

УДК 004.942, 519.177, 519.217

О.Л. Кириченко, І.В. Малик, С.Е. Остапов

АНАЛІЗ КЛАСТЕРНОЇ СТРУКТУРИ ІНТЕРНЕТ-МЕРЕЖ НА ОСНОВІ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ

Ключові слова: стохастична випадкова матриця, спектр матриці, власні значення, оптимальне число кластерів, марковський алгоритм кластеризації.

Keywords: stochastic random matrix, matrix spectrum, eigenvalues, optimal number of clusters, Markov clustering algorithm.

Вступ

Аналізу великих даних за допомогою розбиття на групи присвячено багато робіт. Основні роботи в даному напрямку зосереджені на задачах кластеризації та пошуку структури розумних мереж (Smart Grid) [1]. Для дослідження мереж Smart Grid за останні роки більшість робіт присвячено спектральному аналізу матриці переходів A , матриці зв'язків або їхніх похідних [1, 2]. Основні роботи з аналізу матриць великих розмірностей з випадковими елементами ґрунтуються на основоположній роботі Марченка–Пастура [3], у якій основну увагу приділено аналізу матриць вигляду

$$A = X^T X, \quad (1)$$

де X — випадкова матриця розмірності $n \times N$, елементами якої є незалежні випадкові величини з нульовим середнім та скінченною дисперсією:

$$EX_{ij} = 0, \quad DX_{ij} = \sigma^2 < \infty, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

У результаті даного дослідження було знайдено, що власні значення матриці A підпорядковуються так званому розподілу Марченка–Пастура з щільністю розподілу власних значень [4]

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 c \lambda} \sqrt{(a_+ - x)(x - a_-)}, \quad x \in (a_-, a_+),$$

де a_- , a_+ , c — параметри розподілу, які визначаються наступними співвідношеннями:

$$c = \frac{n}{N}, \quad a_{\pm} = \sigma^2 \sqrt{1 \pm c^2}.$$

У загальному випадку закони розподілу для власних значень (1) називаються напівколовими розподілами Вінгера [5–7]. Зрозуміло, що граничний розподіл залежить від перетворення матриці X . Основні перетворення та відповідні їм граничні розподіли можна знайти в [8, 9]. Більшість робіт, у яких досліджуються властивості випадкових матриць, ґрунтуються на понятті ермітової матриці, яке у

© О.Л. КИРИЧЕНКО, І.В. МАЛИК, С.Е. ОСТАПОВ, 2022

випадку дійснозначних величин X_{ij} визначає симетричну матрицю. Дане спрощення ґрунтується на тому, що всі власні значення належать множині дійсних чисел, що суттєво полегшує дослідження. Крім того, припущення про рівність 0 математичних сподівань у (2) відіграє одну із ключових ролей при використанні методу моментів чи перетворення Стільгеса [8, 10]. У нашому дослідженні розглянуті матриці не володіють цією властивістю. За рахунок цього спектр матриці не підпорядковується круговому розподілу в одиничному колі на комплексній множині C , оскільки містить викиди [8] порядку $O(\sqrt{N})$.

Постановка задачі

Основна увага в даній роботі присвячена властивостям нормованих матриць $A_{N \times N}$, де кожен елемент рівний ймовірності переходу із однієї вершини Інтернет-мережі в іншу [9, 10]. Основна проблема буде ґрунтуватися на спектральному аналізі матриці перехідних ймовірностей. Точніше кажучи, ми будемо аналізувати викиди (власні значення поза основним носієм) та робити висновок про оптимальну кількість кластерів, ґрунтуючись на кількості викидів. Нормалізація матриці проводиться для того, щоб локалізувати потрібні нам викиди. Згідно з теоремою Перрона–Фробеніуса [11] для довільної квадратної матриці A з невід’ємними елементами, існує власне значення $\lambda(A)$, таке що

$$|\lambda_i(A)| \leq \lambda(A).$$

Крім того, дане власне значення задовольняє нерівності

$$\max \left\{ \min_i \sum_{j=1}^N A_{ij}, \min_i \sum_{j=1}^N A_{ji} \right\} \leq \lambda(A) \leq \min \left\{ \max_i \sum_{j=1}^N A_{ij}, \max_i \sum_{j=1}^N A_{ji} \right\}.$$

