

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЛІНІЙНИХ
ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ НАЙМЕНШОГО ЕКСЦЕСУ**Руденко Олег Григорович**Харківський національний університет радіоелектроніки,
oleg.rudenko@nure.ua**Безсонов Олександр Олександрович**Харківський національний університет радіоелектроніки,
oleksandr.bezsonov@nure.ua

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів лінійного об'єкта за наявності негауссівських завад. Алгоритм ідентифікації є градієнтною процедурою мінімізації критерію найменшого середнього ексцесу. Використання такого функціоналу дозволяє отримати оцінки з робастними властивостями. Алгоритм ідентифікації — це градієнтна процедура. Визначено умови збіжності процедури, що застосовується, в середньому і середньоквадратичному за наявності негауссівських завад вимірів. Крім того, отримано оцінки для визначення оптимального значення параметра алгоритму, що забезпечують його максимальну швидкість збіжності. На основі цих оцінок визначено асимптотичні та неасимптотичні значення похибок оцінювання параметрів та похибок ідентифікації. У зв'язку з цим отримані вирази містять невідомі параметри (значення дисперсій сигналів і завад). Для їх застосування слід використовувати оцінки цих параметрів. Отримані співвідношення досить громіздкі, однак їх спрощення дозволяє провести якісний аналіз сталості. Слід зазначити, що всі отримані в роботі оцінки залежать від низки параметрів, проблема визначення яких залишається відкритою. Вони дозволяють досліднику попередньо оцінити можливості алгоритму ідентифікації та ефективність його використання при вирішенні практичних задач.

Ключові слова: ексцес, функціонал, градієнтний алгоритм, дисперсія, асимптотична оцінка, точність ідентифікації, завада, сталий процес.

Вступ

У основі багатьох задач обробки інформації (обробка та фільтрація складних сигналів, ідентифікація об'єктів та управління ними, прогнозування тимчасових послідовностей, класифікація тощо) лежить задача побудови моделі виду

$$y(k) = \theta^{*T} x(k) + \xi(k), \quad (1)$$

де $y(k)$ — вихідний сигнал; $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_N(k))^T$ — вектор вхідних сигналів $N \times 1$; $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_N^*)^T$ — вектор параметрів, що обчислюються $N \times 1$; $\xi(k)$ — завада.

Припускається, що:

- а) $x(i) \sim N(0, \sigma_x^2)$;
- б) $M\{x^T(i)\theta(j-1)\} = 0 \quad \forall i, j$;
- в) $\xi(k) \sim N(0, \sigma_\xi^2)$;
- г) $M\{x(i)\xi(j)\} = 0 \quad \forall i, j$.

Задача ідентифікації зводиться до мінімізації деякого наперед обраного критерію якості (критерію ідентифікації).

Широковикористовуваний на практиці квадратичний функціонал приводить до різних алгоритмів ідентифікації, що дозволяє отримати оцінки пошукового вектора θ^* при нормальних розподілах завади, тобто $\xi(k) \sim N(0, \sigma_\xi^2)$.

Засноване на цьому припущенні МНК-рішення асимптотично оптимальне з мінімальною дисперсією в класі незміщених оцінок. Однак це припущення, як правило, не виконується в реальних умовах, оскільки майже завжди апріорна інформація про розподіли зазвичай недоступна або ж завада засмічена негауссівським шумом. Це призводить до того, що деякі вимірювання значно віддалені від основного об'єму даних і утворюють так звані «хвости». Нестійкість оцінки МНК за наявності таких завад стала підставою для розвитку альтернативного, робастного оцінювання в статистиці, метою якого і стало виключення впливу завад.

За наявності інформації щодо приналежності завади до деякого певного класу розподілів завдання спрощується. У цьому випадку може бути отримана оцінка максимальної правдоподібності (M -оцінка) шляхом мінімізації оптимального критерію, що становить собою логарифм функції розподілу завади, узятий з оберненим знаком. За відсутності такої інформації для оцінювання вектора параметрів θ^* необхідно застосовувати будь-який неквадратичний критерій. Це забезпечує робастність отриманої оцінки. Одним з таких критеріїв є модульний, мінімізація якого приводить до знакового алгоритму.

Теоретичне дослідження властивостей знакового алгоритму оцінювання вперше було проведено в [1]. Практичне застосування цього критерію в задачі ідентифікації об'єкта за наявності імпульсних завад розглядалося в [2–6]. Зокрема, в [2, 3] вивчалася ефективність афінного проєкційного знакового алгоритму, в [4] використовувався афінний проєкційний знаковий алгоритм зі змінним коефіцієнтом посилення. Необхідно зазначити, що знакові алгоритми, забезпечуючи робастність одержуваної оцінки, мають низьку швидкість збіжності. Тому з метою прискорення процесу оцінювання в [5] пропонувався і досліджувався нормалізований знаковий алгоритм ідентифікації. У роботі [6] вивчається простий в реалізації алгоритм, який використовує для корекції довжини кроку середньоквадратичну помилку і розрахункову потужність завади. Позитивні властивості модульного критерію використовуються в так званих комбінованих функціоналах, найбільш поширеними серед яких є комбіновані функціонали, запропоновані в [7, 8]. Вони включають квадратичний функціонал, що забезпечує оптимальність оцінок для гауссівського розподілу, і модульний, що дозволяє отримати оцінку, більш робастну до розподілів з важкими «хвостами» (викидами). Слід, однак, зазначити, що ефективність робастних оцінок залежить від численних параметрів, що використовуються в даних умовах. У зазначених роботах наведені деякі рекомендації щодо вибору цих параметрів. Однак здебільшого вони обираються на основі досвіду дослідника [9]. У [10–12] розглянуто проблему робастного нейромережевого навчання на основі функціоналів Хьюбера і Хемпеля [6, 7] і розроблено деякі практичні рекомендації щодо вибору параметрів функціоналів. У [13] досліджувалася більш загальна проблема робастного оцінювання за наявності завад з асиметричним розподілом. Однак проблема вибору параметрів функціоналів залишається відкритою.

