УДК 517.9

Г.Ц. Чикрій, В.М. Кузьменко

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗБЛИЖЕННЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ

Ключові слова: диференціальна гра, умова Понтрягіна, інтеграл Ауманна, запізнення інформації, функція розтягування часу, геометрична різниця множин, селектор багатозначного відображення.

Keywords: differential game, Pontryagin's condition, Aumann' integral, information delay, function of time dilation, geometric difference of sets, selection of set-valued mapping.

Вступ

У теорії диференціальних ігор існує низка ефективних методів прийняття рішень в умовах конфлікту та невизначеності, які беруть початок в роботах Р. Айзекса [1], Л.С. Понтрягіна [2], М.М. Красовського [3], Л.В. Берковиця [4], О. Хайека [5], Б.М. Пшеничного [6] та їх учнів. Різні застосування ігрових методів до вирішення прикладних проблем містяться в [7].

При застосуванні першого прямого методу Понтрягіна [2], одного з найефективніших та простих за своєю структурою методів теорії диференціальних ігор, ключовою є умова Понтрягіна — умова переваги переслідувача над втікачем в ресурсах керування. Для широкого кола задач, зокрема для протидіючих сторін, динаміка яких описується рівняннями з різною інерційністю або коливними системами, в задачах про м'яку зустріч ця умова не виконується на певних інтервалах часу [8, 9]. Результатом глибокого вивчення цієї умови [10] була її модифікація [11], що передбачає можливість побудови керування переслідувача по керуванню втікача в минулому.

Встановлення зв'язку цієї модифікації з переходом до гри зі змінним запізненням інформації [12] стимулювало розвиток нового підходу, пов'язаного з «розтягуванням часу», який дозволяє забезпечити виконання певного аналогу умови Понтрягіна та привести траєкторію процесу на задану термінальну множину дещо пізніше [13, 14]. Проте ціль — закінчення гри за скінченний час — досягається.

Зміст цього підходу полягає у штучному погіршенні інформаційних можливостей переслідувача, а саме, в переході від вихідної гри з повною інформацією до гри з тією ж динамікою і тією ж термінальною множиною, але з запізненням інформації, яке зменшується в процесі наближення траєкторії гри до термінальної множини та перетворюється в нуль при попаданні на неї. Далі одержана гра з запізненням інформації аналізується на основі її еквівалентності грі з повною інформацією [15], для якої умова Понтрягіна вже містить функцію розтягування часу. Вводиться числова функцію $I(t)$, яка за змістом є функцією розтягування часу. Схему ігрового підходу, в якому модифікована умова Понтрягіна використовує функцію $I(t)$, називають принципом розтягування часу. Його використання дозволило провести повний аналіз задачі про м'яку зустріч диференційних систем другого порядку, що описують динаміку згідно з другим законом Ньютона за наявності тертя [14].

Отримані достатні умови на параметри гри, які забезпечують переслідувачу можливість здійснення за скінченний час м'якої зустрічі об'єктів. Окремо встановлено умови на початкові стани об'єктів, при яких переслідування здійснюється строго вздовж сліду втікача. Аналогічні результати отримані для задачі про м'яку зустріч керованих коливних систем другого порядку, що описують динаміку математичного маятника, затухаючих коливань та різнотипних об'єктів [14–16]. Задача про зустріч коливних систем загального вигляду розглядалася в [17].

Зауважимо, що принцип розтягування часу працює і у випадку динамічної гри загального вигляду [15, 16], яка охоплює широке коло конфліктно-керованих процесів, а саме процесів, динаміка яких задається системами звичайних диференціальних, диференціально-різницевих, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та системами з дробовими похідними.

У даній роботі розглянуто задачу зближення двох коливних систем, що описують динаміку математичних маятників. Для досліджуваної задачі запропоновано адекватну функцію розтягування часу та виводяться прості умови на параметри систем, що забезпечують переслідувачу можливість зустрічі з втікачем у визначений скінченний момент за довільних початкових умов. Також наведено формули, що описують спосіб побудови керування переслідувача по керуванню супротивника у минулому.

Наведено розв'язок задачі для коливних систем у двовимірному просторі у припущенні, що керування втікача є сталим. Наведені приклади побудованих керувань переслідувача та траєкторій переслідувача та втікача для трьох різних початкових умов.

Принцип розтягування часу в лінійних диференціальних іграх

Нехай динаміка конфліктно-керованого процесу описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = Az - u + v, \tag{1}$$

де z — вектор n-мірного евклідового простору R^n, A — квадратна матриця порядку n; u та v — керування переслідувача та втікача, що вибираються в кожний момент часу з множин U та V відповідно, $U \in K(R^n)$, $V \in K(R^n)$, де $K(R^n)$ — сукупність всіх компактів з простору R^n. При цьому реалізації цих керувань у часі повинні бути вимірними функціями. Такі керування назвемо допустимими.

Задано початковий стан системи $z(0) = z_0$. Гра розглядається з точки зору переслідувача, метою якого є приведення у скінченний момент часу траєкторії системи (1) на термінальну множину $M_0, M_0 \subset R^n$, при довільному допустимому керуванні втікача. Припустимо, що множина M_0 є лінійним підпростором в R^n. Позначимо π оператор ортогонального проектування з R^n на L, де L — ортогональне доповнення до M_0 в R^n. Тоді вихід траєкторії гри на множину M_0 в момент T еквівалентний співвідношенню $\pi z(T) = 0$.

