УДК 004.043

О.О. Кряжич, О.В. Коваленко

ВДОСКОНАЛЕННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО АЛГОРИТМУ З РЕАЛІЗАЦІЇ СПОСОБУ ОПИСУ ЕКОЛОГІЧНОГО СТАНУ ТЕРИТОРІЇ

Кряжич Ольга Олександрівна

Інститут телекомунікацій глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ; Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля, м. Сєвєродонецьк,
economconsult@gmail.com

Коваленко Олександр Васильович

Інститут ядерних досліджень НАН України, м. Київ,
akovalenko@kinr.kiev.ua

З використанням способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні реалізовано програмний додаток «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка». Цей програмний додаток призначений для створення моделей пересічених територій, які зазнали впливу небезпечних речовин, з урахуванням ступеня забруднення ділянки. В основу покладено підхід, що дозволяє описати територію відрізками. Проте це викликає нев'язку апроксимації, яка може призвести до наближеного або помилкового результату. Задача роботи — вдосконалення алгоритму ітерації при реалізації способу опису екологічного стану забрудненої небезпечними речовинами території для побудови її моделі. Особливістю вирішення поставленої задачі є те, що при використанні ітераційних формул, заснованих на розкладанні за нев'язками, є ще одна додаткова можливість для скорочення числа дій — обчислення зі змінною розрядністю. Це пов'язано з тим, що при використанні ітераційної формули *p*-го порядку на кожному кроці збільшується точність приблизно в *p* разів. Представлений алгоритм реалізовано за допомогою знаходження базових послідовностей ітераційних формул з модифікацією методу Чебишова для побудови ітерацій вищих порядків. Зокрема, застосування різних методів апроксимації функцій для отримання коефіцієнтів базових послідовностей на основі відомих розкладань. Наведене може використовуватися в комп'ютерній реалізації програм для побудови моделей пересіченої території, наприклад водних об'єктів, та прогнозів забруднення техногенно-навантажених промислових територій, відстійників, русла річок, шахтних виробіток. Вдосконалений алгоритм дозволяє виконувати задачі опису з більшою точністю шляхом мінімізації помилок та наближення їх значення до нуля.

Ключові слова: операція, функція, перетворення, нев'язка, наближення, порядок, послідовність, напрям, модифікація.

Вступ

З використанням способу опису забрудненої території [1] реалізовано додаток [2] для вирішення задачі опису екологічного стану території шляхом побудови моделі, що відображає ступінь забруднення ділянки [3]. Зазначений спосіб реалізовано з використанням методу можливих напрямків [4, 5], а отримані моделі апробовані проведенням вимірювань вмісту тритію у рослинах на досліджуваних пересічених територіях, на яких припускається наявність підйомів та схилів, що адекватно відображаються на моделях забруднення. Якщо взяти криву спуску, яка йде від деякої точки А до точки В, то можна описати її відрізками, тобто провести ітерацію. Проте це викликає нев'язку [6] апроксимації, що може призвести до наближеного або помилкового результату при значній величині таких кроків. Більш точний результат можна отримати при розбитті кривої на відрізки, що описуються тригонометричними функціями. Тоді помилка наближення виникатиме в точках поєднання відрізків, описаних різними функціями [7].

Актуальність даної роботи полягає в тому, що вирішення подібних задач потребує підходу, який дозволить мінімізувати помилку або запобігти її виникненню шляхом коригуючих кроків при проведенні ітерацій.

Постановка задачі

У даній роботі вдосконалюється алгоритм ітерації при реалізації способу опису екологічного стану забрудненої небезпечними речовинами території для побудови її моделі.

При комп'ютерній реалізації алгоритму в масивах неструктурованої інформації важливо зменшення кількості операцій. Один з таких варіантів запропонований Г.С. Теслером [8, 9] для реалізації адаптивного методу «цифра за цифрою». Його перевага в тому, що він може використовуватися для розрахунків моделей та реалізації алгоритмів як з фіксованим форматом даних, так і зі змінними та довільними форматами даних, за винятком економічних адаптивних реалізацій за методом CORDIC [10–12]. Зазначене стосується, наприклад, найуживаніших функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, ex. Проте існують деякі алгоритми, які дозволяють обходити зазначене обмеження [13].