У роботах [14–18] розвивався значно простіший підхід до побудови комбінованих функціоналів, а також квадратичного і модульного, позбавлений вказаного недо-

ліку. Вперше такий критерій запропоновано в [14]. У [14–18] цей критерій застосовувався для розв’язання задачі ідентифікації за наявності імпульсних завад. У [15] розглядалися питання стійкості нормалізованого алгоритму, в [16] вирішувалася прикладна задача ідентифікації. У [17] пропонувалася адаптивна комбінація нормалізованих фільтрів, у [18] вивчалися питання збіжності алгоритму ідентифікації і вирішувалося завдання вибору його оптимальних значень параметрів.

У [19] запропонований критерій найменшого четвертого ступеня, властивості якого вивчалися у [19–24]. Так, у [20] розглядалася стійкість нормалізованого алгоритму при гауссівських вхідних сигналах, у [21] описувався процес нормалізації алгоритму, у [22, 23] розглядалися питання глобальної стійкості відповідних алгоритмів, а у [24] вирішувалося завдання стохастичного аналізу стійкості адаптивного алгоритму. Проблема збільшення швидкості збіжності даного алгоритму шляхом використання оптимального параметра кроку налаштування вивчалася у [25, 26]. У [27] для забезпечення робастності і стійкості алгоритму запропоновано використання змінного параметра кроку, що враховує енергію помилки (у термінах найменших квадратів). У [28] запропонована модифікація алгоритму методу найменшого четвертого ступеня на основі квазі-ньютонівської процедури. Нарешті, робота [29] була присвячена питанням реалізації даного алгоритму з використанням квантових обчислень.

Комбінований критерій оцінювання для прискорення процесу ідентифікації, в якому використовується об’єднання квадратичного критерію і критерію четвертого ступеня, запропоновано в [30]. У [31] даний підхід застосовувався для прискорення процесу ідентифікації за наявності імпульсних завад. Властивості адаптивного алгоритму мінімізації такого комбінованого критерію вивчалися в [32].

У [33] запропоновано комбінований критерій, що складається з критерію четвертого ступеня і модульного, і розглядалися особливості його роботи.

Для отримання робастних оцінок у [34] застосовується критерій найменшого середнього ексцесу (КНСЕ), а в [35, 36] — його модифікації. У [37] вивчався градієнтний алгоритм оптимізації даного критерію. Застосування КНСЕ для вирішення завдання прогнозування хаотичних часових рядів розглядалося в [38]. У [39] досліджувався градієнтний алгоритм оптимізації даного критерію з використанням певним чином побудованих ядер. Стохастичний аналіз градієнтного алгоритму проводився в [40, 41], а в [42] аналогічний аналіз проводився для модифікованого КНСЕ.

Як показує аналіз робіт, присвячених проблемі робастної ідентифікації об’єктів керування [36, 43], застосування критерію найменшого середнього ексцесу досить ефективне. З іншого боку, такий підхід значно простіший порівняно з іншими критеріями. Проте у згаданих роботах відсутні результати досліджень особливостей робастних алгоритмів оцінювання параметрів моделі, побудованих з використанням КНСЕ.

Все це дозволяє стверджувати, що дослідження властивостей робастного алгоритму ідентифікації, отриманого на основі критерію найменшого середнього ексцесу, з метою його практичного застосування є доцільним.

Дослідження властивостей робастного алгоритму ідентифікації

Для врахування негауссовості в оцінці необхідно мати кількісну міру негауссовості випадкової величини. Однією з характеристик відхилення щільності ймовірності від нормального розподілу є ексцес, який визначається як

$$\gamma_e^4 = \frac{M\{e^4(k)\}}{M^2\{e^2(k)\}} - 3,$$

де $M\{e^4(k)\}$ — четвертий центральний момент; $M\{e^2(k)\} = \sigma_e^2$ — дисперсія випадкової величини; $M\{\bullet\}$ — символ математичного сподівання.

Тут «мінус три» введено у визначення коефіцієнта ексцесу, щоб задовольнити вимогу $\gamma_e^4 = 0$ для нормального розподілу.

Ексцес дорівнює нулю для гауссівської випадкової величини. Для більшості (але не всіх) негауссівських випадкових величин ексцес відмінний від нуля. Існують негауссівські випадкові змінні, які мають нульовий ексцес, але їх можна вважати дуже рідкісними.

Ексцес може бути як позитивним, так і негативним. Випадкові змінні з негативним ексцесом називаються субгауссовими, а з позитивним — супергауссовими. Супергауссові випадкові змінні зазвичай мають «гостру» функцію щільності ймовірності (ФЩЙ) з важкими хвостами, тобто ФЩЙ відносно велика при нулі і при великих значеннях змінної і незначна для проміжних значень. Типовим прикладом є розподіл Лапласа.

Застосування ексцесу або, швидше, його абсолютного значення, як запобіжної міри неоднозначності, досить привабливе в задачах статистичного оцінювання в силу його обчислювальної простоти. З обчислювальної точки зору ексцес можна оцінити просто, використовуючи четвертий момент вибіркового даного (якщо дисперсія залишається постійною).

Алгоритм найменшого ексцесу (Least Mean Kurtosis — LMK), який має вигляд

$$\theta(k) = \theta(k-1) + 4\gamma(k)[3\sigma_e^2 - e^2(k)]e(k)x(k), \quad (2)$$

спочатку був запропонований як адаптивний, стійкий до розподілу шуму спостереження [34].

Критерій якості для алгоритму LMK — від'ємний ексцес $e(k)$, що визначається виразом

$$F[e(k)] = 3M^2\{e^2(k)\} - M\{e^4(k)\}, \quad (3)$$

тут $e(k) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)x(k) + \xi(k)$; $\hat{y}(k)$ — вихідний сигнал моделі; $\hat{\theta}(k-1) = (\hat{\theta}_1(k-1), \hat{\theta}_2(k-1), \dots, \hat{\theta}_N(k-1))^T$ — вектор пошукових параметрів $N \times 1$; σ_e^2 — середньоквадратична похибка, яка залежить від $\hat{\theta}$; $\gamma(k)$ — деякий параметр, що впливає на швидкість збіжності алгоритму; $M\{\bullet\}$ — символ математичного сподівання.