 ISSN 1028-0979

Переслідувач для досягнення цілі використовує контрстратегії, тобто у кожний момент часу будує своє керування на основі знання миттєвого керування супротивника.

Перший прямий метод Понтрягіна, як і інші прямі методи переслідування з повною інформацією, передбачає, що в процесі гри переслідувач обирає своє керування з огляду на повну інформацію про поточне керування втікача, і базується на умові Понтрягіна, яка відображає перевагу переслідувача над втікачем в ресурсах керування. У подальшому використовується операція геометричної різниці Мінковського [2].

Визначення 1. Нехай X і Y — непорожні множини з R^n. Геометрична різниця множин визначається формулою

$$X \underline{*} Y = \{z : z + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y), \ \ X \in R^n, \ \ Y \in R^n.$$

Умова 1 (Понтрягіна [2])

$$\pi e^{tA} U \underline{*} \pi e^{tA} V \neq \varnothing \quad \forall t \geq 0.$$

Якщо ця умова не виконується на певному проміжку часу, то пропонується її модифікація, яка передбачає, що переслідувач в процесі гри будує своє керування з огляду не на поточне керування втікача, а на його керування у минулому, так ніби інформація про керування втікача надходить до нього зі змінним у часі запізненням.

Визначення 2. Функцією розтягування часу будемо називати невід'ємну монотонно зростаючу кусково-неперервну функцію $I(t), \ t \in [0, +\infty), \ I(0) = 0,$ $I(t) > t, \ t > 0,$ яка може мати зліченну кількість розривів першого роду, абсолютно неперервну на інтервалах своєї неперервності, та таку, що $\dot{I}(t) > 0,$ $t \in [0, +\infty) \setminus \Delta, \ \sup\limits_{t \in [0, +\infty) \setminus \Delta} \dot{I}(t) < +\infty,$ де Δ — множина точок розриву та недиференційованості $I(t).$

Умова 2. Існує абсолютно неперервна функція розтягування часу $I(t),$ така що багатозначне відображення

$$W_1(t) = \pi e^{tA} U \underline{*} \dot{I}(t) \pi e^{I(t)A} V \tag{2}$$

має непорожні образи при $t, \ t \in [0, +\infty).$

У подальшому буде використано поняття інтегралу Ауманна від багатозначного відображення [18].

Визначення 3. Нехай $F(t)$ — багатозначне відображення, $F : [t_0, T] \to$ $\to P(R^n),$ де $P(R^n)$ — сукупність всіх замкнених множин з простору $R^n.$ Об'єднання, взяте по всіх вимірним вибірках $f(t), \ f(t) \in F(t):$

$$\bigcup_{f(\cdot) \in F(\cdot)} \int_{t_0}^{T} f(t)\, dt,$$

називають інтегралом Ауманна від багатозначного відображення $F(t)$ і позначають $\int_{t_0}^{T} F(t)\, dt.$

Теорема. Нехай для диференціальної гри (1) з термінальною множиною M_0 — лінійним підпростором, виконана умова 2 та для заданого початкового стану z_0 існує скінченний момент часу

$$t_1 = t_1(z_0) = \min\left\{ t \geq 0 : \pi\left(e^{I(t)A} z_0 + \int\limits_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A} U d\theta \right) \cap \int\limits_0^t W_1(\theta)\, d\theta \neq \varnothing \right\}. \qquad (3)$$

Тоді з початкового стану z_0 гра може бути завершена в момент часу $I(t_1)$ при будь-яких допустимих керуваннях втікача.

У силу непорожності перетину у визначенні часу t_1 (3) та непорожності образів багатозначного відображення $W_1(\theta)$ (умова 2) існують допустиме керування $u^{\tau_0}(\theta)$, $\theta \in [0, \tau_0)$, $\tau_0 = I(t_1) - t_1$ та вимірний селектор $\omega_1(\theta)$, $\omega_1(\theta) \in W_1(\theta)$, $0 \leq \theta \leq t_1$, багатозначного відображення $W_1(\theta)$ такі, що виконується рівність

$$\pi\left(e^{I(t_1)A} z_0 + \int\limits_0^{I(t_1)-t_1} e^{(I(t_1)-\theta)A} u^{\tau_0}(\theta)\, d\theta \right) = \int\limits_0^{t_1} \omega_1(\theta)\, d\theta. \qquad (4)$$

Поділимо інтервал часу $[0, I(t_1)]$ на дві частини: пів інтервал $[0, \tau_0)$ та відрізок часу $[\tau_0, I(t_1)]$.