Використовуючи означення стохастичної матриці, яку будемо досліджувати надалі в якості нормалізованої матриці, приходимо до висновку, що

$$\lambda(A) = 1.$$

Таким чином, нас будуть цікавити викиди, які знаходяться в околі точки $z = 1$, де радіус околу буде залежати від кількості елементів у кластері, тобто від N .

Оскільки нас буде цікавити задача розбиття на підгрупи, тобто задача кластеризації, будемо припускати, що всі зв’язки в одному кластері є однотипними. Дане припущення будемо формалізувати наступним чином: елементи матриці суміжності A мають однаковий розподіл, тобто

$$A_{ij} \sim F,$$

де F — розподіл з носієм $S \subset (0, \infty)$ та скінченим другим моментом та ненульовим середнім:

$$\mu_1 = EA_{ij}; \mu_2 = EA_{ij}^2 < \infty.$$

Тоді матрицю перехідних ймовірностей будемо визначати із наступних співвідношень:

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}}.$$

Тоді матриця P_{ij} буде стохастичною; крім того, всі елементи матриці будуть мати той же розподіл, носієм якого є множина $[0, 1]$. Надалі для доведення основного твердження даної роботи будемо використовувати наступний факт.

Теорема 1 [7]. Нехай елементи матриці A є незалежними випадковими величинами з нульовим математичним сподіванням та скінченною дисперсією:

$$EA_{ij} = 0, \quad DA_{ij} = \sigma^2 < \infty.$$

Тоді розподіл власних значень матриць

$$M_N = \frac{1}{\sqrt{N}} A$$

при $N \rightarrow \infty$ буде збігатися до рівномірного розподілу в одиничному крузі в \mathbb{C} , тобто

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & |z| \leq 1, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Слід зауважити, що матриця вигляду (2) є «незручною» для дослідження, оскільки елементи в рядках не є залежними за рахунок $\sum_{j=1}^N A_{ij}$ у знаменнику. Да-

ний факт означає, що елементи матриці \tilde{P}_{ij} не є незалежними, що порушує основні умови теореми для визначення асимптотики розподілу власних значень матриці P . Ще однією проблемою є той факт, що елементи матриці \tilde{P}_{ij} мають носієм множину R_+ та

$$EP_{ij} = \frac{1}{N}.$$

Таким чином, порушується і друга умова теореми.

Для подолання першої проблеми використаємо закон великих чисел. Для цього поряд із матрицею P розглянемо матрицю

$$\tilde{P}_{ij} = \frac{A_{ij}}{N\mu_1}.$$

Зауважимо, що елементи матриці \tilde{P}_{ij} є незалежними випадковими величинами; крім того, асимптотика власних значень матриць P та \tilde{P} є однаковою. Для цього розглянемо наступну лему.

Лема. Спектр матриць P та \tilde{P} є асимптотично еквівалентним, тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, N} |\lambda_i(P - \tilde{P})| = 0.$$

Доведення. Згідно з існуванням скінченного другого моменту для A_{ij} , отримаємо, що

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \rightarrow \mu_1$$

у середньому квадратичному. Використовуючи даний факт, отримаємо, що

$$P_{ij} - \tilde{P}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} - \frac{A_{ij}}{N\mu_1} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} \frac{N\mu_1 - \sum_{j=1}^N A_{ij}}{N} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} \left(\mu_1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \right).$$

Таким чином, елементи різниці двох матриць будуть прямувати до 0. Враховуючи той факт, що $\frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}}$ мають однаковий розподіл для довільних i , отримаємо наступне співвідношення:

$$\sum_{i=1}^N \left| \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} \left(\mu_1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \right) \right| = \sum_{i=1}^N \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} - \mu_1 \right| = o(1) \sum_{i=1}^N \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^N A_{ij}} = o(1) \rightarrow 0$$

у середньому квадратичному.

