1}^2 + \mu\partial_{x_2}^2 - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & 0 \\ (\lambda + \mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} & (\lambda + 2\mu)\partial_{x_2}^2 + \mu\partial_{x_1}^2 - \rho\partial_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

якщо мембрана допускає прогини $u_3(s)$ та розтягуючі зміщення $u_1(s)$, $u_2(s)$ при дії на неї зовнішньо-динамічних силових факторів

$$\text{col}(f_1(s), f_2(s), f_3(s)) = f(s) \text{ та } f_0(\xi) = f(s)|_{r=0},$$

визначених у внутрішній області S_0 мембрани і на її двовимірному контурі $\Gamma(x_1, x_2)$.

Вектор-функцію $u(s)$ просторово-динамічних зміщень точок мембрани у цьому випадку згідно з [6] визначимо співвідношенням

$$u(s) = \int_{(\bullet)} G(s-s') \bar{f}(s') ds',$$

у якому $\bar{f}(s) = f(s) + f_0(\xi)$, $G(s-s')$ — грінівська передатна функція (12), записана з урахуванням її виродженості по поперечній координаті, а знак (\bullet) тут і далі позначає інтегрування по області визначення аргументу підінтегральної функції.

Математичне моделювання динаміки неовно спостережуваної пружної мембрани

Розглянемо динаміку досліджуваної мембрани у більш загальному випадку, коли при відомих зовнішньо-силових збуреннях $f(s)$ ($s \in S_0$) на поверхні мембрани, за її початково-крайовим станом виконуються (у загальному випадку — несилові) спостереження, які визначимо співвідношеннями

$$L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0} = U_r^0(\xi) \quad (\xi \in S_0, r = \overline{1, R_0}), \quad (22)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)|_{\xi \in \Gamma} = U_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}). \quad (23)$$

Не накладаючи жодних обмежень на кількість та якість (загалом — несилових) спостережень (22), (23) за станом мембрани, будемо моделювати їх силовими функціями

$$f^0(s), \quad (s \in S^0 = \{(\xi, t) : \xi \in S_0, t \in [-\infty, 0]\}),$$

$$f^\Gamma(s), \quad (s \in S^\Gamma = \{(\xi, t) : \xi \in R^2 \setminus S_0, t \in [0, T]\}),$$

визначеними своїми значеннями $f_m^0 = f^0(s_m^0)$, $f_m^\Gamma = f(s_m^\Gamma)$ в точках $s_m^0 \in S^0$ ($m = \overline{1, M_0}$), $s_m^\Gamma \in S^\Gamma$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$). Це означає, що розв'язок задачі (1), (21)–(23) можна записати у вигляді

$$u(s) = u_\infty(s) + u_0(s) + u_\Gamma(s), \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned}
 u_\infty(s) &= \int_{S_0} G(s-s') f(s') ds', \\
 u_0(s) &= \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0) f_m^0, \\
 u_\Gamma(s) &= \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma) f_m^\Gamma
 \end{aligned} \tag{25}$$

при $f^0 = \text{col}(f_m^0, m = \overline{1, M_0})$, $f^\Gamma = \text{col}(f_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma})$, $\bar{f} = \text{col}(f^0, f^\Gamma)$ таких, що

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left\| (L_r^0(\partial_t) u(s))|_{t=0} - U_\Gamma^0(\xi) \right\|^2 d\xi + \\
 &+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} \left\| (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u(s)) - U_\rho^\Gamma(s) \right\|^2 ds \rightarrow \min_f.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Згідно з [6, 12] розв'язок задачі (26) еквівалентний середньоквадратичному оберненню системи функціональних рівнянь

$$B(s) \bar{f} = \bar{U}(s), \tag{27}$$

де

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(s) &= \text{col}(((U_r^0(\xi) - L_r^0(\partial_t) u_\infty(s))|_{t=0}), r = \overline{1, R_0}), \\
 &((U_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u_\infty(s)), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),
 \end{aligned}$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} B_{11}(\xi) (\xi \in S_0) & B_{12}(\xi) (\xi \in S_0) \\ B_{21}(s) (s \in \Gamma \times [0, T]) & B_{22}(s) (s \in \Gamma \times [0, T]) \end{pmatrix}$$