Пропонується спосіб керування переслідувача на проміжках часу $[0, \tau_0)$ та $[\tau_0, I(t_1)]$. На пів інтервалі часу $[0, \tau_0)$ керування переслідувача покладаємо рівним $u^{\tau_0}(\theta)$, $\theta \in [0, \tau_0)$, а на відрізку часу $[\tau_0, \tau_0 + t_1]$ керування переслідувача будується у вигляді вимірного розв'язку рівняння

$$\pi e^{(t_1-\theta)A} u(\tau_0 + \theta) =$$

$$= \dot{I}(t_1 - \theta)\, \pi e^{I(t_1-\theta)A} v(I(t_1) - I(t_1 - \theta)) + \omega_1(t_1 - \theta), \quad \theta \in [0, t_1], \qquad (5)$$

існування якого забезпечує теорема Філіпова–Кастена про вимірний вибір [19].

Отже, починаючи з моменту часу τ_0, тобто в кожний поточний момент часу $\tau_0 + \theta$, $0 \leq \theta \leq t_1$, переслідувач будує своє керування з огляду на керування втікача в момент часу $I(t_1) - I(t_1 - \theta)$. Оскільки $I(t_1) = \tau_0 + t_1$, то момент часу $I(t_1) - I(t_1 - \theta)$ може бути представлений у вигляді

$$I(t_1) - I(t_1 - \theta) = \tau_0 + t_1 - I(t_1 - \theta) = \tau_0 + \theta - (I(t_1 - \theta) - (t_1 - \theta)).$$

Звідси робимо висновок, що, починаючи з моменту часу τ_0, переслідувач обирає своє керування по керуванню втікача в минулому, так ніби інформація про поточне керування втікача приходить до нього із запізненням у часі $\tau(\tau_0 + \theta)$. Застосувавши описане вище керування на проміжку часу $[0, I(t_1))$, переслідувач у момент $I(t_1)$ виведе траєкторію системи (1) на термінальну множину M_0.

Зближення за геометричними координатами коливних систем

Нехай рух об'єктів описується системами другого порядку:

$$\ddot{x} + \alpha_1^2 x = \rho u, \quad x \in R^n, \quad \|u\| \leq 1, \; x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \qquad (6)$$

 ISSN 1028-0979

$$\ddot{y}+\alpha_2{}^2 x=\sigma v, \quad y\in R^n, \quad \|v\|\le 1, \; y(0)=y_0, \quad \dot{y}(0)=\dot{y}_0. \tag{7}$$

Тут x, y — геометричні координати відповідно переслідувача та втікача, $x_0 \ne y_0$, u та v — їх керування, параметри α_1, α_2 визначають частоту коливань, ρ, σ — силові коефіцієнти, $\alpha_1, \alpha_2, \rho, \sigma > 0$. Розглядається випадок, коли

$$\alpha_1 > \alpha_2. \tag{8}$$

Мета переслідувача — у деякий момент часу t досягти збігу геометричних координат, тобто $x(t)=y(t)$, при довільних допустимих керуваннях втікача.

За допомогою стандартної заміни змінних

$$x_1 = x, \quad x_2=\dot{x}, \quad y_1 = y, \quad y_2=\dot{y}$$

переходимо до системи першого порядку для змінної $z=(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $z\in R^{4n}$, з початковою умовою $z(0)=(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$. При цьому термінальною множиною стає лінійний підпростір в R^{4n} :

$$M=\{z=(x_1, x_2, y_1, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^n : x_1 = y_1\}.$$

Динаміка змінної стану $z(t)$ в R^{4n} описується системою рівнянь вигляду (1), де

$$A=\begin{pmatrix} O & E & O & O \\ -\alpha_1{}^2 E & O & O & O \\ O & O & O & E \\ O & O & -\alpha_2{}^2 E & O \end{pmatrix},$$

а множини керувань такі:

$$U=(O \quad S \quad O \quad O)^{\mathrm{T}}, \; V=(O \quad O \quad O \quad S)^{\mathrm{T}},$$

E і O — відповідно одинична і нульова n-мірні матриці, S — n-мірна куля одиничного радіуса.

Ортогональне доповнення до M_0 в R^{4n} є підпростір простору R^{4n}:

$$L=\{(x_1, x_2, y_1, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^n : x_1=-y_1, x_2=0, y_2=0\},$$

а оператор ортогонального проектування з R^{4n} на L визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}E & O & \frac{\sqrt{2}}{2}E & O \end{pmatrix}.$$

В момент t геометричні координт співпадуть, якщо виконана умова $\pi z(t)=0.$

Фундаментальна матриця e^{tA} об’єднаної системи є такою:

$$e^{tA}=\begin{pmatrix} e^{tA_1} & O \\ O & e^{tA_2} \end{pmatrix},$$

де

$$e^{tA_i}=\begin{pmatrix} \cos\alpha_i t\, E & \dfrac{\sin\alpha_i t}{\alpha_i}E \\ -\dfrac{1}{\alpha_i}\sin\alpha_i t\, E & \cos\alpha_i t\, E \end{pmatrix}, \; i=1, 2. \tag{9}$$

Тоді умова Понтрягіна (умова 1) набуває вигляду

$$W(t)=\frac{\rho}{\alpha_1}\left|\sin\alpha_1 t\right|S \overset{*}{-} \frac{\sigma}{\alpha_2}\left|\sin\alpha_2 t\right|S\neq\varnothing \quad \forall t\geq 0.$$

Вона виконується тоді й тільки тоді, коли на всій напівосі $[0,+\infty)$ виконується нерівність

$$\frac{\rho}{\alpha_1}\left|\sin\alpha_1 t\right|-\frac{\sigma}{\alpha_2}\left|\sin\alpha_2 t\right|\geq 0.$$

Якщо $\alpha_1\neq\alpha_2$, то це — нерівність, а отже, умова Понтрягіна не виконується.