Логіка вирішення поставленої задачі

При використанні ітераційних формул, заснованих на розкладанні функцій за нев'язками, є ще одна додаткова можливість для скорочення числа дій — обчислення зі змінною розрядністю. Це пов'язано з тим, що при використанні ітераційної формули p-го порядку на кожному кроці точність збільшується приблизно в p разів. Тому при m ітераціях у разі отримання кінцевої точності в n розрядів на першій ітерації можна проводити розрахунок з $[n/p^m]$ розрядами, на другій — з $[n/p^{m-1}]$ і т.п., а на останній — з n розрядами. При цьому помилка округлення залежить в основному від результатів округлення величин, що беруть участь в останній ітерації. Додаткові резерви для скорочення часу рахунку пов'язані з тим, що завдяки використанню нев'язки рівняння $Z = F(x, y)$ є можливість застосування інкрементної (скороченої) інформації всередині ітераційної формули. Кількість значущих цифр у нев'язці істотно залежить від точності початкового наближення або попередньої ітерації. При багаторазовому використанні ітераційної формули p-го порядку можливе застосування багаторозрядної інкрементної інформації, за якою кожна наступна ітерація збільшує точність результату приблизно в p разів.

Різноманітні методи отримання базових послідовностей ітераційних формул мало відрізняються за структурою нев'язки, але значно можуть відрізнятися за простотою ряду розрахунків [14]. Метод Чебишова універсальний [15], проте складний для отримання коефіцієнтів.

Розкладання функцій за нев'язками, в основному, спрямовано на отримання індивідуальних базових послідовностей ітераційних формул, орієнтованих на обчислення конкретної функції. Це дозволяє використовувати різні методи апроксимації функцій та в більшості випадків отримувати коефіцієнти базових послідовностей на основі відомих розкладань. Остання дозволяє отримати широкий спектр базових послідовностей ітераційних формул з використанням методів Чебишова для різних функцій.

Нижче представлено спосіб знаходження базових послідовностей ітераційних формул з модифікацією методу Чебишова для побудови ітерацій вищих порядків при заданні рівняння наступного типу.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ задана в неявному вигляді

$$F(x,\ y) = 0. \tag{1}$$

Тоді нев'язку рівнянь [15]

$$\begin{aligned} &f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(x+y) = f(x)f(y), \\ &f(xy) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad D(f) = R \end{aligned} \tag{2}$$

можна представити так:

$$Z_0 = F(x, y_0)\,, \tag{3}$$

де y_0 — наближення функції на заданому відрізку $[a,\ b]$ і $\lim\limits_{y_0 \to y} Z_0 = 0$.

Величину похибки можна отримати, підставивши у вирази (2), (3) величину $y_0 = y(1+\delta_0)$ або $y_0 = y + \Delta_0$, де δ_0, Δ_0 — відповідно відносна і абсолютна похибки.

Модифікація методів Чебишова для побудови ітерацій вищих порядків

Використовуючи рівняння (1), де x — аргумент, а y — шукана функція, можна застосувати чебишовські методи побудови ітерацій вищого порядку і відшукати корені рівняння, які дорівнюють нулю. Для отримання модифікованого методу побудови ітерацій вищих порядків у разі заданого рівняння (3) приймаємо, що в межах отримання простого кореня для рівняння (3) його можна представити як

$$Z = F(x,\ y). \tag{4}$$

Нехай тепер

$$y = \Phi(x, z)\,, \tag{5}$$

звідси відповідно

$$y \equiv \Phi[x, F(x,\ y)]\,, \tag{6}$$

де функція y задана на відрізку $[a,\ b]$;

$$Z \equiv F[x, \Phi(x,\ z)]\,, \tag{7}$$

де функція z задана на відрізку $[c,\ d]$.