Лемі доведено.

Зауваження. Можна посилити твердження лемі та довести, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^\alpha \max_{i=1, \dots, N} |\lambda_i(P - \tilde{P})| = 0$$

для $\alpha \in [0, 1)$.

Отже, ґрунтуючись на лемі, надалі можемо зосередити увагу на дослідженні власних значень матриці \tilde{P} , які задовольняють умові незалежності.

Теорема 2. Розподіл власних значень матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \tilde{P}$ має асимптотичний розподіл, який зосереджений в одиничному крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ та володіє одним викидом $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} + o(1)$.

Доведення. Поряд із матрицею \tilde{P} розглянемо центровану матрицю

$$\tilde{P} = \left(\frac{\mu}{N} \right)_{i,j=1, \dots, N}.$$

Використаємо наступне співвідношення для \tilde{P} :

$$\tilde{P} = \tilde{P} - \bar{P} + \bar{P} = P^C + \bar{P}.$$

Основним фактом даного представлення є те, що матриця P^C має вигляд

$$P^C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11} - \mu}{N} & \dots & \frac{A_{1N} - \mu}{N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{N1} - \mu}{N} & \dots & \frac{A_{NN} - \mu}{N} \end{pmatrix}.$$

Отже, елементи матриці P^C задовольняють умовам теореми 1, і можна стверджувати, що власні значення матриці

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11} - \mu}{\sigma\sqrt{N}} & \dots & \frac{A_{1N} - \mu}{\sigma\sqrt{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{N1} - \mu}{\sigma\sqrt{N}} & \dots & \frac{A_{NN} - \mu}{\sigma\sqrt{N}} \end{pmatrix}$$

будуть мати асимптотичний рівномірний розподіл у крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Для остаточного доведення теореми залишилося знайти розподіл власних значень матриці \bar{P} та її зв'язок із матрицею P^C . Скористаємося поняттям нормальної матриці. Враховуючи той факт, що елементи матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C$ є незалежними випадковими величинами, отримаємо, що

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C * \left[\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C \right]' \right)_{ij} &= \frac{N}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N (A_{ik} - \mu)(A_{jk} - \mu) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C * \left[\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C \right]' \right)_{ji}. \end{aligned}$$

З іншого боку, матриця $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P}$ також є нормальною, оскільки

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P} * \left[\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P} \right]' \right)_{ij} &= \frac{N}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \frac{\mu^2}{N^2} = \frac{\mu^2}{N\sigma^2} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C * \left[\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C \right]' \right)_{ji}. \end{aligned}$$

Крім того, матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C$ та $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P}$ є переставними, тобто

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P} = \frac{N}{\sigma^2} P^C \bar{P}$$

рівна за розподілом матриці

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P} \frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C = \frac{N}{\sigma^2} \bar{P} P^C.$$

Таким чином, можна вказати унітарну випадкову матрицю U , для якої

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} P^C = U D_{P^C} U^*, \quad \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \bar{P} = U D_{\bar{P}} U^*,$$

де D_{P^C} та $D_{\bar{P}}$ — діагональні матриці. У цьому випадку власні значення матриці

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(P^C + \bar{P})$$

визначаються як сума власних значень $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}P^C$ та $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}$. Власні значення матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}$ дорівнюють

$$\lambda_1\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}\right) = \frac{\sqrt{N}}{\sigma}, \lambda_2\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}\right) = \dots = \lambda_N\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}\right) = 0. \quad (3)$$

Використовуючи властивості нормальних переставних матриць, приходимо до висновку, що власні значення матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(P^C + \bar{P})$ будуть сумою власних значень матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}P^C$ та $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\bar{P}$. Крім того, нас не цікавить порядок додавання на основі (3). Таким чином, власні значення матриці $\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(P^C + \bar{P})$ будуть мати асимптотичний рівномірний розподіл в одиничному крузі

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

крім одного значення, яке дорівнює $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} + o(1)$. Враховуючи даний факт, отримаємо, що власні значення \bar{P} асимптотично розміщені в крузі

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$$

та одне з власних значень даної матриці дорівнює $1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Теорему доведено.