Застосуємо принцип розтягування часу. Умова 2 у даному випадку має вигляд

$$W_1(t)=\frac{\rho}{\alpha_1}\left|\sin\alpha_1 t\right|S_0 \overset{*}{-} \frac{\sigma}{\alpha_2}\dot{I}(t)\left|\sin\alpha_2 I(t)\right|S_0\neq\varnothing \quad \forall t\geq 0.$$

Вона зводиться до співвідношення, яке має виконуватись при всіх $t\in[0,+\infty)$:

$$\frac{\rho}{\alpha_1}\left|\sin\alpha_1 t\right|-\frac{\sigma}{\alpha_2}\dot{I}(t)\left|\sin\alpha_2 I(t)\right|\geq 0 \quad \forall t\geq 0. \tag{10}$$

Введемо функцію розтягування часу

$$I(t)=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t, \quad t\in[0,+\infty). \tag{11}$$

Тоді $\left|\sin\alpha_2 I(t)\right|=\left|\sin\alpha_1 t\right|, \quad t\in[0,+\infty).$ Ця функція задовольняє усім вимогам означення функції розтягування часу, а саме $I(0)=0, \;\; I(t)>t$ при $t>0.$

Підставивши функцію розтягування часу (11) у співвідношення (10), одержимо нерівність

$$\frac{\rho}{\alpha_1}\left|\sin\alpha_1 t\right|-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\sigma}{\alpha_2}\left|\sin\alpha_1 t\right|\geq 0, \;\; t\in[0,+\infty).$$

Звідси випливає умова, що забезпечує виконання цієї нерівності, а отже, і умови (10):

$$\frac{\rho}{\alpha_1^2}\geq\frac{\sigma}{\alpha_2^2}. \tag{12}$$

Покажемо, що за умов (8), (12) для довільних початкових станів систем (6), (7) існує скінченний момент часу t_1, при якому має місце включення

$$\pi e^{I(t)A}z_0\in\int_0^t W_1(\theta)d\theta.$$

Припустимо, що $u(\theta)\equiv 0, \;\; \theta\in[0,\tau_0)$, де $\tau_0=I(t_1)-t_1$. Тоді t_1 стає першим моментом часу, коли виконується співвідношення

$$\left(\cos\alpha_2 I(t)E, \;\; \frac{\sin\alpha_2 I(t)}{\alpha_2}E\right)\begin{pmatrix}y_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix}-$$

$$-\left(\cos\alpha_1 I(t)E, \;\; \frac{\sin\alpha_1 I(t)}{\alpha_1}E\right)\begin{pmatrix}x_0\\ \dot{x}_0\end{pmatrix}\in\int_0^t W_1(\theta)d\theta. \tag{13}$$

ISSN 1028-0979

З ростом t вектор, що стоїть у лівій частині включення (13), лишатиметься у межах певної кулі rS, $rS \in R^n$, радіуса r з центром у початку координат. Із попередніх міркувань випливає, що множина правої частини включення (13) має вигляд

$$\int_0^t W_1(\theta)d\theta = \int_0^t \left(\frac{\rho}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1\sigma}{\alpha_2{}^2}\right)\left|\sin\alpha_1\theta\right| d\theta \cdot S, \tag{14}$$

яка, в свою чергу, містить множину

$$\bar{W}_1(t) = \alpha_1\left(\frac{\rho}{\alpha_1{}^2} - \frac{\sigma}{\alpha_2{}^2}\right)\sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{\pi/\alpha_1}\right]}\int_0^{\pi/\alpha_1}\sin\alpha_1\theta d\theta \cdot S =$$

$$= 2\left[\frac{t}{\pi/\alpha_1}\right]\left(\frac{\rho}{\alpha_1{}^2} - \frac{\sigma}{\alpha_2{}^2}\right)\cdot S.$$

Вище знаком $[\cdot]$ позначена ціла частина числа.

При $t \to +\infty\{\ \}$ ця куля прямує до кулі нескінченного радіуса з центром в нулі, яка у певний момент часу поглине кулю rS, і буде виконана умова (13) теореми. Отже, в момент $I(t_1)$ відбудеться зустріч об'єктів (6) та (7).

У процесі зближення $u(\theta) \equiv 0$, $\theta \in [0, \tau_0)$, а на відрізку $[\tau_0, I(t_1)]$ керування переслідувача будується на підставі вимірного рішення рівняння (5), яке у даному конкретному випадку має вигляд

$$\frac{\rho}{\alpha_1}\sin\alpha_1(t_1-\theta)u(\tau_0+\theta) = \frac{\sigma}{\alpha_2}\dot{I}(t_1-\theta)\sin\alpha_2 I(t_1-\theta)\,v(I(t_1)-I(t_1-\theta)) + \omega_1(t_1-\theta),$$

$$\theta \in [0, t_1]. \tag{15}$$

Тут $\omega_1(\theta)$ — селектор багатозначного відображення $W_1(t)$, що існує з огляду на включення (13).