З тотожності (7) випливає, що корінь рівняння (4) має вигляд

$$\alpha = \Phi[x,\ 0]. \tag{8}$$

Відносно функції $F[x,\ 0]$ передбачається, що вона неперервна на сегменті $[c,\ d]$ і має неперервні частинні похідні по y достатньо високого порядку і $F'y(x,\ y) \neq 0$, а $y \equiv Y$. Тоді, розклавши функцію (5) за ступенями $Z - z$, вважаючи x і z фіксованими, можна отримати

 ISSN 1028-0979

$$Y = \Phi(x, z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z}(Z - z) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial z^2}(Z - z)^2 + \ldots . \tag{9}$$

Прийнявши $Z = 0$ та враховуючи (8), отримаємо з (9)

$$\alpha \equiv \Phi(x, z) - \frac{1}{1!}\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial z^2} z^2 + \ldots . \tag{10}$$

Враховуючи (6), маємо з (10)

$$\alpha = y + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)}\left[x, F(x, z)\right] z^k . \tag{11}$$

Якщо обмежитися кінцевим числом членів розкладання, то вираз (11) можна представити як

$$\alpha = y + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)}\left[x,\ F(x, y)\right] z^k + R_{m+1},$$

де R_{m+1} — залишковий член.

Визначимо $\Psi_m(x, y)$ як вираз

$$\Psi_m(x, y) = y + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)}[x,\ F(x, y)]\ (F(x, y))^k .$$

Тоді рівняння $y = \Psi_m(x, y)$ при заданому x має корінь $y = \alpha$, тому що

$$\Psi_m(x, \alpha) = \alpha + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)}[x,\ F(x, \alpha)](F(x, \alpha))^k = \alpha,$$

де $F(x, \alpha) = 0.$

Прийнявши

$$y_{i+1} = \Psi_m(x, y_i),\ \ i = 1, 2, 3, k,$$

отримаємо ітераційний метод $(m+1)$ -го порядку, бо

$$\left.\frac{\partial \Psi_m(x, y)}{\partial y}\right|_{y=\alpha} = \left.\frac{\partial^2 \Psi_m(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=\alpha} = \ldots = \left.\frac{\partial^m \Psi_m(x, y)}{\partial y^m}\right|_{y=\alpha} = 0.$$

Для забезпечення сходження послідовності $y_{i+1} = \Psi_m(x, y_i)$ при $i = 1, 2, 3, k$ до шуканого кореня α необхідно висунути вимогу, щоб початкове наближення до шуканого кореня y_0 належало до сфери оточення α, в якій $\left|\Psi_y'(x, y)\right| \le q < 1.$

Зв'язок між $\Phi_z^{(k)}(x, y)$ та $\Phi_y^{(k)}[x, F(x, y)]$ можна визначити за правилами заміни в диференційних виразах.

Враховуючи (8) і (11), а також, що

$$\Phi_y^{(k)}[x,\ F(x,\ y)] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 1, \\ 0, & \text{при } k > 1, \end{cases} \tag{12}$$

отримаємо з (12)

$$\Phi_z^{(1)}=\frac{1}{F_y^{(1)}(x,y)},\ \Phi_z^{(2)}=\frac{F_y^{(2)}(x,y)}{[F_y^{(1)}(x,y)]^3},\dots\ . \tag{13}$$

Таким чином, $\Phi_z^{(l)}$ — обернена похідна шуканої функції. Якщо підставити вираз (13) в (11), отримаємо шуканий ряд.

Якщо прийняти в (11) $\alpha\equiv y$, а y в правій частині рівняння замінити початковим наближенням $y\approx\alpha$, можна записати

$$y=y_0-\frac{1}{1!Z_y^{(1)}(x,y_0)}Z_0-\frac{Z_y^{(2)}(x,y_0)}{2![Z_y^{(1)}(x,y_0)]^3}Z_0^2-$$

$$-\frac{3[Z_y^{(2)}(x,y_0)]^2-Z_y^{(1)}(x,y_0)Z_y^{(3)}(x,y_0)}{3![Z_y^{(1)}(x,y)]^5}Z_0^3-\dots, \tag{14}$$

де $Z_0=F(x,y_0)$.