Моделювання

Як приклад розглянемо задачу визначення оптимальної кількості кластерів для мережі, зв'язки між вузлами в одному кластері будемо моделювати за допомогою розподілу Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Крім того, шуми, які будуть відображати міжкластерні зв'язки, будемо моделювати за допомогою розподілу Пуассона з параметром λ_2 , кількість кластерів при моделюванні дорівнює k . Таким чином, розподіл елемента матриці суміжності A буде мати вигляд

$$A_{ij} \sim \begin{cases} \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2), & i, j \text{ в одному кластері,} \\ \text{Pois}(\lambda_2) & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Для визначення оптимального значення кількості кластерів k_{opt} , як було зазначено в теоремі 2, будемо користатися викидами, тобто власними значеннями, близькими до одиниці. Точніше кажучи,

$$k_{\text{opt}} = \# \left\{ \lambda_i(P) : |\lambda_i(P)| \geq \frac{2 \max(\sigma_1, \dots, \sigma_{k_{\text{opt}}})}{\sqrt{\min(N_1, \dots, N_{k_{\text{opt}}})}} \right\},$$

де N_i — кількість елементів у i -му кластері, σ_i^2 — дисперсія елементів у i -му кластері. Зауважимо, що в роботі [12] окреслено дещо інший підхід до визначення викидів, проте даний вибір викидів може породжувати невірні висновки для різних розмірностей кластерів, тобто для різних N_i . Тому для розв'язання проблеми різних розмірностей будемо використовувати наступний критерій визначення викидів:

$$k_{\text{opt}} = \# \left\{ \lambda_i(P) : |\lambda_i(P)| \geq \min \left(\frac{0,2}{k_{\text{opt}}}, \frac{2 \max(\sigma_1, \dots, \sigma_{k_{\text{opt}}})}{\sqrt{\min(N_1, \dots, N_{k_{\text{opt}}})}} \right) \right\}.$$

Результати кластеризації можемо бачити в таблиці. З даної таблиці видно, що невірна оцінка може виникати у трьох випадках.

- Кількість кластерів велика, тобто $k = o(N)$.
- Розміри кластерів дуже різняться, тобто значення співвідношення

$$r = \frac{\max(N_i)}{\min(N_i)}$$

є великим.

- Середнє значення шуму, за яким будуються міжкластерні зв'язки, має однаковий порядок із усередненими зв'язками всередині кластерів, тобто

$$E(A_{ii}) = o(E(A_{ij})).$$

Дані три критичні ситуації призводять до зниження значення оптимальної кількості кластерів k_{opt} . Виконання двох сценаріїв можемо бачити в останньому випадку у таблиці. По-перше, в цьому випадку

$$r = \frac{\max(N_i)}{\min(N_i)} = \frac{800}{20} = 40,$$

що свідчить про незбалансованість між розмірами кластерів. По-друге, середнє значення міжкластерного зв'язку дорівнює 8, в той же час середній зв'язок у кластері дорівнює $8+10=18$, тобто дані зв'язки задовольняють співвідношенню $E(A_{ii}) = o(E(A_{ij}))$. Як можемо бачити з рис. 1 (власні значення матриці P для випадку $\lambda = (10, 8)$ та $N = (500, 20, 300, 800, 100, 400)$), за виконання цих двох сценаріїв викиди «стягуються» до центру. В цьому випадку відбувається зниження оптимальної кількості кластерів k_{opt} .