Реалізація принципу розтягування часу
для коливних систем у двовимірному просторі

Для демонстрації результатів застосування принципу розтягування часу для коливних систем розглянуті приклади руху на площині.

Керування втікача бралося сталим вектором $v(\theta) = \text{const}$. Воно позначено $\bar{v}$. Керування переслідувача на відрізку часу $\theta \in [0, \tau_0)$, де $\tau_0 = I(t_1) - t_1$, дорівнювало 0: $u(\theta) \equiv 0$. Для інтервалу $[\tau_0, \tau_0 + t_1]$ керування аналітично розраховувалося на основі рівняння (15). А саме, підставивши в (15) функцію $I(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}t$ і її похідну, отримуємо

$$\sin(\alpha_1(t_1-\theta))\rho u_g(\tau_0+\theta) = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sin(\alpha_1(t_1-\theta))\sigma\bar{v}_g + \alpha_1\omega_1(t_1-\theta). \tag{16}$$

Тут вектори $\bar{v}$ та u замінено на $\bar{v}_g$ та $u_g(\cdot)$, оскільки після виконання проекції π відбувається перехід у двовимірний простір геометричних координат. Вектор $\omega_1(\cdot)$ також розглядається у двовимірному просторі.

Для розв'язання рівняння (16) необхідно, щоб селектор $\omega_1(t_1-\theta)$ дорівнював 0 тоді, коли і $\sin(\alpha_1(t_1-\theta))=0.$ Якщо $\sin(\alpha_1(t_1-\theta))\neq 0,$ то $u_g(\tau_0+\theta)=$
$=\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\dfrac{\sigma}{\rho}\bar{v}_g+\dfrac{\alpha_1}{\rho}\dfrac{\omega_1(t_1-\theta)}{\sin(\alpha_1(t_1-\theta))=0}.$

Селектор $\omega_1(t_1-\theta)\in\left(\dfrac{\rho}{\alpha_1}-\dfrac{\alpha_1\sigma}{\alpha_2{}^2}\right)\left|\sin\alpha_1(t_1-\theta)\right|\cdot S,$ який вибирається згідно з (14), задовольняє умові на $\sin(\cdot)=0$ і його можна представити як $\omega_1(t_1-\theta)=$ $=\left(\dfrac{\rho}{\alpha_1}-\dfrac{\alpha_1\sigma}{\alpha_2{}^2}\right)\left|\sin\alpha_1(t_1-\theta)\right|\cdot\bar{w}_1(t_1-\theta),$ $\bar{w}_1(\cdot)\in S,$ де S — одиничний шар у двовимірному просторі.

Тоді $u_g(\tau_0+\theta)=\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\dfrac{\sigma}{\rho}\bar{v}_g+\dfrac{1}{\rho}\left(\rho-\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sigma\right)\operatorname{sign}(\sin\alpha_1(t_1-\theta))\bar{w}_1(t_1-\theta).$

Оскільки додаткових обмежень на вибір вектора $\bar{w}_1(\cdot)$ не накладено, то можемо вільно змінювати його напрям на протилежний, і це дає можливість прибрати функцію $\operatorname{sign}(\cdot)$ у наведеному вище виразі, а також змінити аргумент цього вектора на θ. Отже, пошук $u_g(\cdot)$ здійснюється за формулою

$$u_g(\tau_0+\theta)=\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\frac{\sigma}{\rho}\bar{v}_g+\frac{1}{\rho}\left(\rho-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sigma\right)\bar{w}_1(\theta).$$

Керування $u_g(\tau_0+\theta)$ залишається припустимим при виборі буть-якого вектора $\bar{w}_1(\theta)\in S.$

Для знаходження потрібного вектора керування повертаємося до мети переслідувача — побудувати таке керування, щоб виконувалося $\pi z(I(t_1))=0.$ Враховуючи спосіб знаходження стану системи в момент $I(t_1),$ маємо таку умову:

$$\pi\left(e^{I(t_1)A}z_0+\int\limits_0^{I(t_1)}e^{(I(t_1)-\theta)A}\sigma\bar{v}d\theta+\int\limits_{\tau_0}^{I(t_1)}e^{(I(t_1)-\theta)A}\rho(a\bar{v}_u+b\bar{w}_{1u}(\theta))d\theta\right)=0. \qquad (17)$$

Тут $\bar{v}\in V,$ $\bar{v}_u,\bar{w}_{1u}\in U,$ а ненульові координати вектора $\bar{v}_u$ такі ж, як у $\bar{v}_g$. Коефіцієнти $a,$ b дорівнюють $a=\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\dfrac{\sigma}{\rho},$ $b=\dfrac{1}{\rho}\left(\rho-\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\sigma\right).$

Враховуючи ці коефіцієнти, визначення τ_0 та зміст фундаментальної матриці (9), приходимо до висновку, що у виразі (17) $\pi\left(\int\limits_0^{I(t_1)}e^{(I(t_1)-\theta)A}\sigma\bar{v}d\theta+\right.$ $\left.+\int\limits_{\tau_0}^{I(t_1)}e^{(I(t_1)-\theta)A}\rho(a\bar{v}_u)d\theta\right)=0.$ Отже, для частини, що залишилася, має виконуватися умова

$$\pi\left(e^{I(t_1)A}z_0+\int\limits_{\tau_0}^{I(t_1)}e^{(I(t_1)-\theta)A}\rho(b\bar{w}_{1u}(\theta))\,d\theta\right)=0.$$