Звідси видно, що функція y розкладається за ступенями Z_0, а не за ступенями x, що характерно для розкладання в ряд Тейлора, тобто отримано базову послідовність ітераційних формул.

Ряд (14) можна перетворити в ітераційну формулу, якщо обмежитися кінцевим числом членів і зробити заміну

$$y=y_{i+1},\ y_0=y_i,\ Z_0=Z_i,$$

при $i=0,\ y_0\equiv y_0$.

В результаті отримаємо

$$y_{i+1}=y_i-\frac{1}{1!Z_y^{(1)}(x,y_i)}Z_i-\frac{Z_y^{(2)}(x,y_i)}{2![Z_y^{(1)}(x,y_i)]^3}Z_i^2-$$

$$-\frac{3[Z_y^{(2)}(x,y_i)]^2-Z_y^{(1)}(x,y_i)Z_y^{(3)}(x,y_i)}{3![Z_y^{(1)}(x,y_i)]^5}Z_i^3-\dots.$$

Наприклад, для $y=\sqrt[n]{x}$ і $Z(x,y_i)=y^n/x-1$ це буде

$$y_{i+1}=\frac{1}{n}[(n-1)y_i+x/y_i^{n-1}]-\frac{n-1}{2!n^2}(y_i^n-x)^2/y_i^{2n-1}-$$

$$-(n-1)(2n-1)(y_i^n-x)^3/3!n^3y_i^{3n-1}-\dots.$$

Відносні похибки ітераційних формул другого, третього і четвертого порядків можна представити виразами

$$\delta_{i+1}=\frac{n-1}{2!}\delta_i^2-\frac{(n-1)(n+1)}{3!}\delta_i^3+\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4!}\delta_i^4-\dots,$$

$$\delta_{i+1}\approx\frac{(n-1)(2n-1)}{3!}\delta_i^3-\frac{(n-1)(2n^2+n-1)}{4!}\delta_i^4,$$

$$\delta_{i+1}\approx\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!}\delta_i^4.$$

Ці ітераційні формули можна отримати, ґрунтуючись на методі розкладання функцій в ряд нев'язок, за нев'язкою, що має вигляд $Z_0 = x / y_0^n - 1$. А сама запропонована модифікація методу Чебишова для отримання базових послідовностей ітераційних формул базується на розкладанні функції $\Phi(x, Z)$ в ряд Тейлора.

Висновок

У роботі представлено алгоритм перетворення функцій з мінімізацією похибок шляхом розкладання шуканої функції в ряд нев'язок, коли вибирається вид нев'язки та встановлюється ряд обмежень з розкладанням отриманої функції $\Phi(x, Z)$ в ряд Тейлора. Алгоритм реалізовано за допомогою знаходження базових послідовностей ітераційних формул з модифікацією методу Чебишова для побудови ітерацій вищих порядків. Зокрема, застосування різних методів апроксимації функцій для отримання коефіцієнтів базових послідовностей на основі відомих розкладань, які можна подати як таблиці, що при програмній реалізації зекономить час на розрахунках та значно підвищить їх точність.

Наведене може використовуватися в програмній реалізації програм для побудови моделей пересіченої території, наприклад водних об'єктів, та прогнозів забруднення техногенно-навантажених промислових територій, відстійників, русла річок, гірничих виробіток. Вдосконалений алгоритм дозволяє більш точно описати задачі шляхом мінімізації помилок та наближення їх значення до нуля.