Як зазначається в [34–38], наявність в (2), (3) невідомої величини $\sigma_e^2(k)$ створює значні аналітичні труднощі при дослідженні алгоритму. Тому в цих роботах пропонувалося оцінювати $\sigma_e^2(k)$ так:

$$\sigma_e^2(k) = \beta\sigma_e^2(k-1) + e^2(k), \quad (4)$$

де $\beta \in (0, 1)$; $\sigma_e^2(k) = M\{\sigma_e^2(k) | \theta(0), \theta(1), \dots, \theta(k)\}$.

Дещо інша апроксимація аналізувалася в [40–42].
Розглянемо похибку оцінювання

$$\tilde{\theta}(k) = \theta^* - \hat{\theta}(k), \quad (5)$$

що дозволяє записати вираз для $e(k)$ таким чином:

$$e(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)x(k) + \xi(k) = e_a(k) + \xi(k), \quad (6)$$

де $e_a(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)x(k)$ — апіорна похибка ідентифікації.

У зв'язку з припущенням в) маємо

$$M\{e^2(k)\} = \sigma_\xi^2 + \sigma_x^2 M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\}, \quad (7)$$

де $\|\cdot\|$ — евклідова норма.

Запишемо алгоритм (2) щодо помилок ідентифікації $\tilde{\theta}(i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(k) &= \tilde{\theta}(k-1) - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 + 2e^2(k)]e(k)x(k) = \\ &= \tilde{\theta}(k-1) - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 + 2(\tilde{\theta}(k-1)x(k) + \xi(k))^2](\tilde{\theta}(k-1)x(k) + \xi(k))x(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Позначивши $p = \tilde{\theta}(k-1)x(k)$, перепишемо (8) так:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(k) &= \tilde{\theta}(k-1) - \\ &- 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 x(k)x^T(k) + 2p^2 x(k)x^T(k) + 6\xi^2(k)x(k)x^T(k)]\tilde{\theta}(k-1) - \\ &- 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 x(k)\xi(k) + 4p^2 x(k)\xi(k) + 2x(k)\xi^3(k)^2] = \\ &= [I - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 x(k)x^T(k) + 2p^2 x(k)x^T(k) + 6\xi^2(k)x(k)x^T(k)]]\tilde{\theta}(k-1) - \\ &- 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 x(k)\xi(k) + 4p^2 x(k)\xi(k) + 2x(k)\xi^3(k)^2]. \end{aligned}$$

Розглянемо математичне сподівання $M\{\tilde{\theta}(k)\}$ з урахуванням властивостей корисних сигналів та завад.

Після усереднення обох частин (8) отримуємо

$$\begin{aligned} M\{\tilde{\theta}(k)\} &= \\ &= M\{[I - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 x(k)x^T(k) + 2p^2 x(k)x^T(k) + 6\xi^2(k)x(k)x^T(k)]]\tilde{\theta}(k-1)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Враховуючи, що

$$M\{p^2\} = M\{(\tilde{\theta}(k-1)x(k))^2\} = \sigma_x^2 M\{\|\tilde{\theta}(k-1)\|^2\},$$

$$M\{x(k)x^T(k)\} = R_{xx} = \sigma_x^2 I,$$

$$M\{\xi^2(k)\} = \sigma_\xi^2,$$

вираз (9) перепишемо так:

$$M\{\tilde{\theta}(k)\} = [I - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 R_{xx} + 2\sigma_x^2 \|\theta(k-1)\|^2 R_{xx} + 6\sigma_\xi^2(k)R_{xx}]]M\{\tilde{\theta}(k-1)\}.$$

Звідси випливає, що алгоритм (2) буде збігатися в середньому за виконання умови

$$I - 4\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 R_{xx} + 2\sigma_x^2 \|\theta(k-1)\|^2 R_{xx} + 6\sigma_\xi^2(k)R_{xx}] < I,$$

тобто при

$$0 < \gamma(k) < \frac{1}{4(3\beta\sigma_e^2 + 2\sigma_x^2 \|\theta(k-1)\|^2 + 6\sigma_\xi^2) \text{tr} R_{xx}}$$

або

$$0 < \gamma(k) < \frac{1}{4(3\beta\sigma_e^2 + 2\sigma_x^2 \|\theta(k-1)\|^2 + 6\sigma_\xi^2)\sigma_x^2}.$$

Тут R_{xx} — кореляційна матриця вхідного сигналу.

Для дослідження збіжності алгоритму в середньоквадратичному розглянемо функцію Ляпунова $M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\}$.

Помноживши обидві частини (8) зліва на $\tilde{\theta}^T(k)$ і враховуючи припущення а)–г), маємо

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(k)\|^2 &= \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 - 8\gamma(k)[3\beta\sigma_e^2 + 2(p + \xi(k))^2](p + \xi(k))p + \\ &+ 16\gamma^2(k)[3\beta\sigma_e^2 + 2(p + \xi(k))^2]^2(p + \xi(k))^2 \|x(k)\|^2. \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень цей вираз набуде вигляду

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(k)\|^2 &= \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 - 8\gamma(k)[[3\beta\sigma_e^2 + 6\xi^2(k)]p^2 + 2p^4] + 16\gamma^2(k)\|x(k)\|^2 \times \\ &\times \left[\begin{aligned} &9\beta^2\sigma_e^4 p^2 + 18\beta^2\sigma_e^4 p^3 \xi(k) + 9\beta^2\sigma_e^4 \xi^2(k) + 12\beta\sigma_e^2 p^4 + 24\beta\sigma_e^2 p^3 \xi(k) + \\ &+ 12\beta\sigma_e^2 p^2 \xi^2(k) + 24\beta\sigma_e^2 p^3 \xi(k) + 48\beta\sigma_e^2 p^2 \xi^2(k) + 24\beta\sigma_e^2 p \xi^3(k) + \\ &+ 12\beta\sigma_e^2 p^2 \xi^2(k) + 24\beta\sigma_e^2 p \xi^3(k) + 12\beta\sigma_e^2 \xi^4(k) + 4p^6 + 8p^5 \xi(k) + \\ &+ 4p^4 \xi^2(k) + 16p^5 \xi(k) + 32p^4 \xi^2(k) + 16p^3 \xi^3(k) + 8p^4 \xi^2(k) + \\ &+ 16p^3 \xi^3(k) + 8p^2 \xi^4(k) + 16p^4 \xi^2(k) + 32p^3 \xi^3(k) + 16p^2 \xi^4(k) + \\ &+ 16p^3 \xi^3(k) + 32p^2 \xi^4(k) + 16p \xi^5(k) + 4p^2 \xi^4(k) + 8p \xi^5(k) + 4\xi^6(k) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Обчислимо математичне сподівання (10) з урахуванням того, що