 ISSN 1028-0979

Проекція першого члена цього виразу дорівнює правій частині включення (14) в момент часу $I(t_1)$. Позначимо цей вектор $\bar{\gamma}(I(t_1))$. Тоді, використовуючи зменшення змінної θ на τ_0, маємо умову на вектор $\bar{w}_1(\cdot)$:

$$\bar{\gamma}(I(t_1)) = -\rho b \int_{\tau_0}^{I(t_1)} \frac{\sin \alpha_1 (I(t_1)-\theta)}{\alpha_1} \bar{w}_1(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\left(\frac{\rho}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 \sigma}{\alpha_2^2} \right) \int_0^{t_1} \sin(\alpha_1 (t_1 - \theta))\, \bar{w}_1(\theta + \tau_0)\, d\theta. \qquad (18)$$

Виходячи з того, що t_1 знаходиться з умови (14), можемо записати

$$\|\bar{\gamma}(I(t_1))\| = \alpha_1 \left(\frac{\rho}{\alpha_1^2} - \frac{\sigma}{\alpha_2^2} \right) \int_0^{t_1} |\sin \alpha_1 \theta|\, d\theta.$$

Використовуючи останні дві рівності, отримуємо таку умову на $\bar{w}_1(\cdot)$:

$$\left\| \int_0^{t_1} \sin(\alpha_1 (t_1 - \theta))\, \bar{w}_1(\theta + \tau_0)\, d\theta \right\| = \int_0^{t_1} |\sin \alpha_1 \theta|\, d\theta. \qquad (19)$$

З (19) витікає, що $\bar{w}_1(\cdot)$ може бути одиничним кусково-фіксованим вектором, який змінює тільки напрямок на протилежний у моменти, коли змінюється знак $\sin(\alpha_1(t_1 - \theta))$. Щоб виконати рівняння (18), вектор $\bar{w}_1(\cdot)$ на інтервалі $[I(t_1) - \varepsilon, I(t_1)]$ може рівнятися $-\bar{\gamma}_1(I(t_1))$, де ε — мале значення, а $\bar{\gamma}_1(I(t_1)) = \bar{\gamma}(I(t_1)) / \|\bar{\gamma}(I(t_1))\|$. Далі $\bar{w}_1(\cdot)$ змінюється, як сказано вище. Отже,

$$\bar{w}_1(t) = -\bar{\gamma}_1(I(t_1)) \cdot \operatorname{sign}(\sin \alpha_1 (I(t_1) - t)).$$

Таким чином, знайдено керування переслідувача:

$$u(t) = 0, \quad t < \tau_0,$$

$$u(t) = \bar{v}_g \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\sigma}{\rho} - \bar{\gamma}_1(I(t_1)) \frac{1}{\rho} \left(\rho - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \sigma \right) \operatorname{sign}(\sin \alpha_1 (I(t_1) - t)), \quad \tau_0 \le t \le t_1.$$

Траєкторія переслідувача у двовимірному просторі геометричних координат обчислюється за формулами:

$$x(t) = x_0 \cos \alpha_1 t + \dot{x}_0 \frac{1}{\alpha_1} \sin \alpha_1 t, \quad t < \tau_0,$$

$$x(t) = x_0 \cos \alpha_1 t + \dot{x}_0 \frac{1}{\alpha_1} \sin \alpha_1 t + \bar{v}_g \sigma \frac{1}{\alpha_2^2} (1 - \cos \alpha_1 (t - \tau_0)) -$$

$$-\bar{\gamma}_1(I(t_1)) \left(\frac{\rho}{\alpha_1^2} - \frac{\sigma}{\alpha_2^2} \right) z_0 ((-1)^{k_t} + 2k_t \cos \alpha_1 (t - \tau_1) - \cos \alpha_1 (t - \tau_0)), \quad \tau_0 \le t \le t_1,$$

де $z_0 = \operatorname{sign}(\sin \alpha_1 t_1)$, $\tau_1 = \tau_0 + \left(t_1 - \frac{\pi}{\alpha_1} \left[\frac{\alpha_1 t_1}{\pi} \right] \right)$, $k_t = \left[\frac{(t - \tau_1)\alpha_1}{\pi} \right] + 1$.

Нижче наведено результати побудови керувань та траєкторій для показу застосування принципу розтягування часу до коливних систем у двовимірному просторі (на площині).

На рис. 1–3 показано траєкторії втікача та переслідувача та керування переслідувача. На рис. 1 показано, що початкові умови втікача та переслідувача співмірні. На рис. 2 переслідувач знаходиться в середині еліпса втікача і «розгойдує» свою траєкторію. На рис. 3 втікач знаходиться в середині еліпса переслідувача, який «стискає» свою траєкторію. Зліва показані траєкторії, справа — компоненти вектора керування та його норма. Тут керування переслідувача помножено на силовий коефіцієнт ρ, який дорівнював 10 (горизонтальні лінії справа).