O. Kryazhych, O. Kovalenko

IMPROVEMENT OF THE ITERATIVE ALGORITHM FOR IMPLEMENTING METHOD FOR DESCRIBING THE ECOLOGICAL STATE OF TERRITORY

Olga Kryazhych

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NASU, Kyiv, Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Severodonetsk,
economconsult@gmail.com

Oleksandr Kovalenko

Institute for Nuclear Research of the NASU, Kyiv,
akovalenko@kinr.kiev.ua

Using the method of studying the ecological state of the territory in case of man-made pollution, the software application «Computer program for implementing the method of describing the contaminated territory «Random point» was implemented. This software application is designed to create models of the listed areas that have been exposed to hazardous substances. It is based on an approach that allows you to describe the territory in segments. However, this causes a residual approximation, which can lead to an approximate or erroneous result. The task of the work is to improve the iteration algorithm when implementing a method for describing the ecological state of a territory for constructing models of territories contaminated with hazardous substances. A special feature of solving this problem is that when using iterative formulas based on residual decomposition, there is another additional opportunity to reduce the number of actions-calculations with variable bit depth. This is due to the fact that when using an iterative *p*-order formula, the accuracy increases approximately several times at *p*-step. The presented algorithm is implemented by finding the basic sequences of iterative formulas with a modification of the Chebyshev method for constructing higher-order iterations. The use of various methods for approximating functions to obtain coefficients of basic sequences based on known decompositions. This can be used in computer implementation of programs to build models of rugged terrain, such as water bodies, models and forecasts of pollution of man-made industrial areas, settling tanks, riverbeds, mine workings. The advanced algorithm allows you to perform description tasks with greater accuracy by minimizing errors and bringing their values closer to zero.

Keywords: operation, function, transformation, residual, approximation, order, sequence, direction, modification.

1. Патент України на корисну модель № 113110. Спосіб дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні. О.О. Кряжич, О.В. Коваленко. Зареєстровано в державному реєстрі патентів України на корисні моделі 10.01.2017.
2. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 67750 «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка» («Випадкова точка (Random point)»). О.О. Кряжич, О.В. Коваленко. Дата заявки: 12.07.2016. Дата реєстрації: 12.09.2016.
3. Кряжич О.О., Коваленко О.В., Іванченко В.В. Спосіб опису забрудненої території: програмна реалізація. *Математичне моделювання в економіці.* 2016. № 2. С. 22–35.
4. Трофимчук О.М., Кряжич О.О. Алгоритм опису яружних цільових функцій. *Штучний інтелект*. 2015. № 1–2. С. 190–199.
5. Трофимчук О.М., Кряжич О.О. Апроксимація функцій для створення алгоритму опису пересіченої місцевості. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2016. № 1. С. 134–141.
6. Shewchuk J.R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. *School of Computer Science Carnegie Mellon University*. *Pittsburgh*. PA 15213. August 4, 1994. 58 p.
7. Коваленко О.В., Кряжич О.О. Спосіб опису екологічного стану території та його програмна реалізація «випадкова точка» з використанням методу можливих напрямків. *Вісник УжНУ «Говерла». Серія: Математика і інформатика.* 2016. № 1 (28). С. 60–71.
8. Теслер Г.С. Адаптивные экономичные асинхронные итерационные методы «цифра за цифрой». *Математические машины и системы.* 1999. № 1. С. 43–52.
9. Теслер Г.С. Адаптивные аппроксимации и итеративные процессы. *Математичні машини і системи.* 2004. № 2. С. 22–41.
10. Volder J.E. The CORDIC trigonometric computing technique. *IRE Transactions on Electronic Computers*. 1959. **EC-8**, N 3. P. 330–334. doi**:** 10.1109/TEC.1959.5222693
11. 50 Years of CORDIC: Algorithms, Architectures, and Applications. Pramod K. Meher, Javier Valls, Tso-Bing Juang, K. Sridharan, Koushik Maharatna. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2009. **56**, N 9. P. 1893–1907.
12. Lakshmi B., Dhar A.S. CORDIC architectures: a survey. *VLSI Design.* 2010. **2010**, N ID 794891. 19 p. https://doi.org/10.1155/2010/794891
13. Евдокимов В.Ф., Стасюк А.Н. Параллельные вычислительные структуры на основе разрядных методов вычислений. Киев : Наук. думка, 1987. 312 с.
14. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации: Пер. с англ. М. : Мир, 1980. 608 с.
15. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: Пер. с польского. М. : Наука, 1983. 384 с.

Отримано 28.01.2022