при

$$B_{11}(\xi) = \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t) G(s-s_m^0), m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{12}(\xi) = \text{col}(\text{str}(L_r^0(\partial_t) G(s-s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$B_{21}(\xi) = \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) G(s-s_m^0), m = \overline{1, M_0}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B_{22}(\xi) = \text{col}(\text{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) G(s-s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Враховуючи, що множина $\Omega_f = \left\{ \bar{f} : \int_{(\bullet)} \|(B(s)\bar{f} - \bar{U}(s))\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{f}} \right\}$ визнача-

ється [6, 12] співвідношенням

$$\bar{f} = P^+ B_U + \bar{v} - P^+ P \bar{v}, \tag{28}$$

у якому $\bar{v} = \text{col}(v_0 \in R^{M_0}, v_\Gamma \in R^{M_\Gamma})$ — довільний вектор, тотожно рівний нулю при $\lim_{N \rightarrow \infty} \det[B^T(s_i) B(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$ для $\forall (s_i, s_j)$ з області визначення ар-

гументу матричної функції $B(s)$, $B_U = \int_{(\bullet)} B^T(s)U(s)ds$, а знаком «+» позначено

операцію псевдообернення матриці $P = \int_{(\bullet)} B^T(s)B(s)ds$, з (27) знаходимо

$$\begin{aligned} f^0 &= (Q_{11}, Q_{12})B_U + v_0 - (Q_{11}, Q_{12})P\bar{v}, \\ f^\Gamma &= (Q_{21}, Q_{22})B_U + v_\Gamma - (Q_{21}, Q_{22})P\bar{v}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{де } \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} = P^+.$$

Знайдені згідно з (29) моделюючі вектори f^0 та f^Γ співвідношеннями (24), (25) визначають розв'язок задачі (1), (26) побудови вектор-функції $u(s)$ зміщень точок досліджуваної пружної мембрани при спостереженнях (22), (23) за її початково-крайовим станом. При цьому похибка отриманого розв'язку, який точно задовольняє [12] рівнянню (1), буде визначатись величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} \Phi = \min_{f \in \Omega_f} \int_{(\bullet)} \|B(s)\bar{f} - U(s)\|^2 ds = \int_{(\bullet)} U^T(s)U(s)ds - B_U^T P_2 P_2^+ B_U$$

його узгодженості з початково-крайовими спостереженнями за станом мембрани.

Зауважимо, що, як і в [12], математична модель динаміки мембрани (1), (21) може розглядатися і при дискретно визначених початково-крайових спостереженнях за нею, які подамо у вигляді

$$L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{t=0, \xi=\xi_l^0 \in S_0} = U_{rl}^0 \quad (r = \overline{1, R_0}; l = \overline{1, L_0}), \quad (30)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = U_{\rho l}^\Gamma \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}; l = \overline{1, L_\Gamma}).$$

Розв'язком задачі (1), (21), (30) таким, що

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)u(s) \Big|_{t=0, \xi=\xi_l^0 \in S_0} - U_{rl}^0)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{u(s)} \quad (31)$$

як і вище, буде функція (24), складові $u_0(s)$ і $u_\Gamma(s)$ якої можна представити співвідношеннями (25) або у вигляді

$$u_0(s) = \int_{S^0} G(s-s')f^0(s')ds',$$

$$u_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s')f^\Gamma(s')ds',$$

де, як і вище, $f^0(s)$ та $f^\Gamma(s)$ — вектор-функції, якими згідно з (31) моделюються початково-крайові спостереження (30). Визначення останніх зведеться до розв'язання (середньоквадратичного обернення) системи інтегральних рівнянь

$$\int_{(\bullet)} A(s)f'(s)ds = \bar{U}, \quad (32)$$

в яких

$$\begin{aligned}\bar{f}(s) &= \text{col}((f^0(s), s \in S^0), (f^\Gamma(s), s \in S^\Gamma)), \\ \bar{U} &= \text{col}(((U_{rl}^0, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), ((U_{\rho l}^\Gamma, l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma})), \\ A(s) &= \begin{pmatrix} (A_{11}(s), s \in S^0) & (A_{12}(s), s \in S^\Gamma) \\ (A_{21}(s), s \in S^0) & (A_{22}(s), s \in S^\Gamma) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

при

$$\begin{aligned}A_{1i}(s') &= \text{col}((L_r^0(\partial_t) G(s-s') Z) \Big|_{t=0, \xi=\xi_t^0 \in S_0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}), \\ A_{2i}(s') &= \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) G(s-s')) \Big|_{s=s_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma})\end{aligned}$$

(тут $s' \in S^0$ при $i=1$ і $s' \in S^\Gamma$ при $i=2$).