Втікач має траєкторію у формі еліпса. Переслідувач також має початкову траєкторію у формі еліпса з центром в точці (0, 0), яка з моменту часу τ_0 починає змінюватися. Кружечками показані початкові положення, стрілками — початкові швидкості, хрестиком — точка зіткнення.

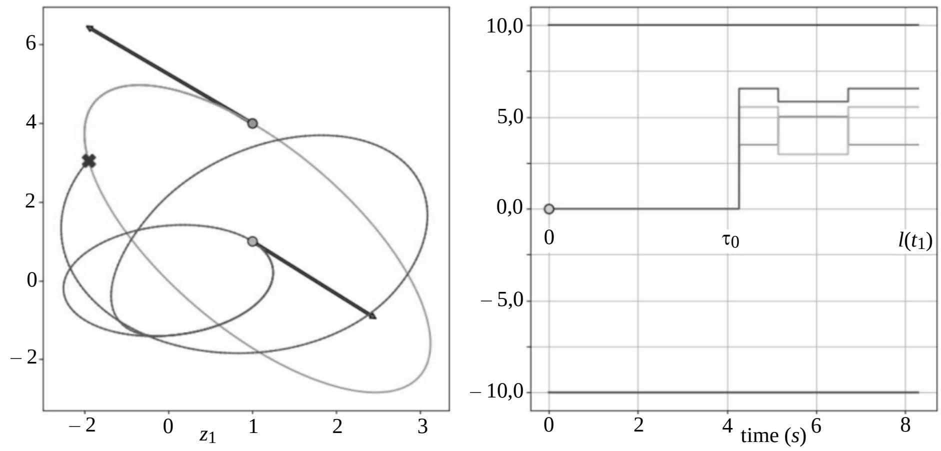

Рис. 1

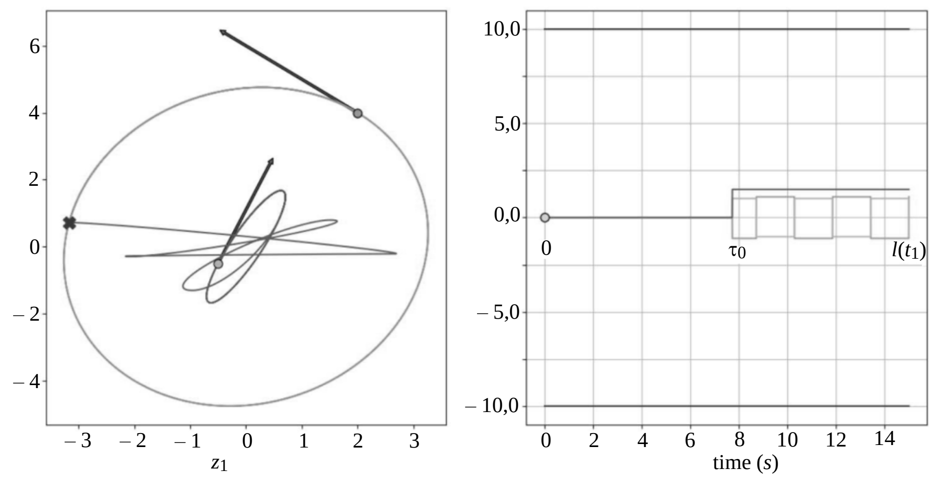

Рис. 2

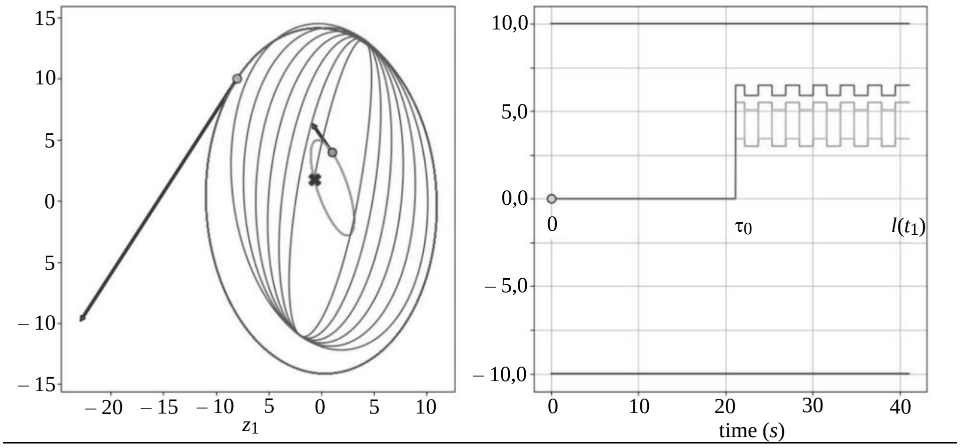

Рис. 3

Висновок

Для задачі зближення двох керованих об'єктів другого порядку на базі принципу розтягування часу виведені прості умови на параметри систем і ресурси керування, за яких зустріч відбудеться у певний скінченний момент часу при довільних початкових положеннях та швидкостях систем. У випадку, коли керування втікача кусково-стале, можлива побудова керування переслідувача та його траєкторії в аналітичному вигляді. При цьому, якщо навіть керування переслідувача достатньо просте, траєкторія його руху має складний вигляд.