$$M\{p^2\} = \sigma_x^2 M\{\|\theta(k-1)\|^2\};$$

$$M\{p^2 \|x(k)\|^2\} = (N+2)\sigma_x^4 M\{\|\theta(k-1)\|^2\};$$

$$\begin{aligned}
M\{p^4\} &\approx 3\sigma_x^4 M\{\|\theta(k-1)\|^2\}; \\
M\{p^4 \|x(k)\|^2\} &\approx (3N+12)\sigma_x^6 (M\{\|\theta(k-1)\|^2\})^2; \\
M\{p^6 \|x(k)\|^2\} &\approx (15N+90)\sigma_x^8 (M\{\|\theta(k-1)\|^2\})^3; \\
M\{p^2\}M\{\xi^4(k)\} &\approx \sigma_x^2 M\{\xi^4(k)\}M\{\|\tilde{\theta}(k-1)\|^2\}; \\
M\{\|x(k)\|^2 \xi^6\} &= M\{\|x(k)\|^2\}M\{\xi^6\} = N\sigma_x^2 M\{\xi^6\}; \\
M\{\|x(k)\|^2\} &= N\sigma_x^2.
\end{aligned}$$

Підставляючи дані вирази в (10) і враховуючи припущення а)–в), а також $M(\xi^3(k)) = M(\xi^5(k)) = 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\} = \\
&= \left(1 - \left[\begin{array}{l} 8\gamma(k)\sigma_x^2(3\beta\sigma_e^2 + 6M\{\xi^6(k)\}) - \\ -16\gamma^2(k)\sigma_x^4(N+2) \left(\begin{array}{l} 9\beta^2\sigma_e^4 + 72\beta\sigma_e^2\{\xi^2(k)\} + \\ +60M\{\xi^4(k)\} \end{array} \right) \end{array} \right] \right) M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\} - \\
&- [16\gamma^2(k)\sigma_x^6(3N+12)(12\beta\sigma_e^2 + 60M\{\xi^2(k)\})](M\{\|\tilde{\theta}(k-1)\|^2\})^2 + \\
&+ 64\gamma^2(k)\sigma_x^8(15N+90)(M\{\|\tilde{\theta}(k-1)\|^2\})^3 + \\
&+ 16\gamma^2(k)\sigma_x^2[9\beta^2\sigma_e^4 M\{\xi^2(k)\} + 12\beta\sigma_e^2 M\{\xi^4(k)\} + 4M\{\xi^6(k)\}]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Аналіз виразу (11) досить складний, тому доцільно скористатися підходом, застосованим у [26]. У даній роботі зазначається, що коли алгоритм збігається, величина $M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\}$ буде малою, тому при аналізі слід знехтувати величинами $(M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\})^2$ та $(M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\})^3$ і обмежитися розглядом величини

$$\begin{aligned}
&M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\} = \\
&= \left(1 - 8\gamma(k) \left[\begin{array}{l} (3\beta\sigma_e^2 + 6M\{\xi^4(k)\}) - \\ -2\gamma\sigma_x^2(9\beta^2\sigma_e^4 + 72\beta\sigma_e^2 + 60M\{\xi^4(k)\}) \end{array} \right] \right) \sigma_x^2 M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\} + \\
&+ 16\gamma^2(k)(N+2)\sigma_x^2[9\beta^2\sigma_e^4 M\{\xi^2(k)\} + 12\beta\sigma_e^2 M\{\xi^4(k)\} + 4M\{\xi^6(k)\}]. \quad (12)
\end{aligned}$$

З (12) випливає, що процедура (2) збігатиметься в середньоквадратичному (приріст функції Ляпунова буде негативним) за виконання умови

$$\left| \left(1 - 8\gamma(k) \left[\frac{(3\beta\sigma_e^2 + 6M\{\xi^2(k)\}) - 48\gamma(k)\sigma_x^2}{(3\beta^2\sigma_e^4 + 24\beta\sigma_e^2 M\{\xi^2(k)\} + 20M\{\xi^4(k)\})} \right] \right) \right| < 1,$$

тобто якщо параметр $\gamma(k)$ задовольняє нерівності

$$0 < \gamma(k) < \frac{\beta\sigma_e^2 + 2M\{\xi^2(k)\}}{(N+2)\sigma_x^2(3\beta^2\sigma_e^4 + 24\beta\sigma_e^2 M\{\xi^2(k)\} + 20M\{\xi^4(k)\})}. \quad (13)$$

Оптимальне значення цього параметра, що забезпечує максимальну швидкість збіжності алгоритму, яке отримуємо при розв'язанні рівняння

$$\frac{\partial M\{\|\tilde{\theta}(k)\|^2\}}{\partial \gamma(k)} = 0,$$

матиме такий вигляд:

$$\gamma^{\text{opt}}(k) = \frac{\beta\sigma_e^2 + 2M\{\xi^2(k)\}}{96\sigma_x^2\beta\sigma_e^2 M\{\xi^4(k)\}}. \quad (14)$$

Із (14) випливає, що величина $\gamma^{\text{opt}}(k)$ залежить від розмірності досліджуваного об'єкта N , статистичних властивостей сигналів та завад і величини $\sigma_{e_a}^2$.

Слід зазначити, що ця формула дозволяє визначити вплив інших параметрів на властивості алгоритму.