Розв'язком (31), таким що

$$\left\| \int_{(\bullet)} A(s) \bar{f}(s) ds - \bar{U} \right\|_{f(s)}^2 \rightarrow \min,$$

буде [12]

$$\bar{f}(s) = A^T(s) P_1^+ \bar{U} + \bar{v}(s) - A^T(s) P_1^+ A_v, \quad (33)$$

де $\bar{v}(s) = \text{col}((v^0(s), s \in S^0), (v^\Gamma(s), s \in S^\Gamma))$ — довільна вектор-функція, тотожно рівна нулю при $\det P_1 > 0$, а

$$\begin{aligned}P_1 &= \int_{(\bullet)} A(s) A^T(s) ds, \\ A_v &= \int_{(\bullet)} A(s) \bar{v}(s) ds.\end{aligned}$$

З (32) знаходимо

$$\begin{aligned}f^0(s) &= (A_{11}^T(s), A_{21}^T(s)) P_1^+ (\bar{U} - A_v) + v^0(s), \\ f^\Gamma(s) &= (A_{12}^T(s), A_{22}^T(s)) P_1^+ (\bar{U} - A_v) + v^\Gamma(s),\end{aligned}$$

враховуючи (25) і вектор-функцію (24) пружно-динамічних зміщень $u(s)$. При цьому

$$\min_{u(s)} \Phi_1 = \min_{\bar{f}} \left\| \int_{(\bullet)} A(s) \bar{f}(s) ds - \bar{U} \right\|^2 = \bar{U}^T \bar{U} - \bar{U}^T P_1^+ \bar{U}.$$

У випадку, коли початково-крайові спостереження (30) моделюються значеннями $f_m^0 (m = \overline{1, M_0})$, $f_m^\Gamma (m = \overline{1, M_\Gamma})$ функцій $f^0(s)$, $f^\Gamma(s)$ у точках $s_m^0 \in S^0$, $s_m^\Gamma \in S^\Gamma$, пошук моделюючих згідно з (31) векторів

$$\begin{aligned}\bar{f}^0 &= \text{col}(f_m^0, m = \overline{1, M_0}), \\ \bar{f}^\Gamma &= \text{col}(f_m^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma})\end{aligned}$$

зведеться до розв'язання (середньоквадратичного обернення) системи алгебраїчних рівнянь

$$A\bar{f} = \bar{U}, \quad (34)$$

де в доповнення до визначених вище \bar{f} і \bar{U}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

при

$$A_{11} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)) \Big|_{t=0, \xi=\xi_t^0}, m = \overline{1, M_0}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{12} = \text{col}((\text{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)) \Big|_{t=0, \xi=\xi_t^0}, m = \overline{1, M_\Gamma}, l = \overline{1, L_0}, r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s_m^0)) \Big|_{s=s_t^\Gamma}, m = \overline{1, M_0}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \text{col}((\text{str}(L_p^\Gamma(\partial_\xi)G(s-s_m^\Gamma)) \Big|_{s=s_t^\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Враховуючи, що розв'язком (33) таким, що $\|A\bar{f} - \bar{U}\| \rightarrow \min_{\bar{f}}$, буде

$f' = A^T(AA^T)^+ \bar{U} + \bar{v} - A^T(AA^T)^+ A\bar{v}$, або, що еквівалентно,

$$\bar{f}^0 = (A_{11}^T A_{21}^T)(AA^T)^+ (\bar{U} - A\bar{v}) + \bar{v}_0,$$

$$\bar{f}^\Gamma = (A_{12}^T A_{22}^T)(AA^T)^+ (\bar{U} - A\bar{v}) + \bar{v}_\Gamma$$

при довільному $(M_0 + M_\Gamma)$ -вимірному векторі $\bar{v} = \text{col}(\bar{v}_0, \bar{v}_\Gamma)$, рівному нулю, якщо $\det A^T A > 0$, співвідношеннями (25) визначимо складові $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ вектор-функції $u(s)$, а співвідношенням (24) — і саму функцію. Точність розв'язання розглядуваної задачі у цьому випадку визначатиметься величиною

$$\min_{u(s)} \Phi_1 = \min_{\bar{f}} \|A\bar{f} - \bar{U}\|^2 = \bar{U}^T \bar{U} - \bar{U}^T P P^+ \bar{U},$$

де $P = AA^T$.