Г.Ц. Чикрій, В.М. Кузьменко

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗБЛИЖЕННЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ

Розглянуто задачу зближення двох керованих систем, що описують динаміку математичних маятників, в якій один із об'єктів прагне досягти цієї зустрічі, а інший — уникнути її. З метою застосування схеми першого прямого методу Л.С. Понтрягіна до її вирішення знадобилася модифікація цього методу, що базується на застосуванні принципу розтягування часу. Причина полягає у тому, що для цієї задачі не виконано умову Понтрягіна, що лежить в основі першого прямого методу і фактично забезпечує можливість побудови керування переслідувача у кожний момент часу за поточним керуванням втікача. Ця умова відображає перевагу переслідувача над втікачем в ресурсах керування, що виражена через параметри систем. Використовується модифікація умови Понтрягіна, що містить так звану функцію розтягування часу, яка грає вирішальну роль при побудові керування переслідувача по керуванню втікача у минулому. Це тотожно до використання інформації, що запізнюється. Для досліджуваної задачі запропоновано функцію розтягування часу та виводяться умови, що забезпечують можливість зустрічі об'єктів у визначений скінченний момент. Також приведено формули, що описують спосіб побудови керування переслідувача керуванням супротивника у минулому. Використовуючи програмні засоби, створено візуальну ілюстрацію процесу зближення на площині за умови, що втікач рухається по сталій орбіті. Описаний алгоритм розрахунку формули поточного керування переслідувача гарантує зустріч об'єктів.

G.Ts. Chikrii, V.M. Kuzmenko

IMPLEMENTATION OF THE APPROACH OF OSCILLATORY SYSTEMS BASED ON THE PRINCIPLE OF TIME DILATION

The paper considers the problem of the approach of two controlled systems describing the dynamics of mathematical pendulums, in which one of the objects seeks to achieve the meeting, and the other to avoid it. In order to apply the first direct method of L.S. Pontryagin, to solve the problem, a modification of this method was required, based on the application of the time dilation principle. The reason is that the Pontryagin condition, which is the basis of the first direct method and, in fact, provides the possibility of constructing the control at each instant of time according to the current control of the evader, is not satisfied for the problem at hand. This condition reflects the advantage of the pursuer over the evading object in control resources, expressed through the parameters of the systems. A modification of the Pontryagin condition is used, which includes the so-called time dilation function, which plays a decisive role in the construction of the control of the pursuer on the basis of the evader's control in the past, as it were, on the basis of delayed information. For the problem under study, an appropriate function of time dilation is introduced and conditions are derived that ensure the possibility of meeting of the objects in a prescribed finite time. Also, formulas are given that describe the way of constructing the pursuer control on the basis of the adversary control in the past. Using software, a visual illustration of the process of convergence of the objects on the plane, provided the evader is moving in a stable orbit, is created. The algorithm for constructing the current control of the pursuer that leads to the meeting is described.

1. Isaacs R.F. Differential Games. New York-London-Sydney: Wiley Interscience, 1965. 479 p.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды: в 3 т. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. Т 2. М. : Наука, 1988. 576 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Мир, 1974. 456 с.
4. Berkovitz L.D. Differential games of generalized pursuit and evasion. *SIAM, Control and Optimization.* 1986. **24**, N 53. P. 361–373. https://doi.org/10.1137/0324021.
5. Hayek O. Pursuit Games. New York: Academic Press, 1975. 266 p.
6. Pshenitchny B.N. ε-strategies in Differential Games. Topics in Differential Games. New York, London, Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. P. 45–49.
7. Siouris G. Aerospace avionics systems: A modern synthesis. San Diego: Academic Press, 1993. 466 p.
8. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht, Boston, London: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
9. Mezentsev A.V. On some class of differential games. *Izvestia AN SSSR, Techn. kib.* 1971. **6**. P. 3–7.
10. Никольский М.С. О применении первого прямого метода в линейных дифференциальных играх*. Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики.* 1972. № 10. С. 51–56.
11. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока. *ДАН СССР.* 1973. **208**, № 3. С. 520–523.
12. Chikrii G.Ts. Using impact of information delay for solution of game problems of pursuit. *Dopovidi Natsional'noi Akademii Nauk Ukrainy*. 1999. **12**. P. 107–111.
13. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasi-linear evolutionary systems. *Game Theory and Applications*. 2005. **10**. P. 47–55. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00197-9
14. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. **43**, № 2. P. 233–245. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x
15. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 5. P. 12–26. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i5.20
16. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching for motion control in condition of conflict. Book chapter in the book «Advanced control systems: Theory an applications», River Publishers, 2021. P. 52–82.
17. Chikrii G.Ts., Rastvorova K.I. On game problem for oscillatory systems. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2021. **1**. P. 5–15. https://doi.org/10.34229/2707-451X.21.1.1
18. Aumann R.J. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 1965. **12**. P. 1–12. https://doi.org/10.1016/0022-247X(65)90049-1
19. Filippov A.F. Differential equations with discontinuous right-hand sides. Dordrecht, Boston: Kluwer Publishers, 1988. 258 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9

Отримано 19.01.2022