Визначення асимптотичних значень помилок оцінювання та ідентифікації

Із співвідношення (12) можна отримати вираз для асимптотичної похибки оцінювання:

$$\begin{aligned} M\{\|\tilde{\theta}(\infty)\|^2\} &= \\ &= \frac{2\gamma(k)(N+2)\sigma_x^2 \left[9\beta^2\sigma_e^2 + 9\beta^2\sigma_e^4 M\{\xi^2(k)\} + 12\beta\sigma_e^2 M\{\xi^4(k)\} + 4M\{\xi^6(k)\} \right]}{(3\beta\sigma_e^2 + 6M\{\xi^4(k)\}) - 2\gamma(k)\sigma_x^2(9\beta^2\sigma_e^4 + 72\beta\sigma_e^2 + 44M\{\xi^4(k)\})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Із (15) випливає, що для забезпечення $\lim_{k \rightarrow \infty} M\{\|\tilde{\theta}(\infty)\|^2\} = 0$ параметр $\gamma(k)$ зі зростанням k повинен наближатися до нуля, тобто задовольняти умовам Дворецького [35].

Підстановка (15) в (6) дає вираз для асимптотичної помилки ідентифікації:

$$\begin{aligned} M\{e^2(\infty)\} &= \sigma_\xi^2 + \\ &+ \frac{2(N+2)\gamma\sigma_x^2[9\beta^2\sigma_e^2 + 9\beta^2\sigma_e^4 M\{\xi^2(k)\} + 12\beta\sigma_e^2 M\{\xi^4(k)\} + 4M\{\xi^6(k)\}]}{(3\beta\sigma_e^2 + 6M\{\xi^4(k)\}) - 2\gamma\sigma_x^2(9\beta^2\sigma_e^4 + 72\beta\sigma_e^2 + 60M\{\xi^4(k)\})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ці вирази справедливі для будь-яких шумів вимірювань із симетричною функцією щільності ймовірності (Probability density function — PDF) та мали-

ми значеннями. Вищі порядки моментів шуму вимірів, тобто $M\{\xi^4(k)\}$ та $M\{\xi^6(k)\}$, слід розраховувати для відповідної PDF. Зокрема, для гауссового шуму $M\{\xi^4(k)\} = 3\sigma_\xi^4$ і $M\{\xi^6(k)\} = 15\sigma_\xi^6$, для двійкового шуму $M\{\xi^4(k)\} = \sigma_\xi^4$ і $M\{\xi^6(k)\} = \sigma_\xi^6$ — для рівномірного шуму $M\{\xi^4(k)\} = \frac{9}{5}\sigma_\xi^4$ і $M\{\xi^6(k)\} = \frac{27}{7}\sigma_\xi^6$, для шуму, розподіленого за законом Релея $M\{\xi^4(k)\} = 8\sigma_\xi^4$ і $M\{\xi^6(k)\} = 48\sigma_\xi^6$ — для закону Пуассона (з параметром λ) $M\{\xi^4(k)\} = \lambda + 7\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4$ і $M\{\xi^6(k)\} = \lambda + 31\lambda^2 + 90\lambda^3 + 65\lambda^4 + 15$ [45].

Крім того, в (14)–(16) входить величина σ_x^2 , яка часто на практиці невідома. Для оцінки σ_x^2 можна скористатися процедурою, аналогічною (4), яка має вигляд

$$\sigma_x^2(k) = \mu\sigma_x^2(k-1) + (1-\mu)\|x(k)\|^2,$$

де $\beta \in (0, 1)$.

Дані формули представляють радше теоретичний інтерес, оскільки характеризують граничні можливості алгоритму.

Моделювання

Розглядалося завдання ідентифікації стаціонарного лінійного об'єкта, що описується рівнянням (1) з такими параметрами: $\theta^* = (-110; -89; -90; -66; -55; -50; -36; -21; 0; 2; 20; 42; 62; 87; 88; 107)^T$. Як вхідний сигнал $x(k)$ вибиралися послідовності нормально розподілених величин $x(k) \sim N(0, 1)$. При тестуванні робастності алгоритмів у вихідний сигнал об'єкта додавався незалежний шум з рівномірним розподілом в інтервалі $[-1, 1]$ і засмічуючим гауссівським шумом з $\sigma = 48$. Гістограма такої завади показана на рис. 1.

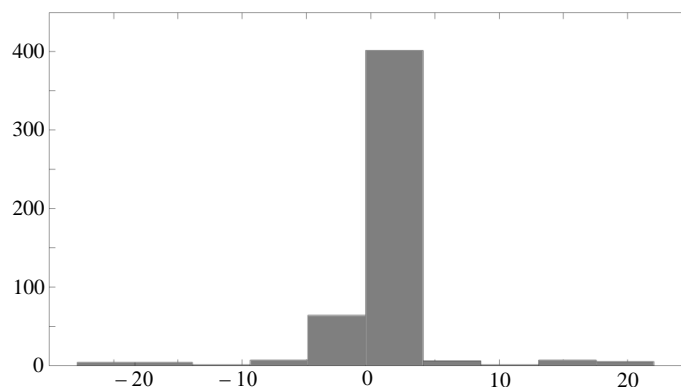


Рис. 1

Результати моделювання за різних значень параметра $\gamma(k)$ представлені на рис. 2, 3. На рис. 2 показані графіки налаштування параметрів моделі при використанні МНК (рис. 2, а) і алгоритму (3) з параметром $\gamma(k) = k^{-1}$ (рис. 2, б)

і $\gamma(k) = k^{-0,5}$ (рис. 2, в), а на рис. 3, а-в — помилки ідентифікації відповідних алгоритмів.