Таблиця

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$	$N = (N_1, \dots, N_k)$	k	k_{opt}
(20, 0,5)	500, 200, 300, 800, 100, 400	6	6
(20, 1)	500, 200, 300, 800, 100, 400	6	6
(20, 1)	1000, 200, 20	3	3
(20, 4)	200, 200, 200	3	3
(20, 10)	1000, 200, 200, 200, 200	5	5
(10, 8)	500, 20, 300, 800, 100, 400	6	5

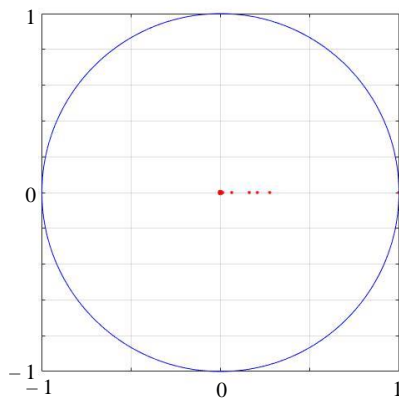


Рис. 1

Якщо жодна з критичних ситуацій не має місця, то всі викиди будуть близькими до $\lambda = 1$, як і зазначено в теоремі 2. Даний результат проілюстровано на рис. 2 при власних значеннях $\lambda = (10, 0, 5)$ матриці P та $N = (500, 300, 800, 400, 400)$.

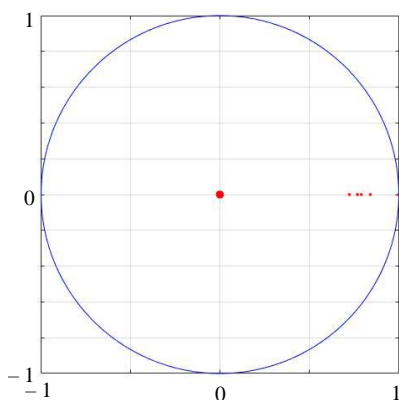


Рис. 2

Висновок

У даній роботі проведено спектральний аналіз власних значень матриці переходу для випадку однотипного зв'язку для всіх елементів. Проаналізовано граничний розподіл власних значень матриці переходу на основі зв'язку викидів серед власних значень та оптимальної кількості кластерів k_{opt} .

У майбутніх роботах планується визначити взаємозв'язок між помилкою кластеризації та величинами, що можуть породжувати дану помилку, — співвідношення між максимальним та мінімальним розмірами кластерів $\frac{\max(N_i)}{\min(N_i)}$, співвідношення між середнім значенням шуму та середнім значенням зв'язку в кластерах $\frac{\min EP_{ij}}{\max EP_{ii}}$ та співвідношення між розмірністю даних N та кількістю кластерів k .

АНАЛІЗ КЛАСТЕРНОЇ СТРУКТУРИ ІНТЕРНЕТ-МЕРЕЖ НА ОСНОВІ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ

Основна увага надається оцінці оптимальної кількості кластерів для системи, що задається матрицею суміжності A з N вузлами при $N \rightarrow \infty$. Розглянуто асимптотичний розподіл власних значень стохастичної випадкової матриці без умов незалежності елементів, спектр якої можна розкласти на регулярну частину та викиди. На основі припущень про однотипність зв'язків у кластері зроблено висновок про оптимальну кількість кластерів для різних прикладних задач. Проведено моделювання мережі зв'язків, що розподілені за законом Пуассона, та знайдено оптимальну кількість кластерів. Результати моделювання вказують на високу точність визначення оптимальної кількості кластерів. У основній теоремі важливим є припущення про існування моменту вище другого для кожного елемента матриці A . Проте, з урахуванням нормалізації, цю умову можна послабити до існування математичного сподівання матриці. Дане послаблення умов збіжності дає можливість використання доведеного твердження на ширший клас прикладних задач, де наявність скінченної дисперсії не вимагається. Зазначимо, що викиди є дійсними власними значеннями для нормалізованої матриці, що дозволяє швидко локалізувати викиди зі складністю $O(N)$, де N — кількість вузлів системи. Отже, вдалося послабити два важливі припущення щодо розподілу елементів випадкової матриці, а саме припущення про рівність нулю математичних сподівань елементів матриці та про незалежність елементів матриці. Крім того, незалежність елементів можна замінити слабкою незалежністю, яка зберігає збіжність до середнього значення в законі великих чисел.