Задачі динамічного розтягу та поперечних динамічних коливань пружної мембрани

Побудований вище тривимірний розв'язок задачі динаміки пружної мембрани спроститься у двох окремих випадках, що мають самостійне значення:

- пружний розтяг мембрани, який характеризується зсувами $u_1(s)$, $u_2(s)$ у напрямку координатних осей Ox_1 , Ox_2 , викликаних пружнодинамічними зусиллями $f_1(s)$, $f_2(s)$;

- поперечні динамічні коливання, які характеризуються зміщеннями $u_3(s)$, котрі спричиняються зовнішньо-динамічними силовими факторами $f_3(s)$.

У цих випадках оператор $L(\partial_s)$ у рівнянні (1) спрощується і визначається співвідношеннями

$$L(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_{x_1}^2 + \mu\partial_{x_2}^2 - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_{x_1}\partial_{x_2} \\ (\lambda + \mu)\partial_{x_2}\partial_{x_1} & (\lambda + 2\mu)\partial_{x_2}^2 + \mu\partial_{x_1}^2 - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix},$$

$$L(\partial_s) = \mu(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - \rho\partial_t^2$$

для задач чистого розтягу і чистих поперечних коливань мембрани відповідно.

При постановці початково-крайових задач для цих частинних випадків у початково-крайових спостереженнях за станом мембрани будуть відсутні:

1) складові $f_3(s)$ і $u_3(s)$ вектор-функцій $f(s)$ та $u(s)$ для задачі пружного розтягу мембрани розтягуючими силами $f_1(s)$, $f_2(s)$;

2) складові $f_1(s)$, $f_2(s)$ і $u_1(s)$, $u_2(s)$ у визначенні вектор-функцій $f(s)$ та $u(s)$ в задачі поперечних пружно-динамічних прогинів мембрани, викликаних поперечними зовнішньо-динамічними зусиллями $f_3(s)$.

Останнє викличе зміни у визначенні правих частин матриці A і матричних функцій $A(s)$, $B(s)$ у рівняннях (27), (32), (34), а також спростить розрахункові формули для побудови передатної функції $G(s-s')$ і функції поперечних динамічних прогинів $u(s)$.

Комп'ютерне моделювання поперечних динамічних коливань пружної мембрани

Розглянемо комп'ютерну реалізацію розв'язку однієї з двох розглянутих вище важливих для практики задач — поперечних динамічних коливань прямокутної пружної мембрани

$$S_0 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 2X_1, 0 \leq x_2 \leq 2X_2\}.$$

Поперечні зміщення її точок у цьому випадку визначатимуться рівнянням (1), в якому $s = (\xi, t) = (x_1, x_2, t)$, $u(s) \equiv u_3(s)$, $f(s) = f_3(s)$, а

$$L(\partial_s) = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) - c^2\partial_t^2 \quad (35)$$

при заданому c^2 .

При побудові функції $G(s-s')$ для такої мембрани будемо виходити з рівняння (10), розв'язком якого при $L(\partial_s)$, визначеному в (35), буде

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{i(p_1(x_1-x'_1)+p_2(x_2-x'_2)+q(t-t'))}}{p_1^2 + p_2^2 - cq^2} dp_1 dp_2 dq.$$

Звідси після інтегрування з використанням теорії інтегральних лишків та з урахуванням фізичних властивостей грінівської функції як передатної для досліджуваної мембрани знаходимо [14]

$$G(s-s') = \frac{H\left(t' + \frac{|\xi - \xi'|}{c} - t\right)}{|\xi - \xi'|}, \quad (36)$$

де $H(\bullet)$ — функція Хевісайда.

З урахуванням (36) побудуємо функцію $u(s)$ стану досліджуваної мембрани з такими спостереженнями:

$$u(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ s=\xi_l^0 \in S_0}} = U_l^0 \quad (l = \overline{1, L_0});$$

$$u(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]} = U_l^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}). \quad (37)$$

Для формування спостережень (37) при комп'ютерній реалізації розв'язку задачі (1), (35)–(37) вважалося, що динаміка досліджуваної мембрани описується функцією

$$u(s) = 10(\cos(0, 2x_1) + \cos(0, 2x_2) - 1) + \sin t, \quad (38)$$

якій відповідає зовнішньо-динамічне збурення $f(s) = L(\partial_s)u(s)$. Це дозволило отримати значення U_l^0 ($l = \overline{1, L_0}$) та U_l^Γ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$) у завчасно вибраних точках $\xi_l^0 \in S_0$ ($l = \overline{1, L_0}$), $\xi_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]$ ($l = \overline{1, L_\Gamma}$).