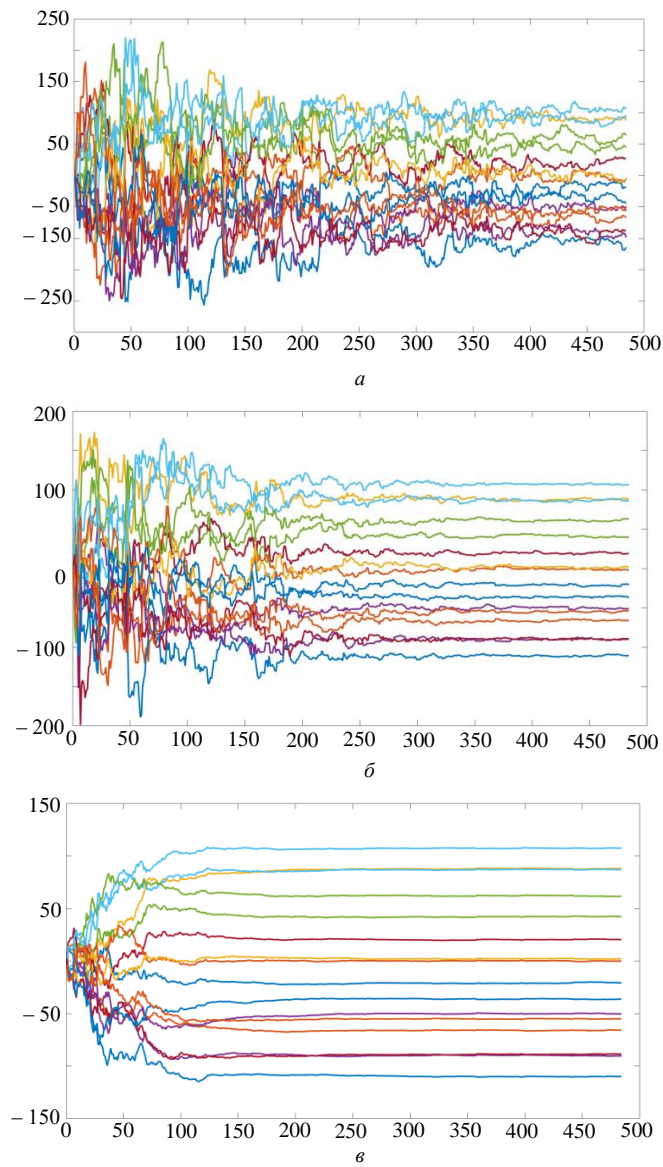


Рис. 2

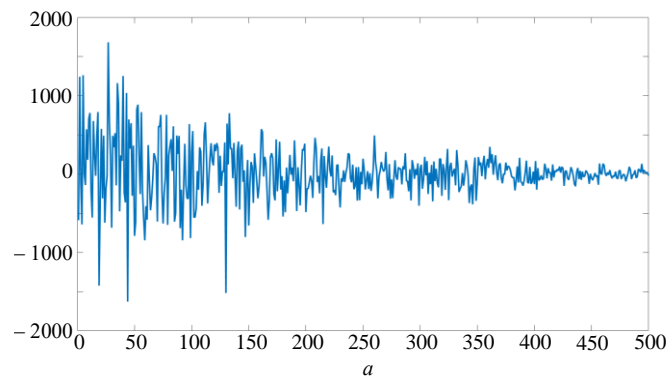
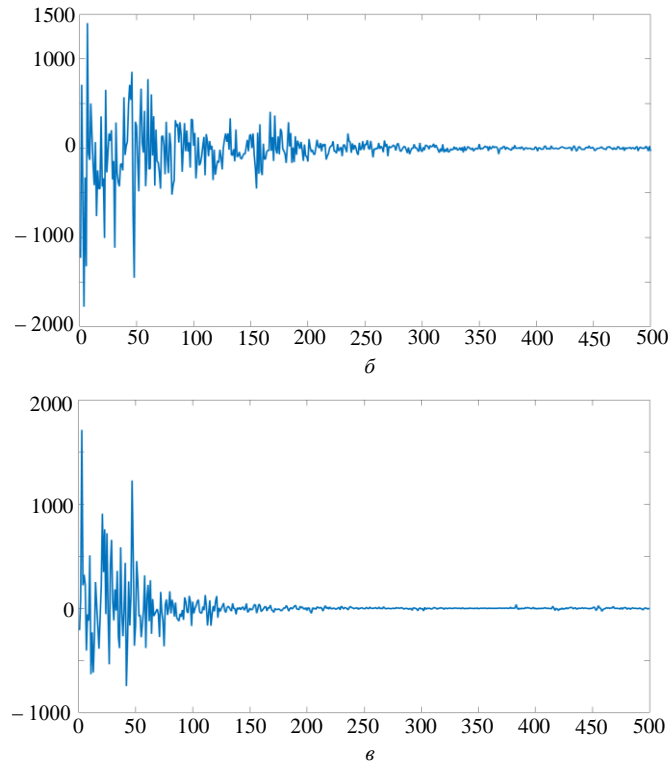


Рис. 3



Як видно із результатів моделювання, при використанні критерію найменших квадратів оцінювання параметрів моделі за наявності змішаної завади неможливе. При використанні критерію найменшого середнього ексцесу можна отримати оцінку вектора невідомих параметрів. У цьому випадку швидкість збіжності алгоритму залежить від вибору параметра $\gamma(k)$.

Висновок

Досліджено збіжність робастного алгоритму ідентифікації, що використовує критерій найменшого середнього ексцесу, та отримано аналітичні оцінки його збіжності в середньому та середньоквадратичному.

Визначено гранично досяжні (асимптотичні) значення помилок оцінювання параметрів та помилок ідентифікації в умовах, що розглядаються.

Слід зазначити, що отримані у роботі результати залежать від розмірності завдання N , величини $\gamma(k)$, а також від статистичних властивостей сигналів і завад (σ_x^2 , σ_x^4 , σ_e^2 , $M\{\xi^2\}$, $M\{\xi^{24}\}$). Якщо величина N відома, параметр $\gamma(k)$ може бути обраний, величина σ_e^2 може бути оцінена за формулою (4), а σ_x^2 — за формулою (16), то статистичні властивості завад на практиці часто невідомі. Оскільки розглянуті алгоритми призначені для вирішення задачі ідентифікації у реальному часі, у подальшому доцільна розробка ефективних процедур оцінювання статистичних характеристик сигналів і завад. Це особливо важливо, оскільки даний підхід може застосовуватися для ідентифікації динамічних об'єктів, представлених, наприклад, моделлю псевдолінійної регресії. Для урахування корельованості завад також необхідні рекурентні процедури оцінювання статистичних характеристик.