O.L. Kyrychenko, I.V. Malyk, S.E. Ostapov

CLUSTER STRUCTURE ANALYSIS OF INTERNET NETWORKS BASED ON RANDOM MATRIXES

The main attention is paid to the estimation of the optimal number of clusters for the system given by the node adjacency matrix A . Based on the assumptions about the similarity of connections in the cluster, the conclusion was drawn about optimal number of clusters for different applications. Poisson's network of connections is modeled and the optimal number of clusters is found. The simulation results indicate high accuracy in determining the optimal number of clusters. In the basic theorem, it is important to assume the existence of a moment above the second for each element of the matrix A . However, taking into account normalization, this condition can be reduced to the existence of a mathematical expectation of the matrix A . This weakening of the convergence conditions makes it possible to use a proven statement for a wider class of applied problems, where the presence of a finite variance is not required. Note that the emissions are valid eigenvalues for the normalized matrix, which allows you to localize quickly emissions with complexity $O(N)$, where N — the number of system nodes. Thus, we managed to weaken two important assumptions about the distribution of elements of a random matrix, namely the assumption about the equality of 0 mathematical expectations of the elements of the matrix and the independence of the elements of the matrix. In addition, the independence of the elements can be replaced by weak independence, which maintains convergence to the mean value in the law of large numbers.

1. Li F., Qiao W., Sun H., Wan H., Wang J., Xia Y., Xu Z., Zhang P. Smart transmission grid: vision and framework. *IEEE Transactions on Smart Grid*. 2010. **1**, N 2. P. 168–177.
2. Liserre M., Sauter T., Hung J.-Y. Future energy systems: integrating renewable energy sources into the smart power grid through industrial electronics. *IEEE Industrial Electronics Magazine*. 2010. **4**. P. 18–37. <http://dx.doi.org/10.1109/MIE.2010.935861>.
3. Марченко В.А., Пастур Л.А. Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. *Матем. сб.* 1967. **72** (114), № 4. С. 507–536.
4. Lytova A., Pastur L. Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of random matrices with independent entries. *The Annals of Probability*. 2009. **37** (5). P. 1778–1840. <http://dx.doi.org/10.1214/09-AOP452/>.
5. Tao T., Vu V. Random matrices: sharp concentration of eigenvalues, random matrices. *Theory and Applications*. 2012. **02** (03). 28 p. <http://dx.doi.org/10.1142/S201032631350007X>.
6. Wigner Eugene P. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *The Annals of Mathematics, Second Series*. 1958. **67**, N 2. P. 325–327.
7. Wigner Eugene P. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *The Annals of Mathematics, Second Series*. 1955. **62**, N 3. P. 548–564. <https://doi.org/10.2307/1970079>.
8. Robert C. Qiu, Paul Antonik. Smart grid using big data analytics. A random matrix theory approach. Wiley Online Library. 2017. 632 p.
9. Terence Tao. Topics in random matrix theory. *University of California, Graduate studies in mathematics*. 2012. **132**. 340 p. Includes bibliographical references and index. ISBN 978-0-8218-7430-1.
10. Geronimo J.S., Hill T.P. Necessary and sufficient condition that the limit of Stieltjes transforms is a Stieltjes transform. *Journal of Approximation Theory*. 2003. **121** (1). P. 54–60.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1966. 576 с.
12. Кириченко О.Л., Малик І.В., Остапов С.Е. Стохастичні моделі в задачах штучного інтелекту. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2021. Вип. 2. С. 53–57.

Отримано 31.01.2022