Нижче (рис. 1) наведено графік розв'язку [14] задачі (1), (36)–(38) та початково-крайові спостереження (37) за мембраною при $t = 1$, на базі яких отримано цей розв'язок.

При розрахунках вважалося, що динаміка системи (1) дискретно спостерігається в точках $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(-4, 3, 0)$, $(5, -4, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(0, -5, 3)$, $(-5, -5, 7)$, а рівень шуму спостережень становить 0,001. Для оцінки точності розв'язку проведено порівняння побудованої функції зі спостереженнями (38) за нею.

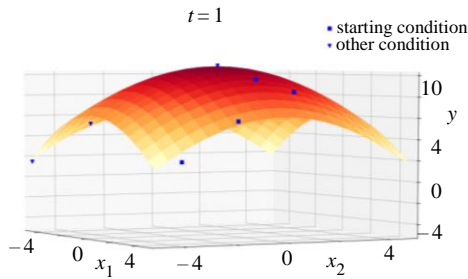


Рис. 1

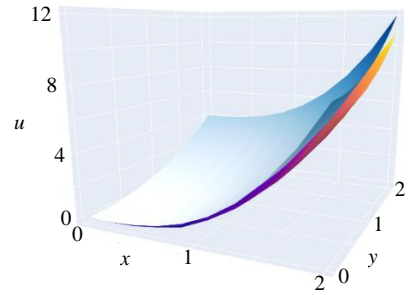


Рис. 2

Аналогічно розв'язувалась і початково-крайова задача динаміки мембрани для випадку, коли початково-крайові спостереження за нею задані неперервно.

На рис. 2 представлені результати математичного моделювання хвильового процесу, котрий, як і динаміка досліджуваної вище мембрани, в просторово-часовій області $S_0^\Gamma = \{(x_1, x_2, t) : 0 \leq (x_1, x_2) \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$ описується співвідношеннями (1), (35). Вважалося, що спостереження за процесом визначаються співвідношеннями (22), (23) при $R_0 = R_\Gamma = 1$, $L_1^0(\partial_t) = 100\partial_t^2 + 17_t$, $L_1^\Gamma(\partial_x) = 100\partial_{x_1}^2 + 17\partial_{x_2}^2$ та $u(s) = x_1^2 + x_2^3 + t^3$. Значення моделюючих векторів f_0 і f_Γ визначались в точках $s_m^0 \in \{(1, 1, -4); (0, 2, 1, 5, -100); (1, 4, 0, 7, -1)\}$, $s_m^\Gamma \in \{(10, 100, 4); (20, 3, 1, 5); (7, 17, 100)\}$. Наведений результат (а це вихідна і змодельована функції $u(s)$) відповідає значенню $t = 0,3$.

Висновок

Таким чином, розв'язана складна задача побудови тривимірного поля пружно-динамічних зміщень пружної мембрани без обмежень на її контурну межу.

В основу досліджень покладено математичні результати, отримані авторами раніше при вивченні тривимірної динаміки товстих пружних плит на базі відомих рівнянь Ляме.

Вважається, що поверхня мембрани знаходиться під дією зовнішньо-динамічних силових впливів, а за її початково-крайовим станом є спостереження, довільні за своїм (не завжди силовим) механічним змістом, а їх кількості недостатньо для математично коректної постановки початково-крайової задачі. Запропоновані та реалізовані алгоритми силового середньоквадратичного моделювання зовнішньо-динамічних спостережень за станом мембрани для випадків, коли вони задані неперервно або дискретно. Це дозволило побудувати тривимірне поле пружних поперечно-поздовжніх механічних коливань мембрани, яке за умови точної узгодженості з диференціальною математичною моделлю динаміки за середньоквадратичним критерієм узгоджується з інформацією про її початково-крайовий стан. Побудовано оцінки точності отриманих розв'язків розглядуваних задач та записано умови їх однозначності.

Розглянуто та розв'язано дві частинні задачі динаміки пружної мембрани, які однак, мають самостійне практичне застосування — задачі поздовжніх та поперечних пружно-динамічних коливань мембрани. Отриманий розв'язок останньої з них, будучи реалізованим чисельно, підтвердив правильність запропонованого у роботі підходу до розв'язання розглядуваних проблем.