Таким чином, отримані в даній роботі оцінки представляють швидше теоретичний інтерес, оскільки характеризують граничні можливості алгоритму і дозволяють під час вирішення практичних завдань заздалегідь оцінити можливості даного алгоритму та ефективність його застосування.

O. Rudenko, O. Bezsonov

ON AN ALGORITHM FOR IDENTIFICATION OF LINEAR PLANTS ON THE BASIS OF THE LEAST EXCESS

Oleg Rudenko

Kharkiv National University of Radio Electronics,
oleg.rudenko@nure.ua

Oleksandr Bezsonov

Kharkiv National University of Radio Electronics,
oleksandr.bezsonov@nure.ua

The problem of identifying the parameters of a linear plant in the presence of non-Gaussian noise is considered. The identification algorithm is a gradient procedure for minimizing the criterion of the least average kurtosis. The use of such functional allows to obtain estimates that have robust properties. The identification algorithm is a gradient procedure. The conditions for the convergence of the applied procedure in the mean and the root-mean-square in the presence of non-Gaussian measurement noises are determined. In addition, expressions have been obtained for determining the optimal values of the algorithm parameter that ensure its maximum convergence rate. Based on the estimates obtained, the asymptotic and non-asymptotic values of the parameter estimation errors and identification errors are determined. Due to the fact that the obtained expressions contain a number of unknown parameters (values of dispersions of signals and noise), for their practical application, estimates of these parameters should be used. The obtained relations are rather cumbersome, but their simplification allows one to conduct a qualitative analysis of stability. It should be noted that all the estimates obtained in the work depend on a number of parameters, the problem of their determining remains open. The estimates obtained in this work allow the researcher to assess preliminarily the capabilities of the identification algorithm and the effectiveness of its use in solving practical problems

Keywords: kurtosis, functional, gradient algorithm, weighing parameter, asymptotic estimate, identification accuracy, noise, established process

1. Бедельбаева А.А. Релейные алгоритмы оценивания. *Автоматика и телемеханика*. 1978. № 1. С. 87–95.
2. Shao T., Zheng Y.R., Benesty J. An affine projection sign algorithm robust against impulsive interferences. *IEEE Signal Process. Lett.* 2010. **17**, N 4. P. 327–330. doi: <https://doi.org/10.1109/lsp.2010.2040203>.
3. Shin J., Yoo J., Park P. Variable step-size affine projection sign algorithm. *Electronics Letters*. 2012. **48**, N 9. P. 483. doi: <https://doi.org/10.1049/el.2012.0751>.
4. Lu L., Zhao H., Li K., Chen B. A novel normalized sign algorithm for system identification under impulsive noise interference. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2015. **35**, N 9. P. 3244–3265. doi: <https://doi.org/10.1007/s00034-015-0195-1>.
5. Huang H.-C., Lee J. A new variable step-size NLMS algorithm and its performance analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2012. **60**, N 4. P. 2055–2060. doi: <https://doi.org/10.1109/tsp.2011.2181505>.
6. Casco-Sánchez F.M., Medina-Ramírez R.C., López-Guerrero M. A new variable step-size NLMS algorithm and its performance evaluation in echo cancelling applications. *J. of Applied Research and Technology*. 2011. **9**, N 3. P. 302–313.

7. Huber P.J. Robust methods of estimation of regression coefficients. *Series Statistics*. 1977. **8**, N 1. P. 41–53. doi: <https://doi.org/10.1080/02331887708801356>.
8. Hampel F.R. The influence curve and its role in robust estimation. *Journal of the American Statistical Association*. 1974. **69**, N 346. P. 383–393. doi: <https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10482962>.
9. Adamczyk T. Application of the Huber and Hampel *M*-estimation in real estate value modeling. *Geomatics and Environmental Engineering*. 2017. **11**, N 1. doi: <https://doi.org/10.7494/geom.2017.11.1.15>.
10. Руденко О.Г., Бессонов А.А. Робастное обучение радиально-базисных сетей. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 6. С. 38–46.
11. Руденко О.Г., Бессонов А.А. Робастная нейроэволюционная идентификация нестационарных объектов. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 21–36.
12. Руденко О.Г., Бессонов А.А., Руденко С.О. Робастная идентификация нелинейных объектов с помощью эволюционирующей радиально-базисной сети. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 2. С. 15–26.
13. Rudenko O., Bezsonov O. Function approximation using robust radial basis function networks. *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*. 2011. **3**, N 1. P. 17–25. doi: <https://doi.org/10.4236/jilsa.2011.31003>.
14. Chambers J.A., Tanrikulu O., Constantinides A.G. Least mean mixed-norm adaptive filtering. *Electronics Letters*. 1994. **30**, N 19. P. 1574–1575. doi: <https://doi.org/10.1049/el:19941060>.
15. Rakesh P., Kumar T.K., Albu F. Modified least-mean mixed-norm algorithms for adaptive sparse system identification under impulsive noise environment. *42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. 2019. P. 557–561. doi: <https://doi.org/10.1109/tsp.2019.8768813>.
16. Papoulis E.V., Stathaki T. A normalized robust mixed-norm adaptive algorithm for system identification. *IEEE Signal Processing Letters*. 2004. **11**, N 1. P. 56–59. doi: <https://doi.org/10.1109/lsp.2003.819353>.
17. Arenas-García J., Figueiras-Vidal A.R. Adaptive combination of normalised filters for robust system identification. *Electronics Letters*. 2005. **41**, N 15. P. 874. doi: <https://doi.org/10.1049/el:20051936>.
18. Rudenko O., Bezsonov O., Lebediev O., Serdiuk N. Robust identification of non-stationary objects with nongaussian interference. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. N 5/4 (101). P. 44–52. doi: [10.15587/1729-4061.2019.181256](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.181256).
19. Walach E., Widrow B. The least mean fourth (LMF) adaptive algorithm and its family. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1984. **30**, N 2. P. 275–283. doi: <https://doi.org/10.1109/tit.1984.1056886>.
20. Bershad N.J., Bermudez J.C.M. Mean-square stability of the normalized least-mean fourth algorithm for white gaussian inputs. *Digital Signal Processing*. 2011. **21**, N 6. P. 694–700. doi: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2011.06.002>.
21. Eweda E., Zerguine A. New insights into the normalization of the least mean fourth algorithm. *Signal, Image and Video Processing*. 2011. **7**, N 2. P. 255–262. doi: <https://doi.org/10.1007/s11760-011-0231-y>.
22. Eweda E. Global stabilization of the least mean fourth algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2012. **60**, N 3. P. 1473–1477. doi: <https://doi.org/10.1109/tsp.2011.2177976>.
23. Eweda E., Bershad N.J. Stochastic analysis of a stable normalized least mean fourth algorithm for adaptive noise canceling with a white gaussian reference. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2012. **60**, N 12. P. 6235–6244. doi: <https://doi.org/10.1109/tsp.2012.2215607>.
24. Hubscher P.I., Bermudez J.C.M., Nascimento Vi.H. A mean-square stability analysis of the least mean fourth adaptive algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2007. **55**, N 8. P. 4018–4028. doi: <https://doi.org/10.1109/tsp.2007.894423>.
25. Zhang J., Zhang S. Fast stable normalized least mean absolute fourth algorithm. *Electron Lett*. 2015. **51**, N 2. P. 1276–1277. doi: [10.1049/el.2015.0421](https://doi.org/10.1049/el.2015.0421).
26. Guan S., Meng C., Biswal B. Optimal step-size of least mean fourth algorithm in low SNR. 2019. <https://arxiv.org/abs/1908.08165>, 2019-arxiv.org.
27. Asad S.M., Chambers J. A robust and stable variable step-size design for the least mean fourth algorithm using quotient form. *Signal Processing*. 2019. **162**. P. 196–210. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.04.021>.

28. Mansoor U., Mayyala Q., Moinuddin M., Zerguine A. Quasi-Newton least-mean fourth adaptive algorithm. *2017 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2017. P. 2708–2712. doi: 10.23919/EUSIPCO.2017.8081689.
29. Sadiq A., Usmany M., Khany S., Naseemz I., Moinuddin M., Al-Saggaf U. q -LMF: quantum calculus-based least mean fourth algorithm. 2019. arXiv:1812.02588v2 [eess.SP] 20 Dec 2018.
30. Zerguine A., Cowan CFN., Bettayeb M. LMS-LMF adaptive scheme for echo cancellation. *Electron Lett.* 1996. **32**, N 19. P. 1776–1778. doi:10.1049/el:19961202.
31. Zerguine A., Aboulnasr T. Convergence analysis of the variable weight mixed-norm LMS-LMF adaptive algorithm. *In Proc 34th Annual Asilomar Conf Signals, Syst, Comput.* 2000. P. 249–282.
32. Zerguine A. A variable-parameter normalized mixed-norm (VPNMN) adaptive algorithm. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. 2012. N 55. 13 p. <http://asp.eurasipjournals.com/content/2012/1/55>.
33. Rudenko O., Bezsonov O., Lebediev O., Lebediev, Oliinyk K. Studying the properties of a robust algorithm for identifying linear objects, which minimizes a combined functional. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. N 4/4 (106). P. 37–46. doi: 10.15587/1729-4061.2020.210129.
34. Tanrikulu O., Constantinides A.G. Least Mean Kurtosis: A novel higher-order statistics based adaptive filtering algorithm. *Electronics Letters*. 1984. **30**, N 3. P. 189–190.
35. Fonolossa J.A.F. Adaptive system identification based on high order statistics. *Proc. ICASSP 1991 Toronto, Canada*. 1991. P. 3437–3440.
36. Pazaitis D.I., Constantinides A.G. LMS+F algorithm. *IEE Electron. Lett.* 1995. **17**, N 31. P. 1423–1424.
37. Pazaitis D.I., Constantinides A.G. A novel kurtosis driven variable step-size adaptive algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1999. **47**, N 3. P. 864–872.
38. Qu H., Ma W.-T., Zhao J.-H., Chen B.-D. Kernel least mean kurtosis based online chaotic time series prediction. *Chin. phys. lett.* 2013. **30**, N 4. 5 p. doi: 10.1088/0256-307X/30/11/110505.
39. Sanubari J. Analysis of steady-state excess mean-square-error of the least mean kurtosis adaptive algorithm. *14th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006), Florence, Italy, September 4-8, 2006*. 5 p.
40. Bershad N.J., Bermudez J.C.M. Stochastic analysis of the least mean kurtosis algorithm for Gaussian inputs. *Digital Signal Processing*. 2016. **54**, N 6. P. 1–11. <http://dx.doi.org/10.1016/j.dsp.2016.03.012>.
41. Hübscher P.I., Bermudez J.C.M. Properties of the kurtosis performance surface in linear estimation: application to adaptive filtering. *Proc. of the 2004 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE, Montreal, Canada*. 2004. P. 837–840.
42. Hübscher P.I., Bermudez J.C.M. A model for the behavior of the least mean kurtosis (LMK) adaptive algorithm with Gaussian inputs. *Proc. of the 2002 International Telecommunications Symposium, SBrT, Natal, RN, Brazil, 2002*.
43. Eghbal M.K., Alipoor G. LMSK: a robust higher-order gradient-based adaptive algorithm. *IET Signal Processing*. 2019. **13**, N 5. P. 506–515. doi: 10.1049/iet-spr.2018.5242.
44. Гладышев Е.Г. О стохастической аппроксимации. Теория вероятности и ее применения. 1965. **10**, № 2. С. 275–278. doi: <https://doi.org/10.1137/1110031>.
45. Spiegel M.S., Lin, J. *Mathematical handbook of formulas and tables*. Third ED. N.Y. 2008. 312 p.

Отримано 24.12.2021