V.A. Stoyan, D.I. Cherniy, S.D. Voloshchuk, A.O. Stoian

ПРО ВИРОДЖЕНИЙ ВИПАДОК ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ

Розв'язано тривимірну задачу динаміки пружної мембрани довільного граничного контуру із заданим поверхнево розподіленим зовнішньо-силовим впливом на неї. Тривимірне поле пружних динамічних зміщень точок мембрани описується диференціальною моделлю, яка є виродженим випадком раніше побудованих рівнянь просторової теорії пружності стосовно товстих пружних плит. Припускається, що останні доповнені інформацією про початково-граничний стан мембрани, яка у загальному випадку має не силовий характер, а її кількості недостатньо для математично коректної постановки початково-крайової задачі. Розв'язання цих неповно визначених початково-крайових задач динаміки мембрани стало можливим після математичного моделювання наявних просторово-динамічних спостережень за початковим станом та поточною динамікою її контуру системою дискретно і неперервно визначених моделюючих функцій. Побудоване в роботі поле пружно-динамічних зміщень точок мембрани, будучи точним розв'язком її диференціальної математичної моделі, з наявною інформацією про початково-граничний стан останньої узгоджується за середньоквадратичним критерієм. У роботі оцінено точність такого моделювання та сформульовано умови його однозначності. Розглянуто випадки чисто поперечних та чисто площинних коливань мембрани. Чисельна реалізація отриманого розв'язку розглядуваних задач, виконана навіть при мінімальній кількості спостережень за станом мембрани, підтверджує простоту і правильність підходу до вивчення цих математично складних задач еластодинаміки товстих пружних плит.

V.A. Stoyan, D.I. Cherniy, S.D. Voloshchuk, A.O. Stoian

ON DEGENERATE CASE OF THREE-DIMENTIONAL PROBLEM OF THICK ELASTIC PLATES' DYNAMICS

The three-dimensional problem of elastic membrane dynamics of arbitrary boundary outline with a given superficially distributed external force effect on it, is solved. The three-dimensional field of elastic dynamic displacements of membrane points is de-

scribed by a differential model, which is a degenerate case of the previously constructed equations of the spatial theory of elasticity concerning thick elastic plates. It is assumed that the latter are supplemented with the information on the initial-boundary condition of the membrane, which in the general case is not of a force nature, and its amount is not sufficient for a mathematically correct formulation of the initial-boundary value problem. The solution of these incompletely defined initial-boundary problems of membrane dynamics became possible after root-mean square mathematical modeling of existing spatial-dynamic observations for the initial condition and current dynamics of its outline by a system of discretely and continuously defined modeling functions. The field of elastic-dynamic displacements of membrane points constructed in the work, being an accurate solution of its differential mathematical model, with the available information on the initial-boundary condition of the latter, is consistent with the root-mean square criterion. Estimations of the accuracy of such modeling are made and conditions for its uniqueness are formulated in the paper. Cases of purely transverse and purely planar oscillations of the membrane are considered. The numerical realization of the obtained considered problems' solution is conducted even with a minimum number of observations for the membrane's condition confirms the simplicity and correctness of the approach to these mathematically complex problems' research of elastic-dynamics of thick elastic plates.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М. : Физматгиз, 1963. 217 с.
2. Немиш Ю.Н., Хома Ю.И. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор). *Прикладная механика*. 1991. **27**, № 11. С. 3–27.
3. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М. : Гостехиздат, 1955. 492 с.
4. Стоян В.А. Об алгоритме построения полутрехмерных дифференциальных уравнений эластодинамических толстых плит. *Прикладная механика*. 1976. **12**, № 7. С. 39–44.
5. Стоян В.А. Про напівтривимірні рівняння осесиметричної задачі еластодинаміки товстих плит. *Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех.* 1973. № 15. С. 47–53.
6. Стоян В.А. Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит: Монографія. К. : ВПЦ «Київський університет», 2016. 277 с.
7. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 6. С. 58–73.
8. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Часть I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 3. С. 70–96.
9. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. Часть II. Управление при дискретно заданном желаемом состоянии. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. № 2. С. 117–133.
10. Стоян В.А. О трехмерных интегральных математических моделях динамики толстых упругих плит. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 2. С. 68–77.
11. Стоян В.А., Волощук С.Д. О трехмерных задачах динамики толстых упругих плит. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2021. № 3. С. 34–49.
12. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем: Монографія. К. : ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
13. Стоян В.А. Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем. К. : ВПЦ «Київський університет», 2019. 318 с.
14. Стоян В.А. Лабораторне моделювання просторово розподілених динамічних систем: К. : ВПЦ «Київський університет», 2021. 202 с.

Отримано 26.01.2022